

# Modelagem do UPML no Método dos Elementos Finitos no Domínio do Tempo

Marcelo de Souza, Wilson A. Artuzi Jr  
Universidade Federal do Paraná – Departamento de Engenharia Elétrica

**Resumo** – Neste trabalho o modelo da Camada Uniaxial de Absorção com Casamento Perfeito (UPML) é incluído no Método dos Elementos Finitos no Domínio do Tempo (FETD) de simulação eletromagnética. A formulação é utilizada para truncamento do domínio computacional de um guia de onda dispersivo. Diversas configurações físicas e de parâmetros são testadas, detalhes da simulação são apresentados. O desempenho do modelo proposto é comparado com o da Condição de Contorno de Absorção (ABC) mostrando-se superior em pelo menos 45dB na absorção da energia das ondas nele incidentes.

**Palavras-chave** – FETD, UPML, ABC, guia de ondas, truncamento, reflexão.

## I. INTRODUÇÃO

Uma consideração básica sobre qualquer um dos métodos de numéricos utilizados para resolver problemas de interação de ondas eletromagnéticas é que muitas geometrias de interesse são definidas em regiões “abertas” onde o domínio espacial do campo calculado é ilimitado em uma ou mais direções. Claramente, nenhum computador pode armazenar uma quantidade ilimitada de dados, e assim, o domínio computacional deve ser limitado em tamanho. O domínio computacional deve ser grande o suficiente para conter a estrutura de interesse, e uma condição de contorno adequada deve ser utilizada para simular a sua extensão ao infinito[1].

Para tais problemas, uma Condição de Contorno de Absorção (*Absorbing Boundary Condition* - ABC) deve ser introduzida na malha de contorno externa para simular sua extensão ao infinito, porém esta condição requer que as ondas incidam perpendicularmente sobre a superfície que a contém. Um modo alternativo à ABC é usar um meio material absorvente, isto é análogo ao tratamento físico utilizado nas paredes de câmaras anecóicas. Idealmente, o meio absorvente possui uma espessura de poucas arestas da malha do espaço computacional, é irreflexivo a qualquer onda incidente sobre todo seu espectro de frequência, altamente absorvente, e eficiente na região de campo próximo ou de campo distante.

Uma grande contribuição para esta área ocorreu em 1994, quando Berenger[4] introduziu um material absorvente altamente eficiente, para uso no método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (*Finite-Difference Time-Domain* – FDTD), designado Camada de Absorção com Casamento Perfeito (*Perfect Matched Layer* - PML). A inovação do método é que ondas planas com arbitrários ângulos de incidência, polarização e frequência são completamente absorvidas no contorno.

A maioria das pesquisas com relação à PMLs está ligada ao método FDTD, mas o PML já foi também utilizado no método dos Elementos Finitos no Domínio da Frequência

recentemente no método dos Elementos Finitos no Domínio do Tempo[5] (*Finite-Element Time-Domain* – FETD).

O método FETD é preferido em relação ao FDTD, pois possui resposta mais precisa e por usar uma malha não estruturada, que permite melhor aproximação de geometrias complexas.

A motivação para este trabalho é desenvolver a técnica da UPML, ou PML Uniaxial (que atua em uma única direção), baseada na formulação proposta em [2].

## II. FORMULAÇÃO TEÓRICA

### A. PML Uniaxial

A equação vetorial da onda eletromagnética para o campo elétrico num meio PML uniaxial, orientado segundo o eixo z, no domínio da frequência, é

$$s\bar{\epsilon}\vec{E} + \nabla \times [(s\bar{\mu})^{-1} \cdot \nabla \times \vec{E}] = -\vec{J} \quad (1)$$

Onde  $\vec{E}$  é a intensidade do campo elétrico,  $\vec{J}$  é a densidade de corrente de excitação,  $s\bar{\epsilon}$  e  $(s\bar{\mu})^{-1}$  são os tensores que carregam as propriedades físicas do meio, dados por

$$s\bar{\epsilon} = \begin{bmatrix} s\epsilon + \sigma & 0 & 0 \\ 0 & s\epsilon + \sigma & 0 \\ 0 & 0 & s\epsilon - \sigma + \frac{\sigma^2/\epsilon}{s+\sigma/\epsilon} \end{bmatrix} \quad (2)$$

e

$$(s\bar{\mu})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1/\mu}{s+\sigma/\epsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1/\mu}{s+\sigma/\epsilon} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1/\mu}{s} + \frac{\sigma/\epsilon\mu}{s^2} \end{bmatrix} \quad (3)$$

tal que,

$$s\bar{\epsilon} \cdot (s\bar{\mu})^{-1} = \begin{bmatrix} \epsilon/\mu & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon/\mu & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon/\mu \end{bmatrix} \quad (4)$$

