

Modelagem de Chaves Eletrônicas Rápidas no Método dos Elementos Finitos no Domínio do Tempo

Ismael Chiamenti e Wilson A. Artuzi Jr.
Universidade Federal do Paraná – Departamento de Engenharia Elétrica

Resumo — Neste trabalho o modelo de uma chave eletrônica caracterizada por um pólo é incluído no método de análise eletromagnética FETD (*Finite Element Time Domain*). Duas formas de inclusão são feitas: a primeira através do método da convolução e a segunda pelo método da equação auxiliar associada à técnica de estabilidade de Newmark. Em condições de baixa condutância e indutância o método da convolução apresentou instabilidade, enquanto o método da equação auxiliar manteve-se estável, como comprovam os experimentos numéricos.

Palavras-chaves — Elementos Finitos no Domínio do Tempo, chave eletrônica rápida, técnica de estabilidade de Newmark.

I. INTRODUÇÃO

O uso do método dos elementos finitos no domínio do tempo (FETD) como técnica de solução numérica das equações de Maxwell demonstra ser uma poderosa ferramenta para prever e analisar fenômenos em dispositivos que envolvem a propagação de ondas eletromagnéticas. Pesquisas no campo das comunicações em faixa ultra larga (UWB) requerem o uso de geradores impulsivos nos quais chaves eletrônicas rápidas interagem com linhas de transmissão [1]. Assim, com o objetivo de prever o comportamento de chaves eletrônicas em linhas de transmissão, serão comparados os resultados entre duas formas de inserir na equação vetorial da onda para o campo elétrico o modelo que caracteriza uma chave eletrônica. A primeira forma de inclusão é feita pelo método da convolução e a segunda pelo método da equação auxiliar [2] associada à técnica de estabilidade de Newmark [3]. Estes métodos foram analisados com o objetivo de verificar a estabilidade e precisão do método FETD operando em altas frequências e com baixas indutâncias nos diferentes estados de operação da chave eletrônica. Próximo do estado fechado da chave (baixa resistência), ambos apresentaram desempenho equivalente, entretanto, próximo do estado oposto (alta resistência), o primeiro método apresentou instabilidade numérica enquanto que o segundo permaneceu estável, como será mostrado através de experimentos numéricos.

II. FORMULAÇÃO TEÓRICA

A equação vetorial na forma integral para o campo elétrico [4] pode ser escrita como:

I. Chiamenti, ismaelcapanema@ig.com.br, estudante de mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, UFPR, bolsista CAPES.
W. A. Artuzi Jr., artuzi@eletrica.ufpr.br.

$$\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \sigma \vec{E} + \nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \int_0^t \vec{E} dt = -\vec{J} \quad (1)$$

onde \vec{E} é a intensidade do campo elétrico, \vec{J} é a densidade de corrente de excitação e ϵ , σ e μ são a permissividade elétrica, a condutividade elétrica e a permeabilidade magnética, respectivamente.

A. Discretização Espacial

A discretização espacial da equação vetorial da onda obedece à expansão convencional para um campo elétrico dentro de um elemento finito [5] como:

$$\vec{E} = -\sum v_{ij} \vec{W}_{ij} \quad (2)$$

onde W_{ij} são as funções de base associadas a aresta que une os vértices i e j . O escalar dependente do tempo v_{ij} são as tensões ao longo da correspondente aresta [5]. A aplicação do procedimento de Galerkin permite que (1) seja calculada como uma equação matricial de um circuito elétrico:

$$C \frac{d}{dt} v + G v + K \int_0^t v dt = i \quad (3)$$

onde v e i são vetores que contém as tensões e correntes associadas com as arestas do elemento e C , G e K são matrizes cujos elementos são dados por:

$$C_{ij,kl} = \int_V \epsilon \vec{W}_{ij} \cdot \vec{W}_{kl} dV \quad (4)$$

$$G_{ij,kl} = \int_V \sigma \vec{W}_{ij} \cdot \vec{W}_{kl} dV + \oint_S \frac{1}{\sigma_s} \hat{n} \times \vec{W}_{ij} \cdot \hat{n} \times \vec{W}_{kl} dS \quad (5)$$

$$K_{ij,kl} = \int_V \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{W}_{ij} \cdot \nabla \times \vec{W}_{kl} dV \quad (6)$$

sendo V o volume do elemento, S é a superfície de contorno do elemento, \hat{n} é o vetor unitário normal ao elemento e σ_s é a condutividade superficial da superfície de contorno. A equação global da onda é formada pela superposição dos elementos das matrizes C , G e K que tem todas as posições das arestas submetidas a um procedimento de numeração global [6].

