

TE053-Ondas Eletromagnéticas

CÁLCULO VETORIAL E NÚMEROS COMPLEXOS

PROF. CÉSAR AUGUSTO DARTORA - UFPR

E-MAIL: CADARTORA@ELETRICA.UFPR.BR

CURITIBA-PR

Roteiro da Aula:

- Noções gerais e notação
- Gradiente, Divergente e Rotacional
- Teoremas de Gauss e Stokes
- Algumas Identidades Vetoriais
- Números Complexos, Vetores Complexos

Noções Gerais e Notação

- **Grandeza Escalar:**

Representada na forma $f(x, y, z, t)$ ou $\phi(x, y, z, t)$, corresponde a certas quantidades físicas que possuem apenas magnitude (que pode ser negativa, positiva ou nula). Escalares não são orientados no espaço.

↪ Exemplos: **temperatura** $T(x, y, z, t)$, **pressão** $p(x, y, z, t)$, **potencial eletrostático** $\phi(x, y, z)$...

- **Grandeza Vetorial:**

Representada por símbolos em negrito \mathbf{f} ou com uma flecha sobre o símbolo, \vec{f} . Corresponde a grandezas físicas dotadas de módulo, direção e sentido e que devem ser visualizadas através de segmentos de reta orientados no espaço. Campos vetoriais são funções orientadas extendidas no espaço-tempo, ou seja, dependem das coordenadas espaciais (x, y, z) e do tempo t : $\vec{f}(x, y, z, t)$.

↪ Exemplos: **posição** \mathbf{r} ou \vec{r} , **velocidade** \mathbf{v} , **campo elétrico** $\vec{E}(\mathbf{r}, t)$...

- Todo vetor pode ser representado através da projeção do mesmo sobre os vetores unitários de uma base ortogonal.
- Essas projeções são denominadas componentes do vetor.

No espaço tridimensional temos:

$$\mathbf{A} = A_1\hat{\mathbf{a}}_1 + A_2\hat{\mathbf{a}}_2 + A_3\hat{\mathbf{a}}_3 = (A_1, A_2, A_3) . \quad (1)$$

onde $\hat{\mathbf{a}}_1$, $\hat{\mathbf{a}}_2$ e $\hat{\mathbf{a}}_3$ formam uma base de vetores unitários.

Principais operações com vetores:

- **Adição de vetores:** a soma de dois vetores retorna outro vetor.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} = (A_1 + B_1, A_2 + B_2, A_3 + B_3) . \quad (2)$$

- **Produto Escalar:** denota projeção de um vetor sobre outro. Retorna uma quantidade escalar. É comutativo.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\cos(\theta_{AB}) \quad (3)$$

- Para os vetores da base temos:

$$\hat{\mathbf{a}}_i \cdot \hat{\mathbf{a}}_j = \delta_{ij} \quad (4)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$, δ_{ij} é a função de Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (5)$$

- Módulo de um vetor $|\mathbf{A}|$:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*} = \sqrt{|A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2} \geq 0, \quad (6)$$

* denota conjugação complexa das componentes do vetor.