Após a aplicação do método de Galerkin usando funções de aresta lineares obtém-se a equação matricial da onda

$$Av = i \quad (5)$$

onde

$$A_{kl} = \int_V [\vec{W}_k \cdot (s\vec{\varepsilon}) \cdot \vec{W}_l + \nabla \times \vec{W}_k \cdot (s\vec{\mu})^{-1} \cdot \nabla \times \vec{W}_l] dV \quad (6)$$

Assim a equação matricial da onda pode ser reorganizada segundo coeficientes matriciais independentes de  $s$  na forma,

$$[sC + G + s^{-1}K + (s + \sigma/\varepsilon)^{-1}R + s^{-2}Q]v = i \quad (7)$$

onde, C,G,K, R e Q são matrizes dadas por,

$$\begin{aligned} C_{i,j} &= \int_V \vec{W}_i \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix} \vec{W}_j dV \\ G_{i,j} &= \int_V \vec{W}_i \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix} \vec{W}_j dV \\ R_{i,j} &= \int_V \vec{W}_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2/\varepsilon \end{bmatrix} \vec{W}_j dV \\ &+ \int_V \vec{\nabla} \times \vec{W}_i \begin{bmatrix} 1/\mu & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{\nabla} \times \vec{W}_j dV \\ K_{i,j} &= \int_V \vec{\nabla} \times \vec{W}_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\mu \end{bmatrix} \vec{\nabla} \times \vec{W}_j dV \\ Q_{i,j} &= \int_V \vec{\nabla} \times \vec{W}_i \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma/\varepsilon \end{bmatrix} \vec{\nabla} \times \vec{W}_j dV \quad (8a-e) \end{aligned}$$

Para facilitar a discretização temporal da equação acima, são introduzidas as variáveis auxiliares

$$\begin{aligned} u &= sv \\ w &= s^{-1}v \\ x &= s^{-2}v \\ j &= (s + \sigma/\varepsilon)^{-1}Rv \quad (9a,b,c,d) \end{aligned}$$

A discretização temporal consiste em passar as equações para o domínio do tempo contínuo através da transformada inversa de Laplace e posteriormente aplicar os métodos numéricos de integração de Newmark-Beta na equação matricial da onda e trapezoidal nas equações auxiliares de forma a obter o conjunto de equações recursivas

$$[C + \gamma\Delta tG + \beta\Delta t^2(K + R) + \alpha\Delta t^3Q]u^n =$$

$$i^n - Gv^{n-1/2} - K\omega^n - Qx^{n+1/2} - j^n \quad (10)$$

$$\begin{aligned} v^{n+1/2} &= v^{n-1/2} + \Delta t u^n \\ w^{n+1} &= w^n + \Delta t v^{n+1/2} \\ x^{n+3/2} &= x^{n+1/2} + \Delta t w^{n+1} \\ j^{n+1} &= \frac{2\varepsilon - \sigma\Delta t}{2\varepsilon + \sigma\Delta t} j^n + \frac{2\varepsilon\Delta t}{2\varepsilon + \sigma\Delta t} R v^{n+1/2} \quad (11) \end{aligned}$$

### III. ESTRUTURA DE SIMULAÇÃO

Para validação da formulação proposta, serão realizadas simulações utilizando um guia de ondas retangular (que é dispersivo), e diversas combinações de condições a fim de verificar o desempenho da formulação.

#### A. Guia de ondas

O guia de ondas é do tipo WR112 que tem as seguintes características:

Característica	Valor
Largura ( $a$ )	28,50 mm
Altura ( $b$ )	12,62 mm
Frequência de Corte	5,259 GHz
Faixa de Frequência	7,05 – 10,00 GHz

Tab. 1 – Características de um guia de ondas WR112

Devido à simetria geométrica da estrutura, não há necessidade de se simular a estrutura completa, sendo assim foi simulada apenas um quarto da estrutura.

