Aula 2

Revisão de Equações Importantes

objetivo:

Relembrar as Equações de Maxwell, Impedância Característica de LT, Relações Trigonométricas, Relações Logarítmicas, Identidades Vetoriais, Gradiente, Divergente, Rotacional, Laplaciano e escada dB.

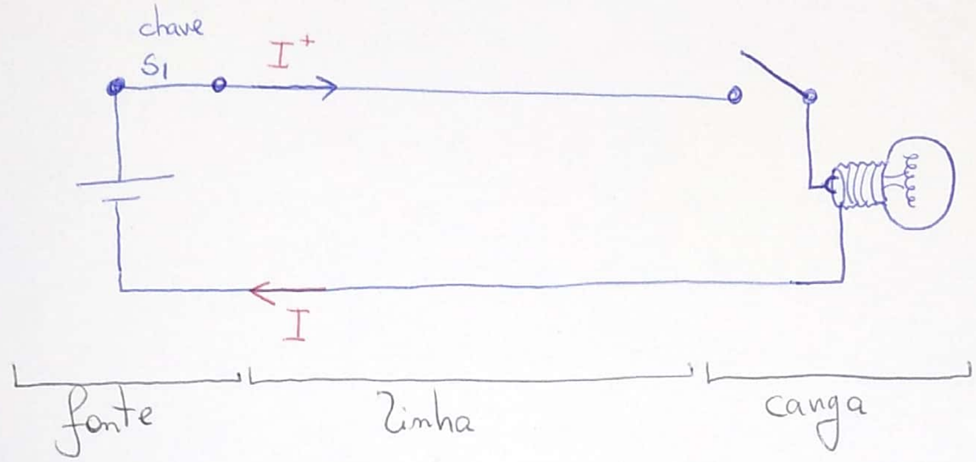
Equações de Maxwell em Forma Diferencial

	De Ampère	De Faraday	De Gauss	De Gauss
Dimensão / caso	corrente elétrica / área	Potencial Elétrico / área	Fluxo elétrico / volume	Fluxo Magnético / volume
Geral	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Espaço-livre	$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	$\nabla \cdot \vec{D} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Variação Harmônica	$\nabla \times \vec{H} = (\sigma + j\omega\varepsilon)\vec{E}$	$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{H}\mu$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Estacionário	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$	$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
Estático	$\nabla \times \vec{H} = 0$	$\nabla \times \vec{E} = 0$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$

Equações de Maxwell em Forma Integral

Unidades / Caso	De Ampère - Potencial magnético	De Faraday - Potencial elétrico	De Gauss - Fluxo elétrico	De Gauss - Fluxo magnético
Unidades	Ampères	Volts	coulombs	webers
Geral	$\oint \vec{H}.d\vec{l} = \overbrace{\int_S \vec{J}.ds}^{I} + \overbrace{\frac{d}{dt}\int_S \varepsilon_0 \vec{E}.ds}^{\partial D/\partial t} = I_{TOTAL}$	$V = \oint \vec{E}.d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.ds$	$\oint_S \vec{D}.ds = \int_{\forall} \rho_{\forall}.d\forall = \phi_e$	$\int_S \vec{B}.ds = 0 = \phi_m$
Espaço - livre	$\oint \vec{H}.dl = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.ds = I_{deslocamento}$	$V = \oint \vec{E}.dl = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.ds$	$\oint_S \vec{D}.ds = 0 = \phi_e$	$\int_S \vec{B}.ds = 0 = \phi_m$
Variação harmônica	$\oint \vec{H}.dl = (\sigma + j\omega\varepsilon)\int_S \vec{E}.ds = I_{TOTAL}$	$V = \oint \vec{E}.d\vec{l} = -j\omega\mu \int_S \vec{H}.ds$	$\int_S \vec{D}.ds = \int_{\forall} \rho_{\forall}.d\forall = \phi_e$	$\int_S \vec{B}.ds = 0 = \phi_m$
Estacionário	$\oint \vec{H}.dl = \int_S \vec{J}.ds = I_{condução}$	$V = \oint \vec{E}.dl = 0$	$\int_S \vec{D}.ds = \int_{\forall} \rho_{\forall}.d\forall = \phi_e$	$\int_S \vec{B}.ds = 0 = \phi_m$
Estático	$\oint \vec{H}.dl = 0$	$V = \oint \vec{E}.dl = 0$	$\int_S \vec{D}.ds = \int_{\forall} \rho_{\forall} d\forall = \phi_e$	$\int_S \vec{B}.ds = 0 = \phi_m$