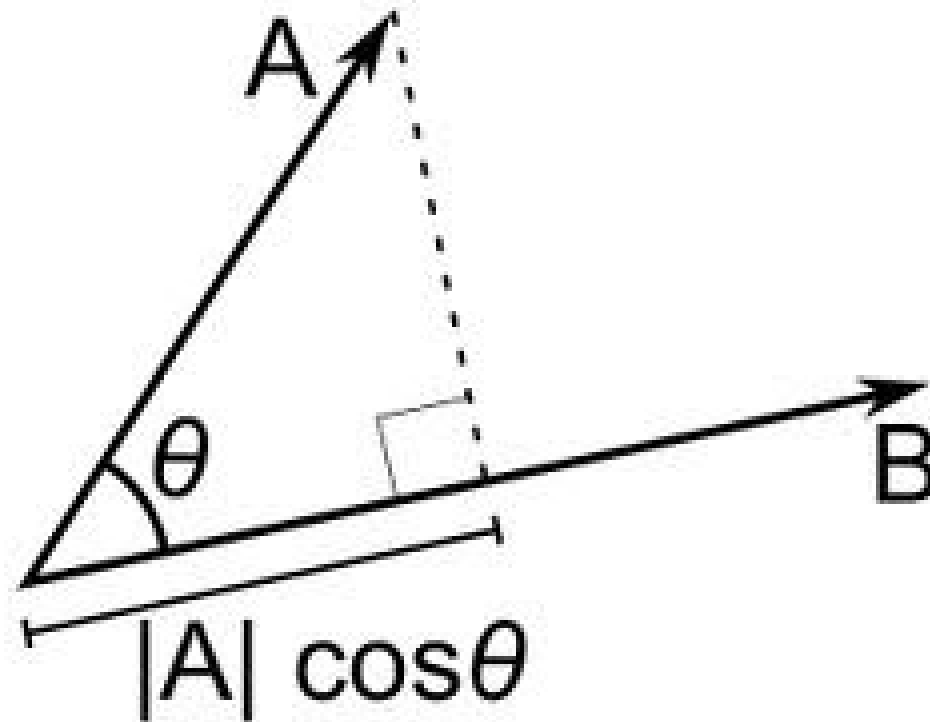


Figure 1: Produto Escalar: projeção de um vetor sobre o outro.

- **Produto Vetorial:** denota a área do paralelogramo formado pelos dois vetores. O resultado é um terceiro vetor perpendicular aos dois primeiros.

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{a}}_1 & \hat{\mathbf{a}}_2 & \hat{\mathbf{a}}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)\hat{\mathbf{a}}_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)\hat{\mathbf{a}}_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)\hat{\mathbf{a}}_3 \quad (8)$$

- O produto vetorial \times não é comutativo. A inversão de ordem acarreta a troca de sinal.
- Vetores unitários de base ortonormalizada devem satisfazer:

$$\hat{\mathbf{a}}_i \times \hat{\mathbf{a}}_j = \varepsilon_{ijk} \hat{\mathbf{a}}_k \quad (9)$$

onde $i, j = 1, 2, 3$, e ε_{ijk} é o tensor de Levi-Civita:

$$\varepsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \quad ijk = 1, 2, 3 \text{ e permut. cicl.} \\ -1, \quad ijk = 2, 1, 3 \text{ e permut. cicl.} \\ 0, \quad i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k \end{array} \right\} \quad (10)$$