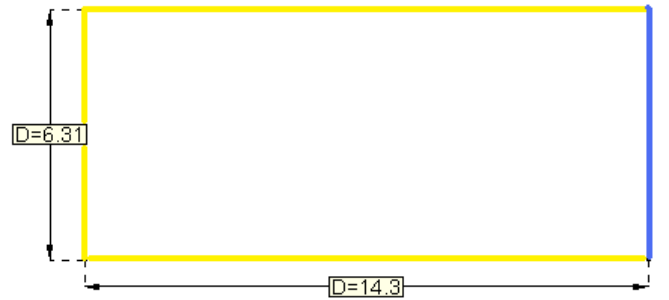


Fig. 1 – Estrutura básica

A estrutura simulada possui 120 [mm] de comprimento. A Fig. 1 mostra a estrutura simulada, foi utilizado o material PEC (condutor elétrico perfeito) em lugar de metal, pois isso se aproxima muito da condição real. Na superfície inferior, foi atribuído PEC, pois, no modo de propagação TE<sub>10</sub> (de interesse) o campo elétrico é normal a esta superfície. Já na superfície lateral direita, foi atribuído PMC (condutor magnético perfeito), pois, o campo magnético é normal a ela neste modo.

#### B. Fonte de Excitação

Como fonte de excitação da estrutura foi utilizado um pulso de corrente, cosseno levantado, com duração de 1,5ns modulando uma portadora com frequência de 10GHz, como mostrado na Fig. 2.

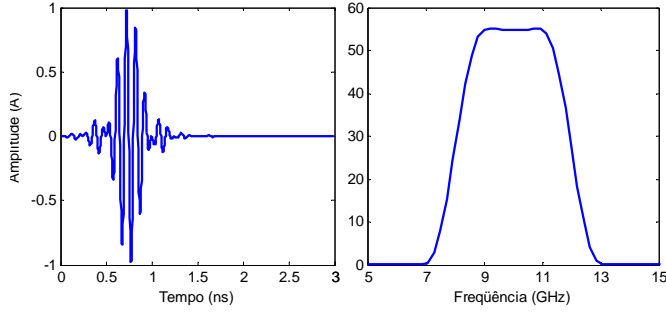


Fig. 2 - Fonte de excitação no tempo e na frequência

### C. Medição do campo

O campo foi medido através de dois planos distantes 3mm um do outro e 18mm fonte, como mostrado na Fig. 3. Sendo assim, é possível se conhecer o campo em cada um dos triângulos utilizados para discretizar os planos.

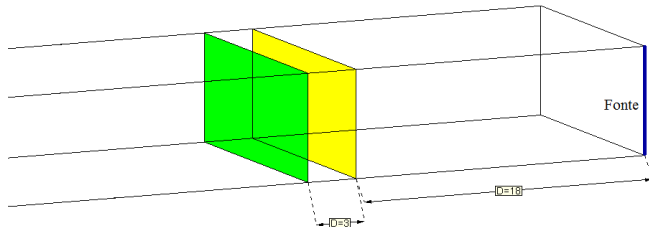


Fig. 3 - Planos de medição

### D. Eliminação de modos indesejados

A fim de medir somente o modo  $TE_{10}$  e eliminar os demais modos de propagação presentes no guia de onda foi realizada a multiplicação do campo pelo formato teórico do campo no modo  $TE_{10}$  e sua posterior integração em todos os triângulos do plano de medida. Isso leva a dois valores de campo aqui chamados de  $E_1$  e  $E_2$  que foram utilizados na obtenção do coeficiente de reflexão.

### E. Cálculo do coeficiente de reflexão

Do estudo das linhas de transmissão, o coeficiente de reflexão, pode ser dado por,

$$\Gamma = \frac{V_r}{V_i} \quad (12)$$

onde,  $V_i$  é a tensão da onda incidente e  $V_r$  é a tensão da onda refletida.

Também se pode definir que as tensões  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$  se relacionam com  $V_i$  e  $V_r$  através de,

$$\begin{aligned} V_1 &= V_i e^{\gamma z} + V_r e^{-\gamma z} \\ V_2 &= V_i + V_r \\ V_3 &= V_i e^{-\gamma z} + V_r e^{\gamma z} \end{aligned} \quad (13a,b,c)$$

com referência a  $V_2$ .

Resolvendo o sistema de equações encontra-se que o coeficiente de reflexão também pode ser encontrado por,

$$\Gamma = \frac{e^{\gamma z} \frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_1}{V_2} - e^{-\gamma z}} \quad (14)$$

onde  $\gamma$  é dado por,

$$\gamma = j \sqrt{\left(k_0^2 + \left(\frac{\pi}{a}\right)^2\right)} \quad (15)$$

Neste trabalho  $V_1$  e  $V_2$  são dados por  $E_1$  e  $E_2$ , campos do modo  $TE_{10}$ .