Fórmulas p/ Impedância Característica de LT



Condutância — $G = \dfrac{I}{V} = \dfrac{1}{R}$ $\quad [\Omega^{-1}] = [S]$

impedância — $L = \dfrac{N.\phi}{I}$ $\quad \left[\dfrac{Wb}{A}\right] = [\Omega.s]$

Resistência — $R = \dfrac{V}{I}$ $\quad [\Omega]$

Capacitância — $C = \dfrac{Q}{V} = \dfrac{I.\Delta t}{V}$ $\quad [F]$

Equações Telegráficas de Maxwell

↓

Eq. de Onda para uma L.T

↓

Eq's. Telegráficas p/ Tensões Complexas

↓

impedância complexa (Z)

↓

impedância característica (Z_0)

$$\boxed{Z_0 = \sqrt{\frac{Z}{\underbrace{Y}_{\text{admitância}}}} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}} \quad [\Omega]$$

Relação Trigonométrica

$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cos y$

$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$

$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \sin y$

$\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \sin x \sin y$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

$\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}$

$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$

$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{1}{\tanh x}$

$e^{\pm ix} = \cos x \pm j \sin x$

Relação Logarítmica

$$\log_{10} x = \log x = 0{,}4343 \ln x$$

$$\log_e x = \ln x = 2{,}3026 \log_{10} x$$

$$e = 2{,}7183$$

Identidades Vetoriais

f e g são escalares

$\vec{F}$, $\vec{G}$ e $\vec{H}$ são vetores

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{F}) = 0$$

$$\nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla \times \nabla f = 0$$

$$\nabla (f+g) = \nabla f + \nabla g$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F}$$

$$\nabla \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\nabla \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\nabla \times \vec{G})$$

$$\vec{F} \cdot (\vec{G} \times \vec{H}) = \vec{G} \cdot (\vec{H} \times \vec{F}) = \vec{H} \cdot (\vec{F} \times \vec{G})$$

Gradiente, Divergente, Rotacional e Laplaciano

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Resolva

Prove isto

$$\Downarrow$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Em coord. cilíndricas

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{a}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{a}_z$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \hat{r} & \hat{\theta} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{a}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{a}_\theta$$

$$+ \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{a}_z$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Em coord. esféricas

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{a}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{a}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{a}_\phi$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta \sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{r} & r\sin\theta\,\hat{\phi} & r\hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ F_r & r\sin\theta F_\theta & r F_\phi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta}(F_\phi \sin\theta) - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{a}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r F_\phi)\right)\hat{a}_\theta$$

$$+ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r F_\theta) - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{a}_\phi$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

Teorema da Divergência: $\oint_S \vec{E}\cdot ds = \int_V \nabla \cdot \vec{E}\, dV$

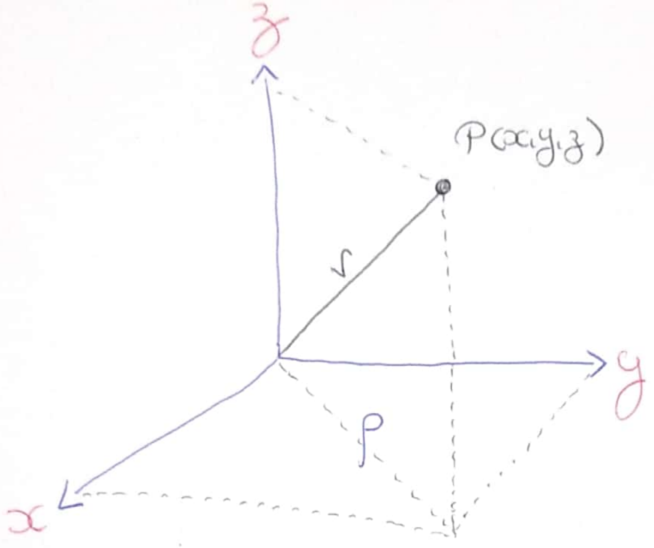
Teorema de Stoke: $\oint \vec{B}\cdot dl = \int_S \nabla \times \vec{B}\cdot ds$

