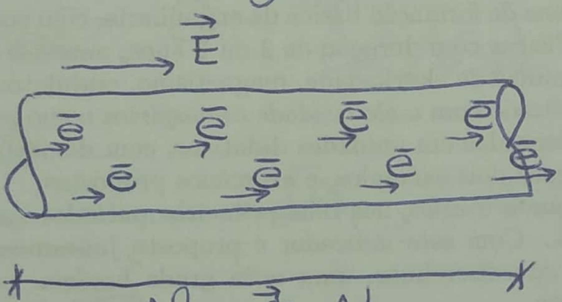
Forma Diferencial da Lei de Ohm

considere um segmento de condutor:



$$I = n|q|.\vec{v}_{\bar{e}}.A$$

$$\Delta l = \vec{v}_{\bar{e}}.\Delta t$$

como: $$\vec{J} = \frac{I}{dA} = \frac{dQ}{dt}.\frac{1}{dA}$$

$$\vec{J} = \frac{n|q|.\vec{v}_{\bar{e}}.\cancel{dA}}{\cancel{dA}}$$

Pode-se generalizar este resultado p/ o caso de existirem portadores de carga de vários tipos:

$$\boxed{\vec{J} = \sum_k q_k n_k \vec{v}_{\bar{e}_k}}$$

Scanned by CamScanner

Portanto, temos:

1ª lei de Ohm — $\boxed{V = R \cdot i}$

2ª lei de Ohm — dada como.

$$\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$$

$$\hookrightarrow E = \frac{\Delta V}{\ell}$$

como: $\vec{J} = \frac{I}{A}$

$$\hookrightarrow \rho = \frac{E}{\vec{J}}$$

então

$$\rho \cdot J = \frac{\Delta V}{\ell}$$

Scanned by CamScanner

$$\rho \cdot \frac{I}{A} = \frac{\Delta V}{\ell}$$

$$\frac{\rho}{A} = \boxed{\frac{\Delta V}{I}} \cdot \frac{1}{\ell}$$

$$\frac{\rho}{A} = \frac{R}{\ell}$$

$(\Omega . m)$

$[m]$

logo: $\boxed{R = \rho \frac{\ell}{A}}$

$[m^2]$

$[\Omega]$

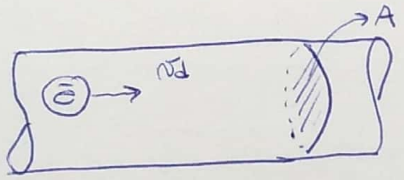
Sobre $\vec{J}$, temos o seguinte:

$1\,mA = 10^{-3} A$ (corrente em rádios e TV's)

$1\,\mu A = 10^{-6} A$ (corrente em DVD's)

$1\,pA = 10^{-12} A$ (corrente em computadores)

Portanto,



veloc de deslocamento

$$\boxed{\vec{J} = \frac{I}{Área} = n \cdot |q| \cdot v_d}$$

nº de partículas

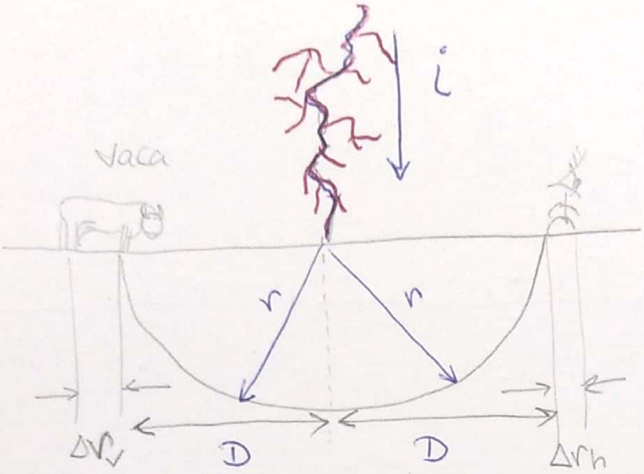
$$\vec{J}_x = \rho_0 \vec{v}_x = \left[\frac{q \cdot N}{V}\right] \cdot \frac{\partial x}{\partial t} \longrightarrow \vec{J}_x \cdot Área = \left[\frac{q \cdot N}{V}\right] \cdot \frac{\partial x \, Área}{\partial t}$$

Exercício 26: $\vec{J}_x \cdot Área = \frac{\partial q}{\partial t} \cdot N \longrightarrow \vec{J} = \frac{I \cdot N}{Área}$

Uma vaca e um homem, ambos a uma distância $D = 60\,m$ do local onde um Raio de $I = 100\,kA$ atingiu o solo. A corrente se espalha pelo solo de modo a preencher uniformemente um hemisfério com centro no ponto em que o Raio atingiu o solo.

Os pés do homem estão separados por uma distância $\Delta r_h = 0{,}5\,m$; as patas dianteiras e as patas traseiras da vaca estão separadas por $\Delta r_v = 1{,}5\,m$. $\rho_{solo} = 100\,\Omega.m$. A resistência entre os pés do homem e as patas da vaca é $R = 4\,k\Omega$

a) Qual é a corrente i_h que atravessa o corpo do homem?