### F. Coeficiente de reflexão teórico

Segundo [1], a reflexão teórica do PML discreto, onde cada camada possui uma condutividade, que é constante dentro da mesma, e que a variação ocorre de camada para camada, é dado pela seguinte equação

$$R(\theta) = e^{-2\eta\sigma_{m\acute{a}x}d\frac{\cos(\theta)}{m+1}} \quad (16)$$

Onde  $\theta$  é o ângulo de incidência da onda,  $\eta$  é a impedância característica da onda,  $\sigma_{m\acute{a}x}$  é a condutividade máxima do PML,  $d$  é o comprimento total do PML e  $m$  é o grau do polinômio.

## IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

As figuras a seguir mostram o módulo do coeficiente de reflexão em decibéis o qual é dado por

$$\Gamma_{dB} = 20 \cdot \log(|\Gamma|) \quad (17)$$

### A. Refinamento da malha de discretização

Segundo [1] na discretização espacial da estrutura, o comprimento médio das arestas dos tetraedros deve ser de cerca de um décimo do menor comprimento de onda considerado na simulação, ou

$$L_{méd} = \frac{1}{10f_{m\acute{a}x}\sqrt{\mu_0\mu_r\epsilon_0\epsilon_r}} \quad (18)$$

onde  $f_{m\acute{a}x}$  é a frequência máxima de interesse, segundo este critério, o  $L_{méd}$  para o caso de estudo, é de aproximadamente 2,5mm. Sendo assim, foram realizadas simulações com diversos valores para  $L_{méd}$ , mantendo-se constantes os demais parâmetros:

$$\begin{aligned} N = 16 & : \text{número de camadas} \\ m = 3 & : \text{grau do polinômio de gradação da condutividade} \\ \sigma_{m\acute{a}x} = \frac{1}{3\eta} & : \text{condutividade máxima,} \end{aligned}$$

o resultado é apresentado na fig. 4.

Como era de se esperar, o resultado mostra que a precisão da simulação aumenta com o refinamento da malha, assim como o tempo de simulação. Portanto, o comprimento médio de aresta que foi utilizado no decorrer do trabalho foi o de 1mm devido a essa melhora na resposta da simulação.

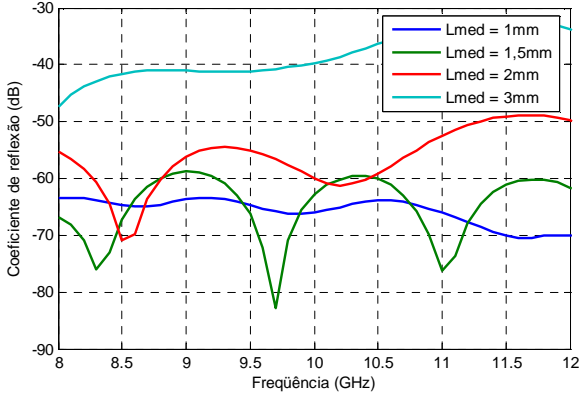


Fig. 4 – Efeito do refinamento da malha na simulação, com  $N = 16$ ,  $m = 3$ ,  $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{1}{3\eta}$

### B. Gradação da condutividade

Segundo [1], a condutividade do PML deve variar desde zero em  $x = 0$ , na superfície do PML, até  $\sigma_{m\acute{a}x}$  em  $x = d$ , o fim do PML e do guia de onda. A variação da condutividade deve ser gradativa, variando de camada para camada, neste trabalho foi utilizada a gradação polinomial dada por (19) e os resultados obtidos com a variação do grau do polinômio ( $m$ ) podem ser vistas na Fig. 5.

$$\sigma(x) = \left(\frac{x}{d}\right)^m \sigma_{m\acute{a}x} \quad (19)$$

Esta gradação tem como finalidade reduzir as reflexões numéricas que ocorrem quando a onda passa de um meio para outro, ajudando no desempenho global do PML.

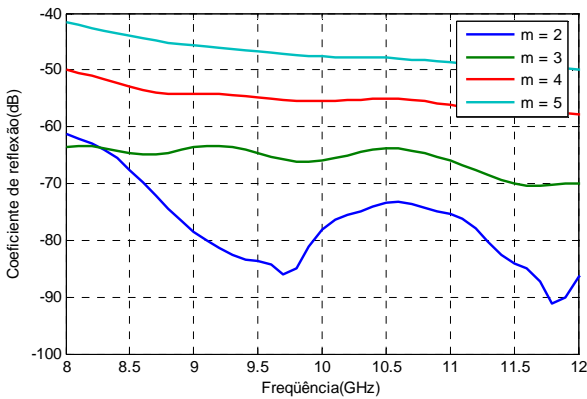


Fig. 5 – Variação do grau do polinômio na gradação da condutividade, com  $N = 16$ ,  $\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{1}{3\eta}$ ,  $L_{m\acute{e}d} = 1$  mm.