B. Discretização Temporal

Uma vez que a equação de onda matricial foi obtida, ela precisa ser resolvida para as tensões dependentes do tempo v como resposta da corrente de excitação i . O método de Newmark é facilmente associado se (3) é reescrita como:

$$C \frac{d^2}{dt^2} w + G \frac{d}{dt} w + K w = i \quad \text{com} \quad w = \int_0^t v dt. \quad (7)$$

Desta forma, a discretização temporal de Newmark é obtida por diferenças finitas centradas e uma média ponderada [7], [8] como:

$$C \frac{w_{n+1} - 2w_n + w_{n-1}}{\Delta t^2} + G \frac{w_{n+1} - w_{n-1}}{2\Delta t} + K \frac{w_{n+1} + 2w_n + w_{n-1}}{4} = i_n \quad (8)$$

onde Δt é o passo do tempo e o índice n representa o instante de tempo $t = n\Delta t$. A equação (8) pode ser reorganizada como o seguinte conjunto de equações recursivas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(C + \frac{\Delta t}{2} G + \frac{\Delta t^2}{4} K \right) u_n = (i_n - Gv_{n-1/2} - Kw_n) \end{array} \right. \quad (9)$$

$$v_{n+1/2} = v_{n-1/2} + \Delta t u_n \quad (10)$$

$$w_{n+1} = w_n + \Delta t v_{n+1/2} \quad (11)$$

Como as matrizes C , G e K são reais, simétricas e esparsas, o método do gradiente conjugado [9] é um método apropriado para achar u_n em (9) tendo suposto inicialmente um vetor nulo. O vetor de tensão desejado $v_{n+1/2}$ é calculado por (10).

A inclusão do modelo da chave eletrônica realizou-se de forma a não interferir eletromagneticamente no restante da estrutura em análise.

C. Modelo da Chave Eletrônica

Uma chave eletrônica pode ser modelada por um circuito de um pólo, contendo um resistor em série com um indutor [10]. Através do resistor é possível determinar os diferentes valores da resistência da chave nas condições aberta, fechada e em estados intermediários entre aberta e fechada. O indutor caracteriza a indutância existente devido à variação da corrente durante as mudanças de estado da chave. A Fig. 1 mostra circuito que modela a chave eletrônica.

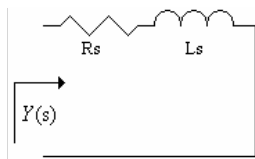


Fig. 1. Chave eletrônica modelada por um circuito de um pólo.

No domínio da frequência complexa a admitância equivalente do resistor em série com um indutor é:

$$Y(s) = \frac{1}{sL_s + R_s} = \frac{1/L_s}{s + R_s/L_s} = \frac{r}{s - p} \quad (12)$$

onde $s = j\omega$ é a frequência complexa.

A chave pode ser representada pelo pólo $p = -R_s/L_s$ e pelo resíduo $r = 1/L_s$. Usando a transformada inversa de Laplace obtém-se a admitância equivalente da chave no domínio do tempo, dada por:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{r}{s - p} \right] = re^{pt} \quad (13)$$

