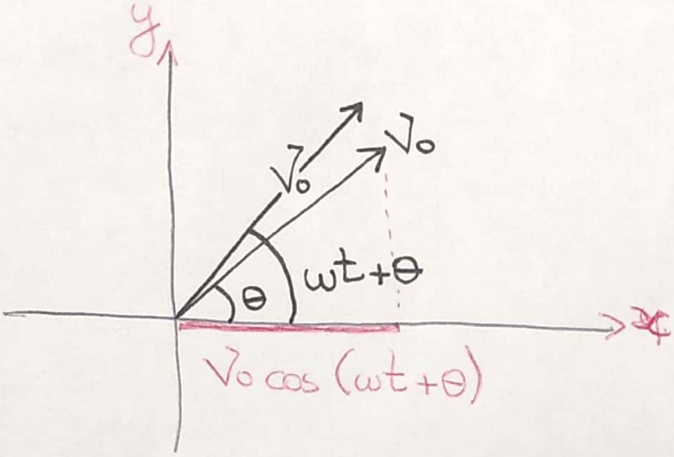
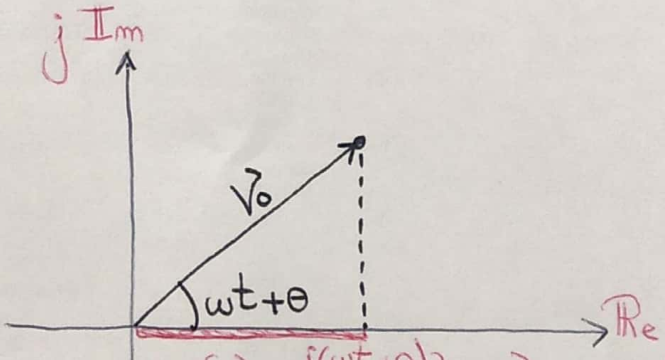
Potenciais Eletromagnéticos de Lorentz

Grandezas harmônicas no tempo podem ser representadas como vetores rotativos.



Renomeamos $x \longrightarrow$ para $\Re$

$y \longrightarrow$ para $\Im m$

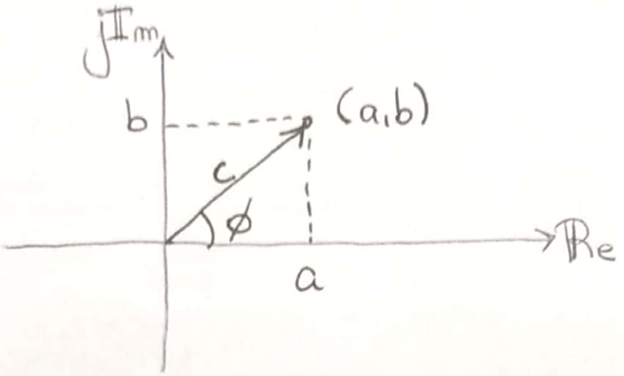


$$\Re\{\vec{V}_0\, e^{j(\omega t + \theta)}\} = \vec{V}_0 \cos(\omega t + \theta)$$

Número Complexo:

$$\boxed{c = \underbrace{a}_{\Re(c)} + \underbrace{j}_{\sqrt{-1}}\,\overbrace{b}^{\Im m\,(c)}} \qquad (1)$$

Cada ponto (c) no plano complexo, possui seu correspondente no eixo $\Re$ e $\Im$.



Na forma exponencial c pode ser escrito como:

$$\boxed{|c| = c . e^{j\phi}}$$ → ângulo de fase

Transformando do nº Complexo ~~da~~ forma retangular para polar

$$c = \sqrt{a^2+b^2} \quad e \quad \phi = \arg(a,b) = tg^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

da figura acima tiramos que:

$$\boxed{a = c\cos\phi \quad e \quad b = c\sin\phi} \qquad (2)$$

combinando (1) com (2), temos:

$$|c| = c\left(\cos\phi + j\sin\phi\right)$$

usando a forma exponencial, reduz-se à:

$$\boxed{e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi}$$ identidade de Euler

Portanto, podemos expressar a resultante complexa da Magnitude Complexa de Tensão Instantânea, como:

$$\boxed{V_0\, e^{j(\omega t+\phi)} = \dot{V}(t)} \quad (3)$$

na forma rms, teremos

$$\boxed{|V| = \frac{V_0}{\sqrt{2}} e^{j\theta} = V e^{j\theta}} \quad (4)$$

que será!!!