Laplaciano: $\nabla \cdot (\nabla f) \equiv \nabla^2 f$

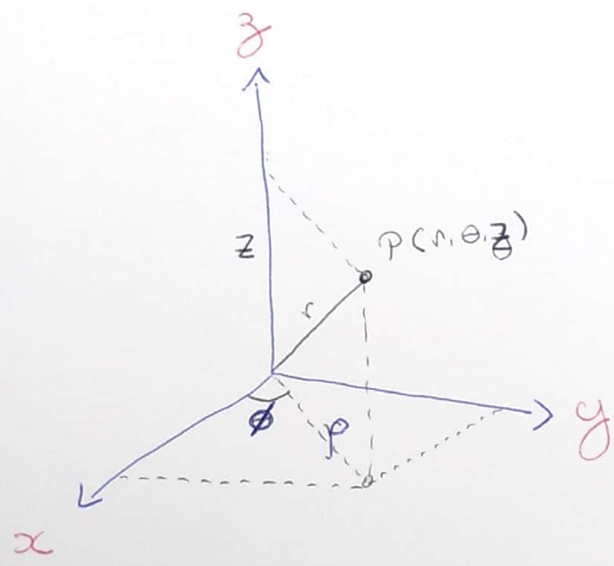
Scanned by CamScanner

Sistemas de Coordenadas

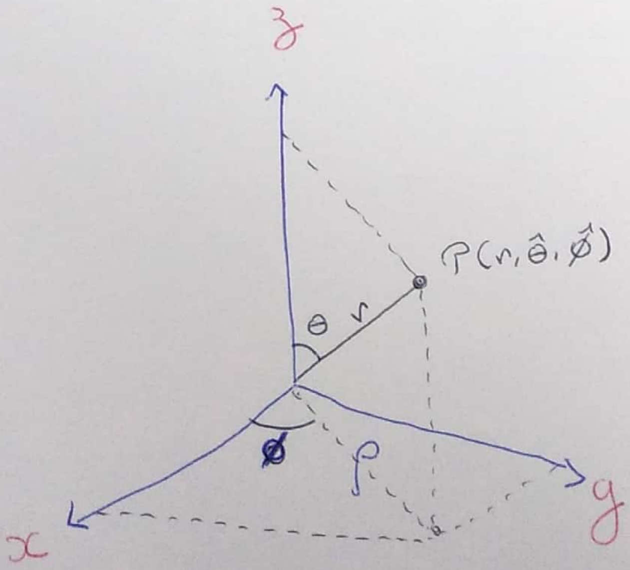
cartesianas



cilíndricas



Esféricas



Unidade Logarítmica - Decibel

$a^x = m \longrightarrow \log_a m = x$

$10^3 = 1000 \longrightarrow \log_{10} 1000 = 3$

↓

logaritmo de um nº, é o expoente a que se deve elevar a base p/ se obter este nº.

Decibel utiliza a unidade logarítmica p/ expressar a relação entre uma qtidade por outra qtidade de referência.

exemplo: se a e b são potências, a razão "bel", será:

$$\text{Nível de Potência} = \log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) \quad [\text{Bel}]$$

se a têm o dobro da potência b:

$$\text{Nível de Potência} = \log_{10} 2 = 0,301 \ \text{Bel}$$

se a têm a metade da potência b:

$$\text{Nível de Potência} = \log_{10} 0,5 = -0,301 \ \text{Bel}$$

$\boxed{\text{Decibel é um décimo do Bel}}$

Níveis de Referência

dBi = decibel em relação à um modelo isotrópico

dBw = unidade de medida de potência. 0 dBw = 1W

0 dBm = 1 miliwatt

dBu ou dBv = 0,775 volt (lido na escala do voltímetro)

dBV = 1 volt

1 Neper = 8,65 dB

0 dBμ = 1μ Volt

dBd = expressa o ganho de uma antena em relação ao Dipolo de meia onda. 0 dBd = 2,15 dBi

site: www.qsl.net/py4zbz/teoria/odb.htm

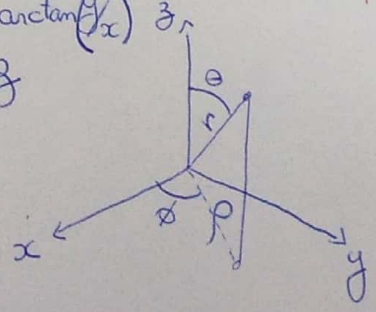
Transformação de Sistemas de Coordenadas