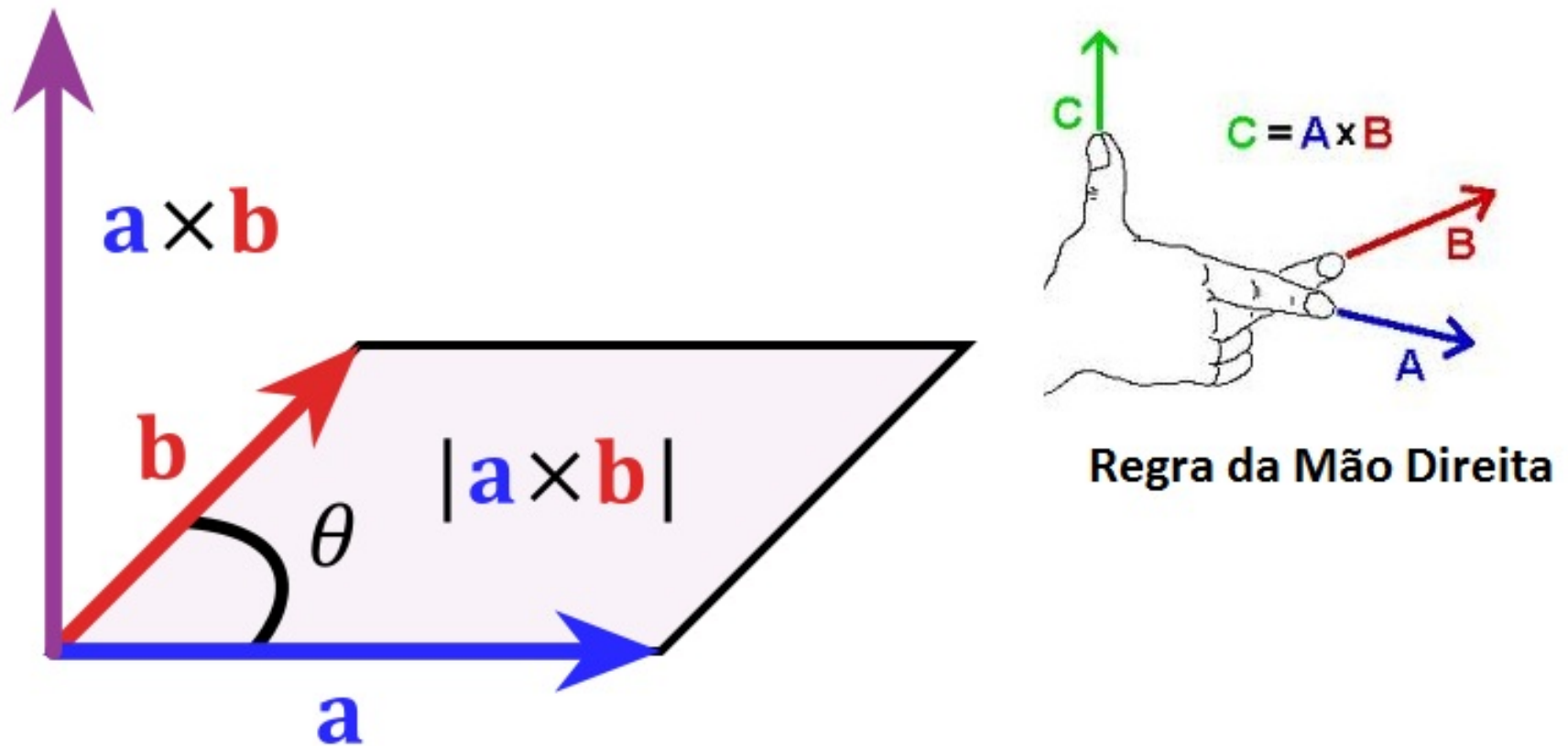


Figure 2: Produto Vetorial: o módulo é a área do paralelogramo definido pelos vetores, $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta$

Algumas identidades e resultados úteis:

- Para dois vetores ortogonais entre si

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0 . \quad (11)$$

- Para qualquer vetor temos:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (13)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (14)$$

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (15)$$

- **Sistemas de coordenadas mais usuais:**

O vetor posição será denotado por $\mathbf{r} = \vec{r} = \mathbf{x} = \vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

↪ **Coordenadas Cartesianas** $x_1 \rightarrow x$, $x_2 \rightarrow y$, $x_3 \rightarrow z$:

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\hat{\mathbf{a}}_x + y\hat{\mathbf{a}}_y + z\hat{\mathbf{a}}_z \quad (16)$$

↪ **Coordenadas Cilíndricas** $x_1 \rightarrow \rho$, $x_2 \rightarrow \varphi$, $x_3 \rightarrow z$:

$$\mathbf{r} = (\rho, \varphi, z) \quad (17)$$

↪ **Coordenadas Esféricas** $x_1 \rightarrow r$, $x_2 \rightarrow \theta$, $x_3 \rightarrow \varphi$:

$$\mathbf{r} = (r, \theta, \varphi) \quad (18)$$

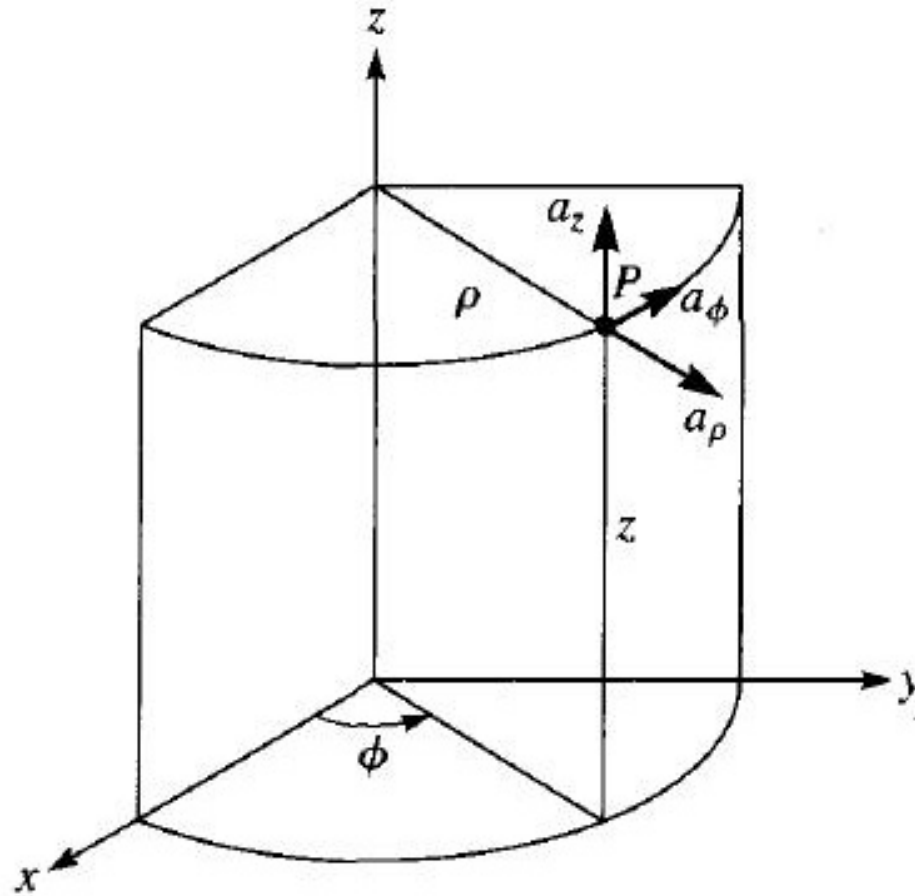


Figure 3: Coordenadas Cilíndricas Circulares

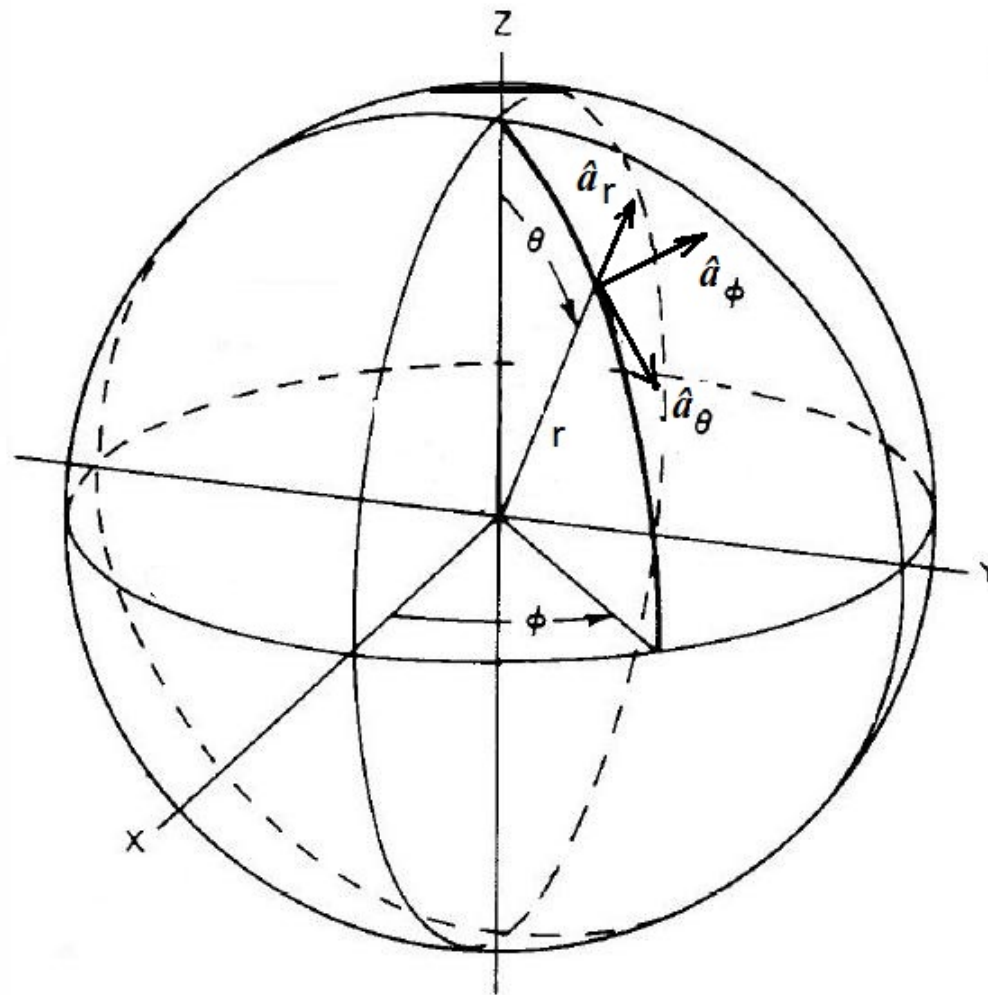


Figure 4: Coordenadas Esféricas

Cálculo Vetorial

Operador Nabla ∇

É um operador diferencial vetorial, que pode ser representado de forma simples em coordenadas cartesianas, conforme mostrado abaixo:

$$\nabla = \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (19)$$

e que é útil para simplificar a notação das operações com vetores.

- Em outros sistemas de coordenadas a representação do operador nabla não é trivial.

Gradiente

↪ Quantifica a variação de uma função escalar Φ .

↪ O resultado é um vetor.

Escalar $\Phi(\vec{x}, t) \rightarrow$ Operação Gradiente \Rightarrow Vetor $\nabla\Phi$

$$\text{grad } \Phi = \nabla\Phi = \hat{\mathbf{a}}_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \hat{\mathbf{a}}_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} \quad (20)$$

Divergência

↪ Quantifica o fluxo de um vetor de modo puntual.

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (21)$$

Vetor \mathbf{A} → Operação Divergência ⇒ Resultado: Escalar $\nabla \cdot \mathbf{A}$.

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad (22)$$

Rotacional

↪ Mede a circulação de um vetor.

$$\text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \hat{\mathbf{a}}_S \quad (23)$$

↪ Vetor \mathbf{A} → Operação Rotacional ⇒ Resultado: Vetor $\nabla \times \mathbf{A}$.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{\mathbf{a}}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{\mathbf{a}}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{\mathbf{a}}_z \quad (24)$$

Teorema de Gauss

Converte integral de volume em integral de superfície.

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \, dV = \oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (25)$$

Teorema de Stokes

Converte integral de superfície em integral de caminho.

$$\int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (26)$$

Outras Identidades Importantes

Demonstre que:

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0 \quad (27)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (28)$$

Operador Laplaciano

Para um escalar tem-se

$$\nabla^2 \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi \quad (29)$$

Para vetores, em coordenadas cartesianas temos:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla^2 A_x \hat{\mathbf{a}}_x + \nabla^2 A_y \hat{\mathbf{a}}_y + \nabla^2 A_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (30)$$