Lösung :

$$I \equiv \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

$$\vec{J} = \frac{I}{\boxed{2\pi r^2}}$$ → área do hemisfério curvo

$$\vec{E} = \rho_{solo} \cdot \vec{J} = \frac{\rho_{solo}\, I}{2\pi r^2}$$

mas: $\Delta V = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r}$, Also

$$\Delta V = -\int_D^{D+\Delta r} E \cdot dr = -\int_D^{D+\Delta r} \frac{\rho_{solo} \cdot I}{2\pi r^2}\, dr$$

$$\Delta V = -\frac{\rho_{solo}\, I}{2\pi}\left[-\frac{1}{r}\right]_D^{D+\Delta r} = \frac{\rho_{solo} \cdot I}{2\pi}\left(\frac{1}{D+\Delta r} - \frac{1}{D}\right)$$

$$\Delta V = -\frac{\rho_{solo}\, I}{2\pi}\, \frac{\Delta r}{D(D+\Delta r)}$$

Se: $i = \frac{V}{R} = \frac{\rho_{solo} \cdot I}{2\pi} \frac{\Delta r}{D(D+\Delta r)} \cdot \frac{1}{R}$

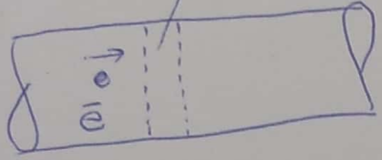
então:

$$i_h = \frac{(100\,\Omega.m)(100\,kA)}{2\pi \cdot 4\,k\Omega} \cdot \frac{0{,}5\,m}{(60\,m)(60+0{,}5\,m)}$$

$$\boxed{i_h = 54{,}8\ mA}$$

Scanned by CamScanner

lei de Ohm formal



lacunas: portadores de carga (+)

logo: $\vec{v}_{arrasto_{\bar{e}}} = \vec{\mu}_{\bar{e}}(-\vec{E})$ (m/s)

mobilidade dos ē ($m^2/V.s$)

$v_{arrasto}$ das lacunas $= \vec{u}_h$, então

$\vec{u}_h = \mu_h . \vec{E}$ → mobilidade da coluna

Densidade de corrente de condução total é dada por:

dens. volumétrica de lacunas [C/m^3]

$$\vec{J} = \vec{J}_{\bar{e}} + \vec{J}_h = \rho_{\bar{e}} \underbrace{\vec{\mu}_e}_{\vec{v}_{\bar{e}}=} + \rho_h \underbrace{\vec{u}_h}_{\vec{v}_e=}$$

→ dens. volumétrica dos ē livres [C/m^3]

Substituindo:

$$\vec{J} = \left(-\rho_{\bar{e}} \vec{\mu}_{\bar{e}} . \vec{E} + \rho_h . \mu_h . \vec{E}\right)$$

se: $\rho_{\bar{e}} = -N_{\bar{e}} . \bar{e}$ → Nº de ē

$\rho_h = N_h . \bar{e}$ → nº de lacunas

A condutividade do material, σ é:

$$\boxed{\sigma = -\rho_{\bar{e}} \mu_{\bar{e}} = N_{\bar{e}} . \mu_e . \bar{e}}$$

σ → S/m; $\rho_{\bar{e}}$ → C/m^3; μ_e → $m^2/V.s$; $\bar{e}$ → C

Portanto:

$$\boxed{\vec{J} = \sigma . \vec{E}}$$

$\vec{J}$ → A/m^2; σ → S/m; $\vec{E}$ → V/m

Exercício 28:

Um fio de cobre de 2mm de diâmetro com $\sigma = 5,8 \times 10^{7}$ $(\Omega.m)^{-1}$ e uma mobilidade de $\bar{e}$ de 0,0032 $m^2/V.s$, está sujeito à um $\vec{E} = 20\ mV/m$. Determine (a) a densidade volumétrica de carga dos $\bar{e}$ livres. (b), a densidade de corrente. (c) a corrente que passa pelo fio, (d) veloc. de arrasto dos $\bar{e}$. (e) densidade volumétrica dos $\bar{e}$ livres:

Lösung:

a) $\rho_{\bar{e}} = -\frac{\sigma}{\mu_e} = -\frac{5,8 \times 10^{7}}{0,0032} = -1,81 \times 10^{10}\ C/m^3$

b) $\vec{J} = \sigma.\vec{E} = 5,8 \times 10^{7} . 20 \times 10^{-3} = 1,16 \times 10^{6}\ A/m^2$

c) $I = \vec{J}.A = \vec{J}.\left(\frac{\pi d^2}{4}\right) = 1,16 \times 10^{6} . \left(\frac{\pi}{4} . 4 \times 10^{-6}\right) = 3,64 A$

d) $\vec{u}_{\bar{e}} = -\mu_e.\vec{E} = -0,0032 . 20 \times 10^{-3} = -6,4 \times 10^{-5}\ m/s$

e) $N_e = -\frac{\rho_{\bar{e}}}{\bar{e}} = \frac{1,81 \times 10^{10}}{1,6 \times 10^{-19}} = 1,13 \times 10^{29}\ \bar{e}/m^3$