Na Fig. 5 pode-se observar que a resposta é melhor para graus menores do polinômio. Porém para o decorrer do trabalho foi utilizada a gradação com  $m = 3$ , pois esta apresenta a melhor relação entre planicidade e atenuação das reflexões, dentre as combinações testadas.

### C. Condutividade máxima

Segundo [1], a condutividade máxima ótima é dada por,

$$\sigma_{opt} = \frac{0,8(m+1)}{\Delta\eta} \quad (20)$$

Onde  $m$  é o grau do polinômio de gradação,  $\eta$  é a impedância da onda no vácuo e  $\Delta$  é o incremento de espaço. Para  $m = 3$  a condutividade é de

$$\sigma_{opt} = 0,0028 \text{ U/mm} \quad (21)$$

Porém, a aplicação de  $0,0028 \text{ U/mm}$  como condutividade máxima na estrutura causa instabilidade na simulação, fazendo-a divergir. Sendo assim, outros valores de condutividade foram testados a fim de se encontrar melhores opções.

A

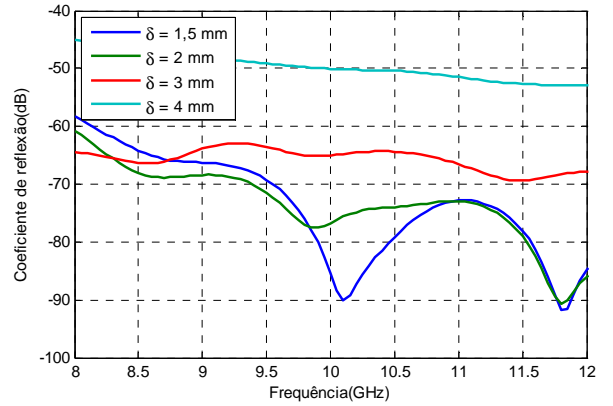


Fig. 6 mostra os resultados dos testes de variação da condutividade máxima, onde esta é dada por,

$$\sigma_{m\acute{a}x} = \frac{1}{\eta \cdot \delta} \quad (22)$$

Onde  $\eta$  é a impedância característica da onda e  $\delta$  é o coeficiente utilizado para variação que tem dimensão em mm e não tem significado físico.

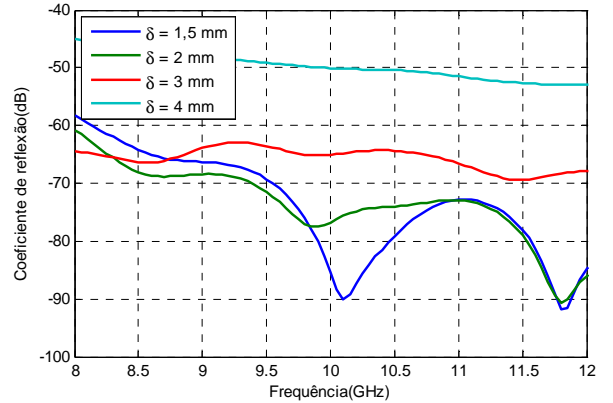


Fig. 6 – Desempenho com a variação da condutividade máxima ( $\sigma_{m\acute{a}x}$ ) na distribuição, com  $N = 16$ ,  $m = 3$ ,  $L_{m\acute{e}d} = 1$  mm.

A Tab. 2 mostra a comparação entre os coeficientes de reflexão teóricos e simulados para ondas com incidência normal ao PML.

$\delta$	Teórico	Simulado (aprox.)
1,5	-138 dB	-90 dB
2	-104 dB	-78 dB
3	-69 dB	-69 dB
4	-52 dB	-53 dB

**Tab. 2 – Comparação entre os coeficientes de reflexão teóricos e simulados para a incidência normal com a variação da condutividade máxima**

Nota-se que para valores maiores de condutividade ( $\delta$  menor) a diferença entre o teórico e o simulado aumenta, muito devido à precisão usada nos cálculos, já que segundo [5], devem-se utilizar palavras com precisão Cray.