De maneira geral:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (31)$$

Números Complexos, Vetores-Fasores

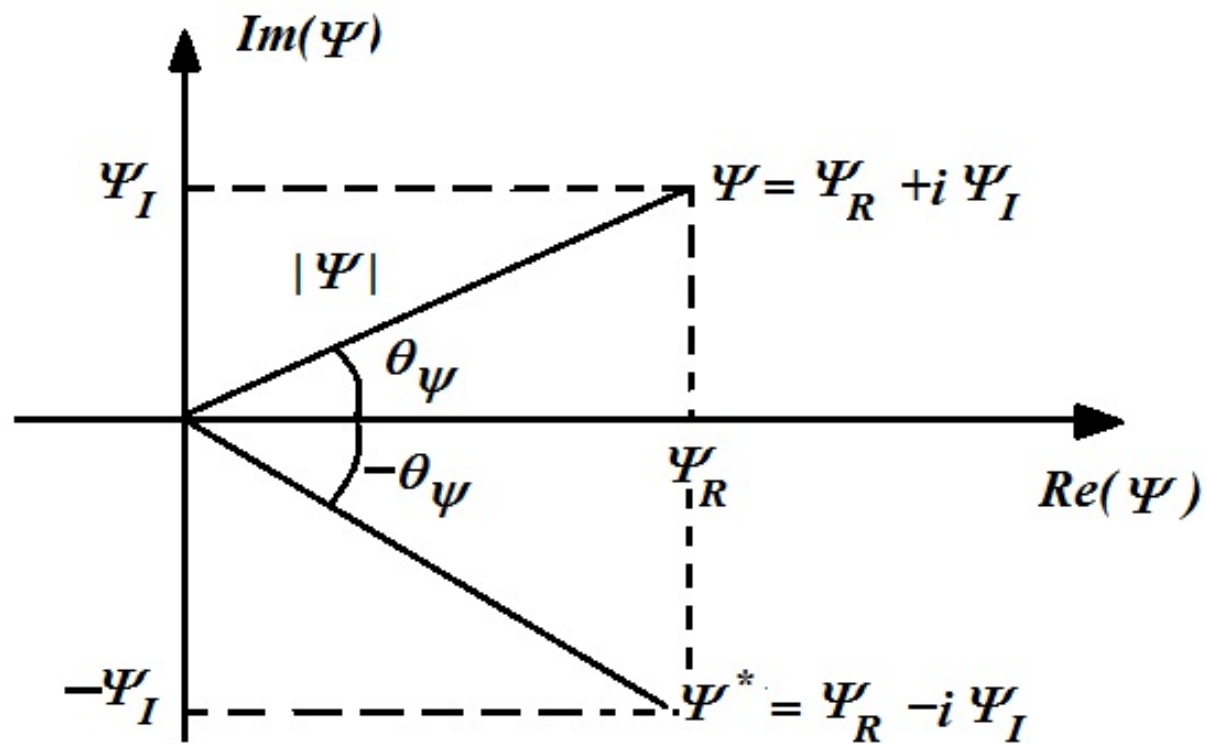


Figure 5: Plano Complexo: $\Psi = \Psi_R + i\Psi_I = |\Psi| \exp(i\theta_\Psi)$.

$$\Psi = \Psi_R + i\Psi_I = |\Psi| \exp(i\theta_\Psi) \quad (32)$$

$$\Psi^* = \Psi_R - i\Psi_I = |\Psi| \exp(-i\theta_\Psi) \quad (33)$$

$$|\Psi| = \sqrt{\Psi\Psi^*} = \sqrt{\Psi_R^2 + \Psi_I^2} \quad \text{e} \quad \theta_\Psi = \arctan\left(\frac{\Psi_I}{\Psi_R}\right) \quad (34)$$

$$\Psi_R = \operatorname{Re}(\Psi) = \frac{\Psi + \Psi^*}{2} \quad (35)$$

$$\Psi_I = \operatorname{Im}(\Psi) = \frac{\Psi - \Psi^*}{2i} \quad (36)$$

$$e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta \quad (37)$$

$$\cos \theta = \operatorname{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad (38)$$

$$\sin \theta = \operatorname{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \quad (39)$$

$$\sin \theta = \operatorname{Re}(-ie^{i\theta}) \quad (40)$$

Veja que:

$$|e^{\pm i\theta}| = 1 \quad \text{se} \quad \theta = \theta^* \quad \text{e, em geral} \quad \operatorname{Re}(AB) \neq \operatorname{Re}(A)\operatorname{Re}(B)$$

Regime Harmônico

No regime harmônico as funções vetoriais variantes no tempo com frequência ω tomam a forma abaixo:

$$\vec{\mathcal{A}}(x, y, z, t) = \vec{A}_1(x, y, z) \cos(\omega t) + \vec{A}_2(x, y, z) \sin(\omega t) . \quad (41)$$