Scanned by CamScanner

Vimos que:

Resistência (Ω): $\boxed{R = \frac{V}{I}}$ lei de Ohm $\boxed{V = R.I}$

- A resistência é sempre positiva ($R \geq 0$)
- A recíproca da resistência é chamada de Condutância e é simbolizada por G. $\boxed{G = \frac{1}{R} = \frac{I}{V}}$

Siemens $[S] = [\Omega^{-1}] = [A/V]$

Agora vejamos a Lei de Joule na forma Pontual (Local)

- Consideremos um fluxo de corrente num condutor do ponto de vista energético.
- Devido a colisão dos portadores de carga livres (os $\bar{e}$) existem perdas de energia cinética.
- Estas perdas surgem porque parte da energia é transferida a partir de um campo elétrico ($\vec{E}$).
- Isto faz aumentar a energia térmica, resultando numa maior temperatura do condutor.

☒ Ou seja, existe um trabalho ($W_{\bar{e}}$) envolvido na taxa de colisão, mas que acaba sendo convertido (perdido) em calor.

☒ A taxa de conversão, $\frac{dW_{\bar{e}}}{dt}$ em $[J/s]$ é potência, chamada de potência de perdas Joule, ou simplesmente, perdas ôhmicas.

$$\boxed{dP_{\text{perd. Joule}} = dP_J = \frac{dW_{\bar{e}}}{dt} = J \cdot E \cdot dv}$$

densidade de corrente

campo $\vec{E}$

volume

☒ A densidade de volume dessa de potência é:

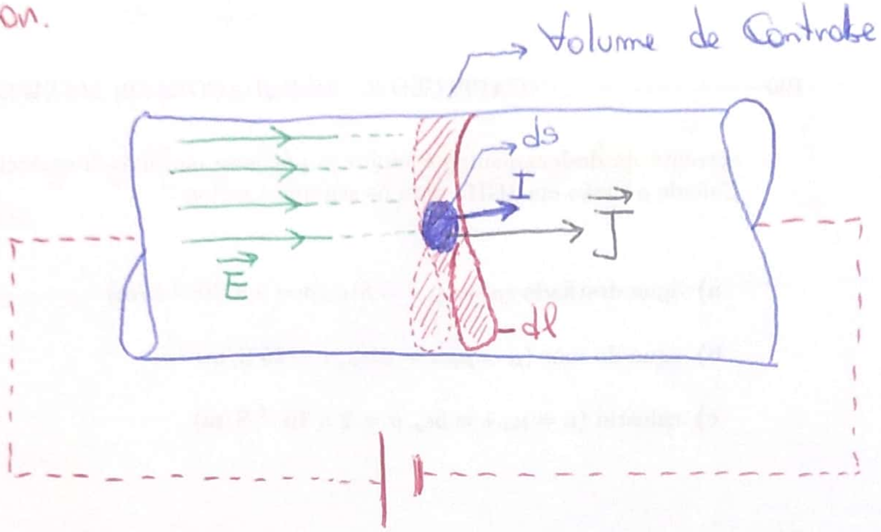
$$[W/m^3] \leftarrow \boxed{P_J = \frac{dP_J}{dv} = J \cdot E = J^2/\sigma = \sigma \cdot E^2}$$

lei de Joule local (Pontual)

☒ A Potência total de Perdas Joule (energia elétrica que se perde em calor), será:

$$\boxed{P_{J_{TOTAL}} = \int_{V} P_J \, dv = \iiint J \cdot E \, dv}$$

Imagine, agora, um condutor moldado para ser um resistor.



Vamos integrar sobre o volume de controle:

↳ quem? integrar a potência total Joule

para isso fazemos: $\boxed{d\upsilon = d\ell . ds}$

logo:

$$P_{J_{TOTAL}} = \int_{\forall} J.E\, d\upsilon = \int_A^B \int_S J E \overbrace{ds\, d\ell}^{d\upsilon}$$

integral de linha ↵ ↳ integral de superfície

note que: $E d\ell = d\forall \longrightarrow d\forall$ é constante, então é retirado da integral.

$$P_{J_{TOTAL}} = \int_A^B \int_S J \overbrace{E d\ell}^{d\forall} ds = \left[\int_A^B E d\ell\right]\left[\int_S J ds\right] = \forall . I$$

Assim, obtemos uma relação mais completa da lei de Joule, no qual:

$$\boxed{P_{J_{TOTAL}} = V.I = R.I^2 = \frac{V^2}{R} = G.V^2 = \frac{I^2}{G}}$$

lei de Joule