Retangulares p/ Cilíndrica

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$z = Z$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$
$\phi = \arctan(y/x)$
$z = z$

Cilíndrica p/ Esférica



$\rho = r\sin\theta$
$z = r\cos\theta$

Retangulares para Esférica

$$x = r\sin\theta\cos\phi \qquad\qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$
$$z = r\cos\theta \qquad\qquad \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Exercícios de Aplicação

Determine o gradiente de cada uma das seguintes funções escalares e então calcule cada uma para o ponto dado:

(a) $V_1 = 24V_0\cos(y\pi/3)\sin(z2\pi/3)$ para $(3,2,1)$ em coord. cartesianas

(b) $V_2 = V_0 e^{-2r}\sin 3\phi$ para $(1, \pi/2, 3)$ em coord. cilíndricas

(c) $V_3 = V_0 (a/R)\cos 2\theta$ para $(2a, 0, \pi)$ em coord. esféricas.

Solução

(a) $$\nabla V_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V_1}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V_1}{\partial z}\hat{z}$$

$$= 0 - 8\pi V_0 \sin\frac{\pi y}{3}\sin\frac{2\pi z}{3}\hat{y} + 16\pi V_0\cos\frac{\pi y}{3}\cos\frac{2\pi z}{3}\hat{z}$$

$$= 8\pi V_0\left[-\sin\frac{\pi y}{3}\sin\frac{2\pi z}{3}\hat{y} + 2\cos\frac{\pi y}{3}\cos\frac{2\pi z}{3}\hat{z}\right]$$

p/ $(3,2,1)$

$$\nabla V_1 = 8\pi V_0\left[-\sin^2\frac{2\pi}{3}\hat{y} + 2\cos^2\frac{2\pi}{3}\hat{z}\right] = \pi V_0\left[-6\hat{y} + 4\hat{z}\right]$$

(b)

$$\nabla V_2 = \left(\frac{\partial}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{z}\right)\left(V_0 e^{-2r}\sin 3\phi\right)$$

$$\nabla V_2 = -2V_0 e^{-2r}\sin 3\phi\,\hat{r} + \frac{\left(3V_0 e^{-2r}\cos 3\phi\right)}{r}\hat{\phi}$$

$$\nabla V_2 = V_0 e^{-2r}\left[-2\sin 3\phi\,\hat{r} + \frac{3\cos 3\phi}{r}\hat{\phi}\right]$$

p/ $(1, \pi/2, 3) \longrightarrow r = 1$ e $\phi = \pi/2$, portanto:

$$\nabla V_2 = 0{,}27 V_0\,\hat{r}$$

(c) $$\nabla V_3 = \left(\frac{\partial}{\partial R}\hat{R} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \phi}\hat{\phi}\right) V_0\left(\frac{a}{R}\right)\cos 2\theta$$

$$\nabla V_3 = -\frac{V_0 a}{R^2}\cos 2\theta\,\hat{R} - \frac{2V_0 a}{R^2}\sin 2\theta\,\hat{\theta}$$

p/ $(2a, 0, \pi) \longrightarrow R = 2a$ e $\theta = 0$, logo:

$$\nabla V_3 = -\frac{V_0}{4a}\hat{R}$$

Determine o divergente de cada um dos seguintes campos vetoriais e, em seguida, calcule-os para o ponto indicado.

(a) $\vec{E} = 3x^2\hat{x} + 2z\hat{y} + x^2z\hat{z}$ para $(2,-2,0)$

(b) $\vec{E} = (a^3\cos\theta/r^2)\,\hat{r} - (a^3\sin\theta/r^2)\,\hat{\theta}$ para $(a/2, 0, \pi)$

Solução:

(a)

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = x^2 + 6x \Big|_{(2,-2,0)} = 16$$

(b)

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(E_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}(E_\phi)$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(a^3\cos\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(-\frac{a^3\sin^2\theta}{r^2}\right)$$

$$\nabla\cdot\vec{E} = 0 - \frac{2a^3\cos\theta}{r^3}\Big|_{(a/2,0,\pi)} = -16$$

Encontre o volume de uma esfera de raio R.

Solução.

$$V = \iiint d\forall$$

$$V = \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi$$

$$V = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\phi$$

$$V = \frac{R^3}{3} \cdot (2) \cdot (2\pi) = \frac{4}{3}\pi R^3$$