Podemos representar o vetor acima por uma função vetorial complexa:

$$\vec{\mathcal{A}}(x, y, z, t) = \text{Re} [\mathbf{A}(x, y, z) \exp(i\omega t)] \quad (42)$$

onde:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \vec{A}_1(x, y, z) - i\vec{A}_2(x, y, z) .$$

De uma forma geral, consideramos $\mathbf{A}(x, y, z)e^{i\omega t}$ um vetor-fasor, ou seja, um vetor com cada componente sendo representada por um número complexo, sendo o campo vetorial real dado por:

$$\vec{\mathcal{A}}(x, y, z, t) = \frac{\mathbf{A}(x, y, z) \exp(i\omega t) + \mathbf{A}^*(x, y, z) \exp(-i\omega t)}{2} \quad (43)$$

com

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}_R(x, y, z) + i\mathbf{A}_I(x, y, z) .$$

$\mathbf{A}_R(x, y, z)$ e $\mathbf{A}_I(x, y, z)$ são vetores reais e $\mathbf{A}(x, y, z)$ é um vetor complexo, ou seja, um vetor-fasor.

Módulo de vetores complexos:

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^*} .$$

Para uma operação de multiplicação \odot de dois vetores harmônicos tem-se:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{A}}(x, y, z, t) \odot \vec{\mathcal{B}}(x, y, z, t) &= \operatorname{Re}[\mathbf{A}(x, y, z, t)] \odot \operatorname{Re}[\mathbf{B}(x, y, z, t)] \\ &= \frac{\vec{A}e^{i\omega t} + \vec{A}^*e^{-i\omega t}}{2} \odot \frac{\vec{B}e^{i\omega t} + \vec{B}^*e^{-i\omega t}}{2}\end{aligned}\quad (44)$$

onde:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x, y, z, t) &= \vec{A}(x, y, z)e^{i\omega t} \\ \mathbf{B}(x, y, z, t) &= \vec{B}(x, y, z)e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (45)$$

Desse modo podemos escrever:

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{A}}(x, y, z, t) \odot \vec{\mathcal{B}}(x, y, z, t) &= \frac{1}{4}(\mathbf{A} \odot \mathbf{B}^* + \mathbf{A}^* \odot \mathbf{B}) + \\ &\quad \frac{\vec{A} \odot \vec{B}e^{i2\omega t} + (\vec{A} \odot \vec{B})^*e^{-i2\omega t}}{4}\end{aligned}\quad (46)$$

Valor médio sobre um período temporal

Define-se valor médio sobre o período temporal $T = 2\pi/\omega$ da seguinte maneira:

$$\langle F(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \quad (47)$$

Para as operações vetoriais de multiplicação descritos anteriormente os termos de variação rápida $e^{\pm 2i\omega t}$ desaparecem e obtém-se:

$$\langle \vec{\mathcal{A}}(x, y, z, t) \odot \vec{\mathcal{B}}(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{A}(x, y, z, t) \odot \mathbf{B}^*(x, y, z, t)] \quad (48)$$

O resultado vale tanto para produto escalar quanto vetorial, ou seja:

$$\langle \vec{\mathcal{A}}(x, y, z, t) \cdot \vec{\mathcal{B}}(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{A}(x, y, z, t) \cdot \mathbf{B}^*(x, y, z, t)] \quad (49)$$

$$\langle \vec{\mathcal{A}}(x, y, z, t) \times \vec{\mathcal{B}}(x, y, z, t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{A}(x, y, z, t) \times \mathbf{B}^*(x, y, z, t)] \quad (50)$$

Transformadas de Fourier

O par de transformadas de Fourier está definido abaixo:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (51)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (52)$$

e de forma mais geral ainda, para um vetor \mathbf{A} (pode ser também uma função escalar qualquer):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3k \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) \quad (53)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}, \omega) = \int d^3r \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (54)$$

onde $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, k_3)$ e a notação utilizada é:

$$\int d^3r = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz$$

$$\int d^3k = \int_{-\infty}^{\infty} dk_x \int_{-\infty}^{\infty} dk_y \int_{-\infty}^{\infty} dk_z$$

Algumas propriedades importantes de transformadas de Fourier, que também podem ser encontradas na literatura corrente, são mostradas abaixo:

$$\mathcal{F}(\exp(i\omega_0 t)f(t)) = F(\omega - \omega_0) \quad (55)$$

$$\mathcal{F}[(f(t) * g(t))] = \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau\right] = F(\omega)G(\omega) \quad (56)$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right) = (i\omega)^n F(\omega) \quad (57)$$

onde \mathcal{F} denota transformação de Fourier da função.