D. Método da Convolução

Neste método a inclusão do modelo da chave eletrônica, representado por (13), é realizada através de uma convolução no domínio do tempo de (13) com v . Assim (3) assume a forma:

$$C \frac{d}{dt} v + G v + y(t) * v + K \int_0^t v dt = i. \quad (14)$$

Utilizando a definição de convolução tem-se:

$$j(t) = y(t) * v(t) = \int_0^t v(t - \tau) y(\tau) d\tau \quad (15)$$

assumindo que a discretização temporal se dá em intervalos regulares Δt e que a variação de v é linear dentro de um intervalo, a convolução pode ser aproximada pelo somatório [1]:

$$j_{n+1} = \sum_{m=0}^n \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} \{v_{n-m-1/2} + u_{n-m} [(m+1)\Delta t - \tau]\} r e^{p\tau} d\tau \quad (16)$$

onde o termo $v(t-\tau)$ foi aproximado pela equação de uma reta com $t = n\Delta t$ e $m\Delta t \leq \tau \leq (m+1)\Delta t$. Resolvendo-se a integral de (16) tem-se:

$$j_{n+1} = r\Delta t \sum_{m=0}^n \left[\frac{e^{pt} - 1}{p\Delta t} v_{n-m-1/2} + \frac{e^{pt} - p\Delta t - 1}{(p\Delta t)^2} \Delta t u_{n-m} \right] e^{mp\Delta t} \quad (17)$$

cujo somatório pode ser eliminado através da forma recursiva, ficando:

$$j_{n+1} = r\Delta t \left[\frac{e^{pt} - 1}{p\Delta t} v_{n-1/2} + \frac{e^{pt} - p\Delta t - 1}{(p\Delta t)^2} \Delta t u_n \right] + e^{p\Delta t} j_n. \quad (18)$$

Juntando esta expressão ao conjunto (9), (10) e (11) obtém-se o arranjo:

III. ESTRUTURA DE SIMULAÇÃO

A. Linha de Transmissão

Para a análise dos dois métodos foi modelada uma linha de transmissão *stripline* com uma impedância característica $Z_C = 50\Omega$. A simetria da linha *stripline* auxilia a implementação e não apresenta dispersão já que é construída com material homogêneo. Devido a sua simetria, modelou-se apenas um quarto da estrutura da linha *stripline*. Ela consiste de uma fita condutora com 1mm de largura situada simetricamente entre dois planos de terra separados por 1,4 mm, e o espaço entre os mesmos é preenchido com um dielétrico homogêneo com permissividade elétrica relativa $\epsilon_r = 2,2$ e a permeabilidade magnética relativa $\mu_r = 1$.

A fita condutora e os planos de terra foram definidos como sendo constituídos de material perfeitamente condutor, sendo modeladas em (5) com $\sigma_S = 10^6$ S.

B. Fonte de Excitação e Casamento de Impedâncias

Um pulso de corrente foi usado como fonte de excitação do circuito colocada em uma das extremidades da *stripline*, com duração de 0,15ns. A frequência máxima do pulso é de aproximadamente 20 GHz.

Foi conectada uma resistência concentrada de 50Ω em paralelo com a fonte de corrente de excitação e uma carga, também de 50Ω , na extremidade oposta à da fonte com o objetivo de manter a rede casada.

C. Posição da Chave Eletrônica

A chave eletrônica foi alocada numa fenda de 0,1mm no meio da linha *stripline* à distância de 2 mm tanto da fonte como da carga. Foram usados dois valores para a indutância da chave $L_S = 1$ nH e 0,1 nH e para cada valor de indutância foram utilizados os valores $R_S = 0\Omega, 50\Omega, 150\Omega, 500\Omega$ e $10k\Omega$. O primeiro valor de R_S simulou o estado fechado da chave e o último o estado aberto, os outros valores simularam estados intermediários entre os dois citados.

D. Parâmetros de Transmissão S_{21}

Na comparação dos métodos o interesse esteve na onda que é transmitida depois da chave e na onda que incidente nela, ou seja, o coeficiente de transmissão direto S_{21} . Tal situação é mostrada na Fig. 3.