$$\boxed{V(t) = \mathbb{R}e\{|V|\sqrt{2}\, e^{j\omega t}\}} \quad (5)$$

ou

$$\boxed{\underbrace{V(t) = V\sqrt{2}\,\cos(\omega t+\theta)}_{\text{instantânea } V(t)} \longleftrightarrow \underbrace{Ve^{j\theta}}_{\text{complexa } |V|}}$$

Equações de Maxwell no Domínio Complexo

basta fazermos: $\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow j\omega$

logo

$$\oint \vec{E}_c\, d\vec{l} = -j\omega \iint \vec{B}_c \cdot d\vec{A}_{rea}$$

$$\oint \vec{H}_c\, d\vec{l} = \iint \left(\vec{J}_c + j\omega \vec{D}_c\right) \cdot d\vec{A}_{rea}$$

para altas frequências

$$\oiint \vec{D}_c \cdot d\vec{A}_{rea} = \iiint \rho_c\, dV$$

$$\oiint \vec{B}_c\, d\vec{A}_{rea} = 0$$

Onde: $\vec{D}_c = \varepsilon \vec{E}_c$

$\vec{B}_c = \mu \vec{H}_c$

$\vec{J}_c = \sigma \left(\vec{E}_c + \vec{E}_i\right)$

$\vec{E}_i$ ↳ intensidade rms complexa do campo elétrico.

Para baixas frequências, o termo: $j\omega \vec{D}_c \approx 0$

Portanto:

$$\begin{cases} \nabla \times \vec{E}_c = -j\omega \vec{B}_c \\ \nabla \times \vec{H}_c = \vec{J}_c + j\omega \vec{D}_c \\ \nabla \cdot \vec{D}_c = \rho_c \\ \nabla \cdot \vec{B}_c = 0 \end{cases}$$

Todas as equações não contém tempo.
são + simples de trabalhar

Potenciais Eletromagnéticos de Lorentz

O objetivo:
obter expressões p/ os vetores intensidade de campo elétrico e magnético causado por fontes $\vec{J}$ e ρ.

Suposição:
que estas fontes estão num meio linear, homogêneo e sem perdas, com permissividade ε e permeabilidade μ.

Sabemos que:

$$\vec{E}(t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V(t)$$

$\vec{A}$ → potencial vetor magnético.

$V(t)$ → potencial escalar elétrico

→ substituindo na equação: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

que será:

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A})}$$

De forma semelhante: fazendo:

$$\begin{cases} \vec{B}(t) = \nabla \times \vec{A}(t) \\ \vec{E}(t) = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla V(t) \end{cases}$$

na eq:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$ lei de Maxwell-Ampère

teremos:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{A} = -\varepsilon\mu \frac{\partial V}{\partial t}}$$

condição de Gauge de Lorentz

Que ainda podem resultar em:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$ → pot. escalar elétrico

Equação de onda para

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} + \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$ → pot. vetor magnético

São chamadas de Eq's de onda p/ os potenciais.

São equações desacopladas, ou seja, cada eq. de onda tem apenas um dos potenciais como incógnita.

Scanned by CamScanner

Teorema e Vetor Complexo de Poynting

Campos eletromagnéticos possuem propagação no espaço. O equilíbrio da potência p/ os campos e as fontes em uma região de interesse é dada pelo Teorema de Poynting.

Vamos discutir o Teorema de Poynting no domínio do tempo.

A discussão no domínio da frequência será visto em outra disciplina.

A Demonstração será feita em outra disciplina, por hora vamos nos preocupar em compreender o Teorema.

Teorema de Poynting

Potência gerada instantânea da P_i fontes no domínio V.

$$\boxed{\iiint \vec{E}\,\vec{J}\,dV = \iiint \frac{J^2}{\sigma}\,dV + \underbrace{\frac{d}{dt}\iiint\left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right)dV}_{} + \underbrace{\oint\!\!\!\oint (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{A}_{rea}}_{}}$$

potência total instantânea de perdas ôhmicas no volume

representa a razão da variação da energia localizada no campo eletromagnético

Energia líquida total que sai do domínio através da superfície S. têm unidade de W/m^2 — chamado de Vetor de Poynting logo:

$$\boxed{\mathbb{P} = \vec{E} \times \vec{\mathcal{H}}}$$

A potência eletromagnética através de uma superfície S — será o fluxo de potência, $\mathbb{P}_f$, dado por:

$$\boxed{\mathbb{P}_f = \oiint \mathbb{P} \cdot d\vec{A}rea}$$