Importante também é a identidade de Parseval, mostrado abaixo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |f(t)|^2 = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} d\omega |F(\omega)|^2 \quad (58)$$

Função Delta de Dirac ou Impulso

A função delta de Dirac, denotada por $\delta(x - x_0)$ é definida conforme a figura abaixo, no limite $\varepsilon \rightarrow 0$:

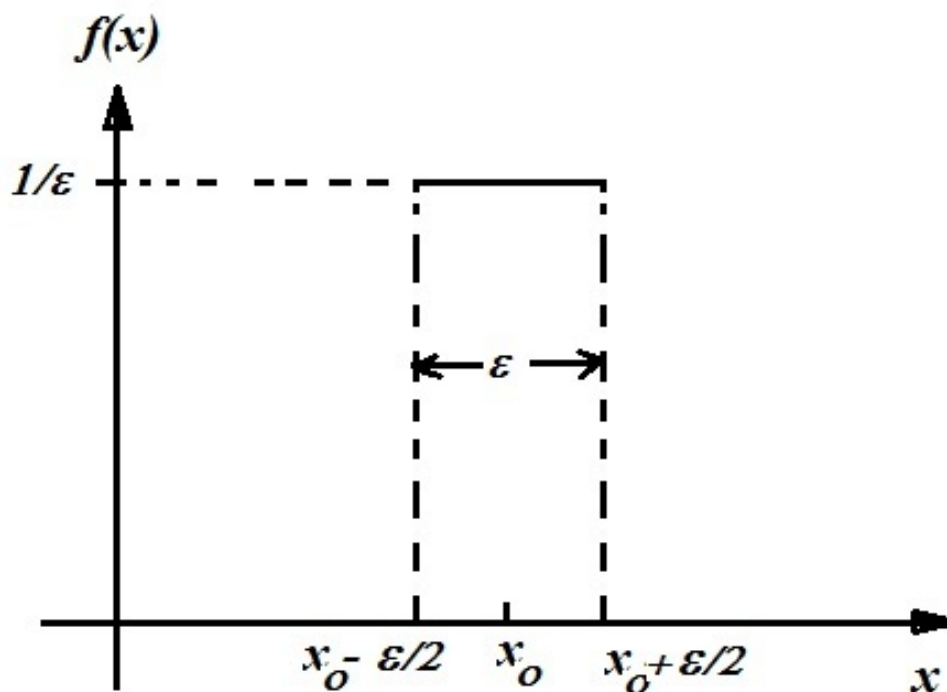


Figure 6: Função Delta de Dirac: próximo de $x = x_0$ a função é retangular, tem altura $1/\varepsilon$ e largura ε em torno de x_0 . Observe que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x = x_0) \rightarrow \infty$ enquanto a largura tende para zero, mas a área da função é unitária.

Define-se então:

$$\begin{aligned}\delta(x - x_0) &= 0, \text{ se } x \neq x_0 \\ &= \infty, \text{ se } x = x_0\end{aligned}\quad (59)$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1, \quad (60)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') \delta(x' - x) dx' = f(x), \quad (61)$$

Então podemos estender o conceito ao espaço tridimensional na forma:

$$\int d^3 r \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 1 \quad (62)$$

$$\int d^3 r' \phi(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \phi(\mathbf{r}) \quad (63)$$

$$\int d^3 r' \mathbf{A}(\mathbf{r}') \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (64)$$

sendo $d^3 r$ o elemento diferencial de volume e a função delta de Dirac $\delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z')$ e $\int d^3 r = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz$.