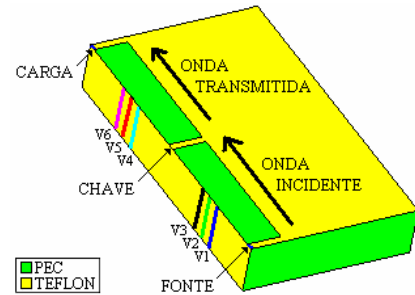


Fig. 3. Ondas incidente e transmitida segundo a posição da chave.

$$\left\{ \begin{aligned} \left(C + \frac{\Delta t}{2}G + \frac{\Delta t^2}{4}K + \frac{e^{p\Delta t} - p\Delta t - 1}{p^2}r \right) u_n &= \\ &= \left(i_n - Gv_{n-1/2} - Kw_n - \frac{e^{p\Delta t} - 1}{p}rv_{n-1/2} - e^{p\Delta t}j_n \right) \end{aligned} \right. \quad (19)$$

$$v_{n+1/2} = v_{n-1/2} + \Delta tu_n \quad (20)$$

$$w_{n+1} = w_n + \Delta tv_{n+1/2} \quad (21)$$

$$j_{n+1} = r\Delta t \left[\frac{e^{p\Delta t} - 1}{p\Delta t}v_{n-1/2} + \frac{e^{p\Delta t} - p\Delta t - 1}{(p\Delta t)^2}\Delta tu_n \right] + e^{p\Delta t}j_n \quad (22)$$

E. Método da Equação Auxiliar

Passando (14) para o domínio da frequência complexa, tem-se:

$$\left(sC + G + \frac{1}{s}K + \frac{r}{s-p} \right) v = i. \quad (23)$$

Em (24), considerando a fração, cujo pólo é p , como uma nova variável, introduz-se a equação auxiliar:

$$j = \frac{r}{s-p}v = r\frac{v}{s} + p\frac{j}{s} \quad (24)$$

Organizando este sistema de equações formado a partir de (23) e (24) tem-se:

$$\left(sC + G + \frac{1}{s}(K+r) \right) v = i - p\frac{j}{s} \quad (25)$$

$$\left(\frac{s}{p} - 1 \right) p\frac{j}{s} = r\frac{v}{s} \quad (26)$$

As seguintes mudanças de variável são feitas para a discretização temporal de (25) e (26):

$$u = sv, \quad w = \frac{v}{s} \quad e \quad k = \frac{pj}{s}. \quad (27)$$

Por analogia ao método de estabilidade de Newmark [2] e reescrevendo (25), (26) e (27) na forma recursiva tem-se:

$$\left(C + \frac{\Delta t}{2}G + \frac{\Delta t^2}{4}(K+r) \right) u_n = (i_n - Gv_{n-1/2} - (K+r)w_n - k_n) \quad (28)$$

$$v_{n+1/2} = v_{n-1/2} + \Delta tu_n \quad (29)$$

$$w_{n+1} = w_n + \Delta tv_{n+1/2} \quad (30)$$

$$k_{n+1} = \frac{2+p\Delta t}{2-p\Delta t}k_n + \frac{2p\Delta t}{2-p\Delta t}r\left(\frac{w_{n+1} + w_n}{2} \right) \quad (31)$$

Gerou-se um sinal a partir da fonte representado na Fig. 3 pela onda incidente e teve-se conseqüentemente uma onda transmitida. Para se obter as amplitudes das ondas incidente e transmitida, foram tomadas seis amostras de tensão ao longo do tempo, as quais foram passadas para o domínio da frequência complexa através da transformada discreta de Fourier. As amostras de tensão V2 e V5 coincidem com os centros das linhas de transmissão entre a fonte e a chave e a chave e a carga. As distâncias entre V1, V2 e V3 é de 0,2mm, V4, V5 e V6 também tem a mesma distância um do outro. A constante de propagação γ é calculada por [11]:

$$\gamma = -\frac{1}{d} \operatorname{arccosh} \frac{V_3 + V_1}{2V_2}. \quad (32)$$

onde $d = 0,2\text{mm}$ é a distância entre as amostras de tensão.

O parâmetro de transmissão desejado S_{21} é obtido por:

$$S_{21} = \frac{V_4 - V_6 e^{2\gamma d}}{V_1 - V_3 e^{2\gamma d}}. \quad (33)$$

E. Circuito Equivalente

Com (33) compararam-se os coeficientes de transmissão obtidos pelos métodos da convolução e da equação auxiliar com uma curva de referência formada a partir de um circuito equivalente com parâmetros concentrados que simulou as condições de modelamento da chave operando na linha *stripline*, conforme mostra a Fig. 4.