#### D. Número de camadas

A Fig. 7 mostra o desempenho do UPML em absorver a onda incidente ao se variar o seu número de camadas utilizadas. Observa-se que aumentar o número de camadas não melhora tanto a performance, ao passo que torna a simulação mais lenta e o desenho da estrutura mais trabalhoso.

A figura mostra também o desempenho do ABC para a mesma estrutura, percebe-se que mesmo o PML com 8 camadas apresenta absorção muito superior das ondas incidentes. Para o PML com 16 camadas a atenuação chega a 45dB a mais que o ABC.

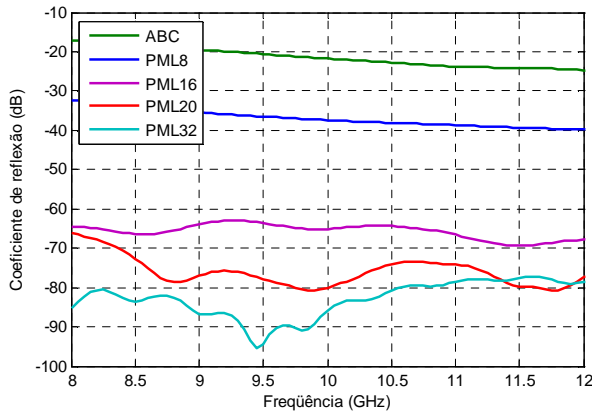


Fig. 7 – Efeito do número de camadas no desempenho do PML, com  $m = 3$ ,  $\sigma_{\max} = \frac{1}{3\eta}$ ,  $L_{\text{med}} = 1$  mm comparativo com o ABC.

#### E. O parâmetro $\alpha$

Em (10) foi introduzido o termo  $\alpha \Delta t^3 Q$  na formulação original de [2], e foram realizadas simulações com diversos valores do parâmetro  $\alpha$  a fim de avaliar o efeito da nova parcela no modelo. A variação do parâmetro mostrou-se praticamente sem efeito para  $2 \geq \alpha \geq \frac{1}{16}$ .

### V. CONCLUSÃO

Uma modelagem do PML uniaxial no Método dos Elementos Finitos no Domínio do tempo foi apresentada neste trabalho.

Foram apresentados resultados numéricos mostrando o desempenho da formulação em diversas configurações, número de camadas, valor máximo de condutividade, gradação da condutividade e refinamento da discretização espacial.

O método apresentou instabilidade numérica ao se aumentar os valores da condutividade utilizados.

A comparação de desempenho entre o ABC e o UPML, mostrou a superioridade do método aqui apresentado, que superou o outro em pelo menos 45dB na capacidade de absorver a energia da onda incidente. Isso mostra o sucesso da formulação no truncamento de guias de onda dispersivos como o aqui utilizado.

### VI. REFERÊNCIAS

- [1] TAFLOVE, A. "Computational electrodynamics: the finite-difference time-domain method", 2a. ed., Artech House, 2000. pp. 235 e 285
- [2] ARTUZI, W. A. JR., "Improving the Newmark time integration scheme in finite element time domain methods" - IEEE Transactions on Microwave and Wireless Components Letters, vol. 15, pp. 898-900, December 2005.
- [3] ARTUZI, W. A. JR., "An unconditionally stable FETD method using tetrahedral cells" - Universidade Federal do Paraná - IMOC/SBMO, 2004.
- [4] BERENGER, J. P., "A perfect matched layer for the absorption of electromagnetic waves", J. Computational Physics, Vol. 114, 1994, pp. 185-200.
- [5] ABENIUS, E.; EDELVIK, F.; JOHANSSON, C.: "Waveguide Truncation Using UPML in the Finite-Element Time-Domain Method". Technical Report 2005-026, Department of Information Technology, Uppsala University, Sweden (2005), [http://www.it.uu.se/research/publications/reports/2005-026/\(02-2008\)](http://www.it.uu.se/research/publications/reports/2005-026/(02-2008))
- [6] REUTER, C. E., R. M. JOSEPH, E. T. THIELE, D. S. KATZ, A TAFLOVE, "Ultrawideband absorbing boundary condition for termination of waveguiding structures in FDTD simulations," IEEE Microwave and Guided Wave Letters, Vol. 10, 1995, pp. 319-323
- [7] VERÁSTEGUI, T. M. N., ARTUZI, W. A. JR., "Simulação Eletrodinâmica da Propagação de Modos entre Planos de Referência em Placas de Circuito Impresso", Departamento de Engenharia Elétrica UFPR, MOMAG, 2006