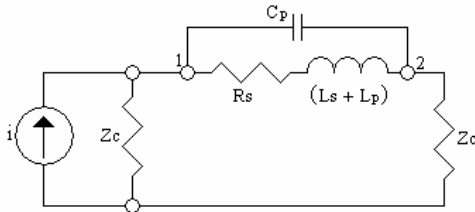


Fig. 4. Circuito equivalente da chave modelada na linha *stripline*.

O coeficiente de transmissão da chave do circuito entre os terminais 1 e 2 mostrado na Fig. 4 é descrito por:

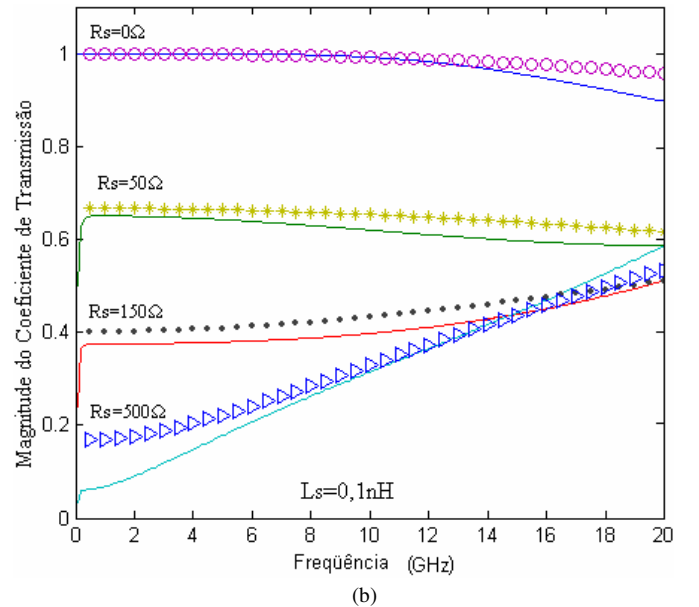
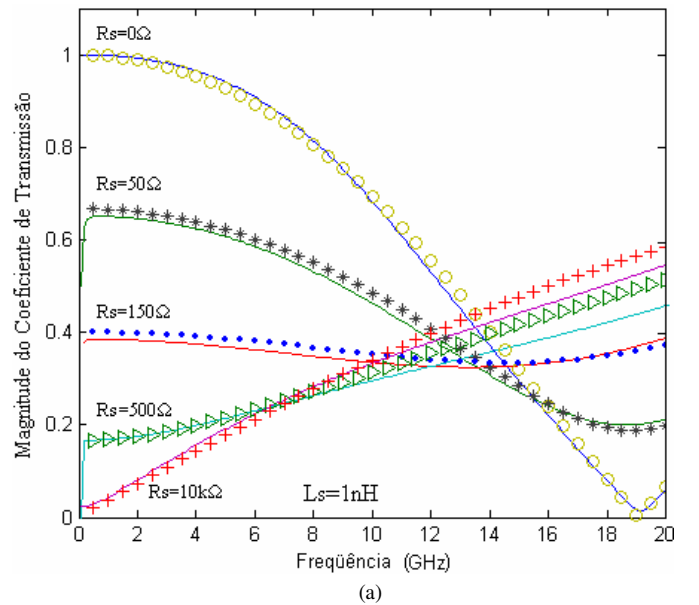
$$S_{21} = \frac{2Z_C}{2Z_C + \frac{s(L_S + L_P)}{s^2(L_S + L_P)C_P + sR_S C_P + 1}} \quad (34)$$

onde L_p e C_p são as indutâncias e capacitâncias parasitas, respectivamente, Z_C é a impedância característica da linha, R_S e L_S são a resistência e a indutância, respectivamente, que simularam a chave. A descontinuidade da fita condutora existente onde foi incluída a chave eletrônica é a responsável pelo surgimento da capacitância parasita C_p . Além disso, a corrente do pulso de excitação tende a percorrer as bordas da fita condutora, logo, ao chegar na chave eletrônica ela sofre uma mudança brusca na direção que é caracterizada pela indutância parasita L_p .

Os valores das capacitâncias e indutâncias parasitas adicionadas no circuito equivalente foram extraídas a partir de ajustes para fazer coincidir a curva do coeficiente de transmissão calculada pelo circuito equivalente com a curva obtida através de (33). O valor da capacitância parasita foi ajustado considerando-se o caso simulado com $R_S = 10\text{k}\Omega$ e $L_S = 1\text{ nH}$, fornecendo um valor de $C_p = 58\text{ fF}$. O valor da indutância parasita foi ajustado considerando-se o caso simulado com $R_S = 0\Omega$ e $L_S = 1\text{ nH}$, com a capacitância parasita obtida anteriormente, fornecendo um valor de $L_p = 0,2\text{ nH}$. Estes valores foram mantidos constantes em todos os resultados da seção seguinte.

IV. RESULTADOS NUMÉRICOS

A Fig. 4 mostra os resultados da comparação entre os dois métodos através de (33) com o circuito equivalente descrito por (34).



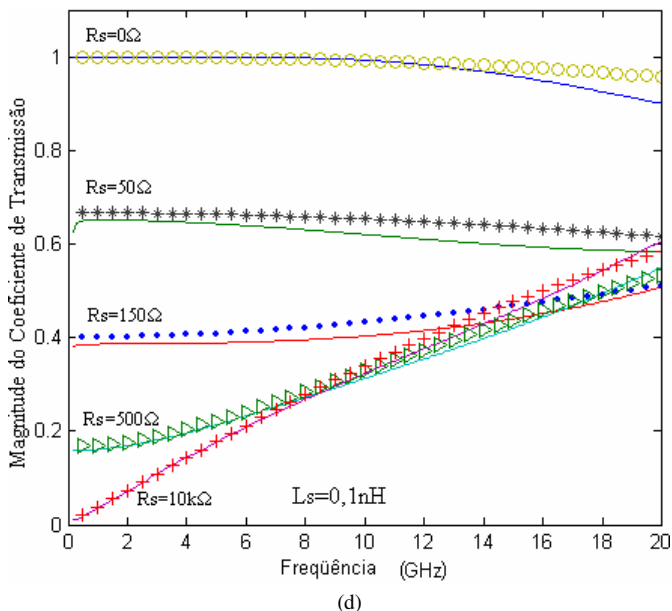
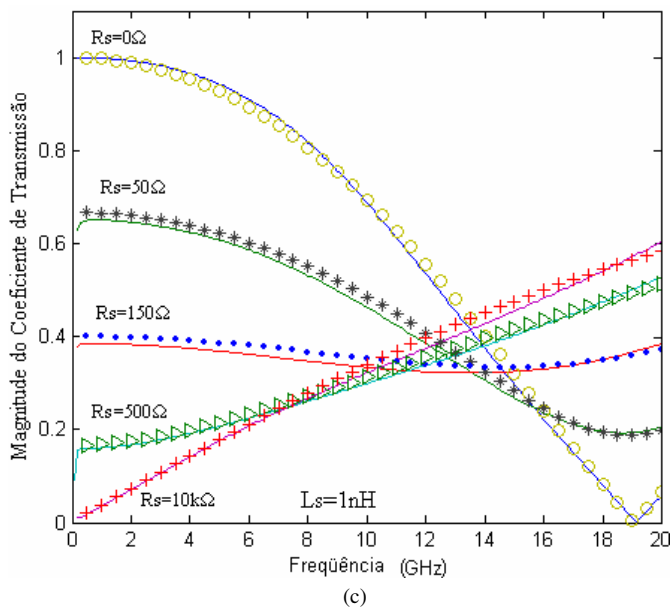


Fig. 4. Magnitude do coeficiente de transmissão direto S_{21} (ganho) em função da frequência para o: (a) método da convolução com $L_S=1nH$, (b) método da convolução com $L_S=0,1nH$, (c) método da equação auxiliar associada a técnica de estabilidade de Newmark com $L_S =1nH$, (d) método da equação auxiliar associada a técnica de estabilidade de Newmark com $L_S =0,1nH$.

As Figs. 4 (a) e (b) mostram a magnitude do coeficiente de transmissão S_{21} em função da frequência para o método da convolução para indutâncias da chave eletrônica de $L_S=1nH$ e $L_S=0,1nH$, respectivamente.

As Figs. 4 (c) e (d) mostram as magnitudes do coeficiente de transmissão S_{21} em função da frequência para o método da equação auxiliar para os mesmos valores.

Na Fig. 4 (b) houve uma instabilidade do método da convolução para o valor de $R_S=10k\Omega$ (estado fechado), não sendo possível a obtenção da curva.

Percebe-se que o método da convolução apresenta um aumento gradual de divergência com a diminuição do valor da indutância e o aumento do valor da resistência, os quais caracterizam chaves rápidas. Esse comportamento é confirmado por outros autores e sua causa é ainda pesquisada [12]. Felizmente, tal comportamento indesejável não foi observado no método da equação auxiliar.

V. CONCLUSÃO

Duas formas de inclusão do modelo de uma chave eletrônica no método FETD foram apresentadas neste trabalho. Um método realizou a inclusão através da convolução no tempo, enquanto o outro apresentou uma forma mais simples de implementação, realizada pelo método da equação auxiliar associada à técnica de estabilidade de Newmark.

A estabilidade e a precisão desses dois métodos foram analisadas através de suas aplicações em simulações de diferentes estados de operação de uma chave eletrônica.

O método da convolução apresentou instabilidade numérica à medida que os valores de indutância e condutância diminuam.

O método da equação auxiliar associada a técnica de estabilidade de Newmark, entretanto, mostrou-se adequado à modelagem de chaves eletrônicas rápidas para a aplicação em sistemas UWB.

REFERÊNCIAS

- [1] J. Han and C. Nguyen, "Coupled-Slotline-Hybrid Sampling Mixer Integrated With Step-Recovery-Diode Pulse Generator for UWB Applications" *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 53, pp.1875-1882, Jun. 2005.
- [2] TAFLOVE, A. and HAQUESS, S. C., "Computational Electrodynamics, The Finite Difference Time Domain Method". Artech House.
- [3] W. A. ARTUZI JR., "An unconditionally stable FETD method using tetrahedral cells", Departamento de Engenharia Elétrica UFPR, pp. 1-3.
- [4] W. A. ARTUZI JR., "Improving the Newmark time integration scheme in finite element time domain methods", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, pp.898-900, Nov 2005.
- [5] J. P. Webb, "Edge elements and what they can do for you", *IEEE Trans. Magn.*, vol. 29, no. 3, pp. 1460-1465, Mar. 1993.
- [6] TAFLOVE, A. and BRODWIN, M. E., "Numerical Solutions of steady-state electromagnetic scattering problems using the time-dependent Maxwell's equations" *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-23, pp. 623-630, Ago. 1975.
- [7] D. K. Sun, J. F. Lee, and Z. Cendes, "The transfinite-element time-domain method", *IEEE Trans. Microw. Theory Tech.*, vol. 51, no. 10, pp. 2097-2105, Oct. 2003.
- [8] S. D. Gedney and U. Navsariwala, "An unconditionally stable finite element time-domain solution of the vector wave equation", *IEEE Microw. Guided Wave Lett.*, vol. 5, no. 10, pp. 332-334, Oct. 1995.
- [9] G. Kuo-Petravic and M. Petravic, "A program generator for incomplete Cholesky conjugate gradient (ICCG) method with a symmetrizing preprocessor", *Comput. Phys. Commun.*, vol. 22, pp. 33-48, Feb./Mar. 1981.
- [10] I. Bahl and P. Bhartia, *Microwave Solid State Circuit Design*. New York: Wiley, 1998.
- [11] W. A. ARTUZI JR., "Scattering Parameter Calculation by FDTD Method Using imperfect Absorbing Boundary Conditions", *CB MAG* 96, pp. 35-38, Nov. 1996.
- [12] D. J. Riley and N. W. Riley, "First Order Models for Thin-Material Sheets and Coatings in the Finite-Element Time Domain Method", Northrop Grumman Mission Systems.