ONDULATÓRIA: EQUAÇÃO DE ONDAS E CONCEITOS BÁSICOS

PROF. CÉSAR AUGUSTO DARTORA - UFPR

E-MAIL: CADARTORA@ELETRICA.UFPR.BR

CURITIBA-PR

Roteiro da Aula:

- Conceitos básicos sobre ondas
- Dedução da Equação de Ondas
- Solução da Equação de Ondas
- Conceito: Ondas Planas Uniformes

Conceitos básicos da Ondulatória: Equação de Ondas

$\Rightarrow$ Primeiro precisamos responder à pergunta: **O que é uma onda?**

$\Rightarrow$ Que tipos de ondas existem? Podemos fazer uma classificação?

$\Rightarrow$ Sabendo o que é uma onda podemos encontrar uma equação que governe os fenômenos ondulatórios?

$\Rightarrow$ Que quantidades são utilizadas para caracterizar uma onda?

Figure 1: Onda propagando-se na água.

Partículas e Campos

$\Rightarrow$ **Partícula** é um ente localizado no espaço, descrito essencialmente por um vetor de estado $[\mathbf{r}(t), \mathbf{v}(t)]$, onde:

- $\mathbf{r}(t)$ é a posição da partícula no instante de tempo t, em relação a um dado sistema de coordenadas.

- $\mathbf{v}(t)$ é a velociade instantânea, ou seja, a rapidez com que a posição da partícula varia no tempo, no instante de tempo t, em relação a um dado sistema de coordenadas.

Exemplo de partícula:

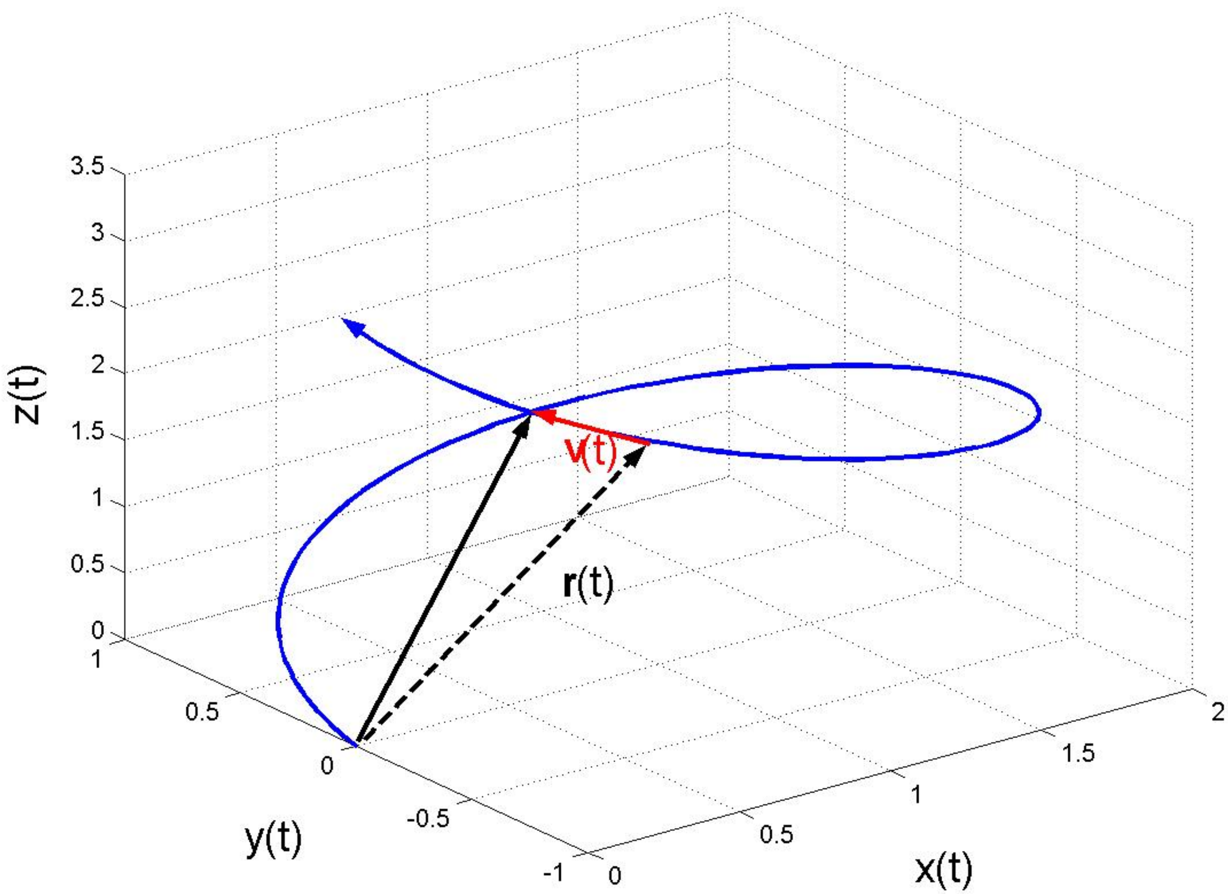
• Carro trafegando em uma rodovia pode ser considerado um ponto material e sua dinâmica é determinada pelas leis de Newton:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \mathbf{v}(t) \quad , \quad \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{1}{m}\mathbf{F}(t) \ . \tag{1}$$

onde m é a massa da partícula e $\mathbf{F}$ é a força resultante sobre ela no instante de tempo t.

• O único parâmetro independente é o tempo t e as coordenadas $x(t), y(t), z(t)$ dependem de t.

Exemplo de trajetória de uma partícula no espaço:



$\Rightarrow$ **Campo** é um ente físico extendido no espaço e no tempo, ou seja, não pode ser exatamente localizado no espaço para um dado tempo.

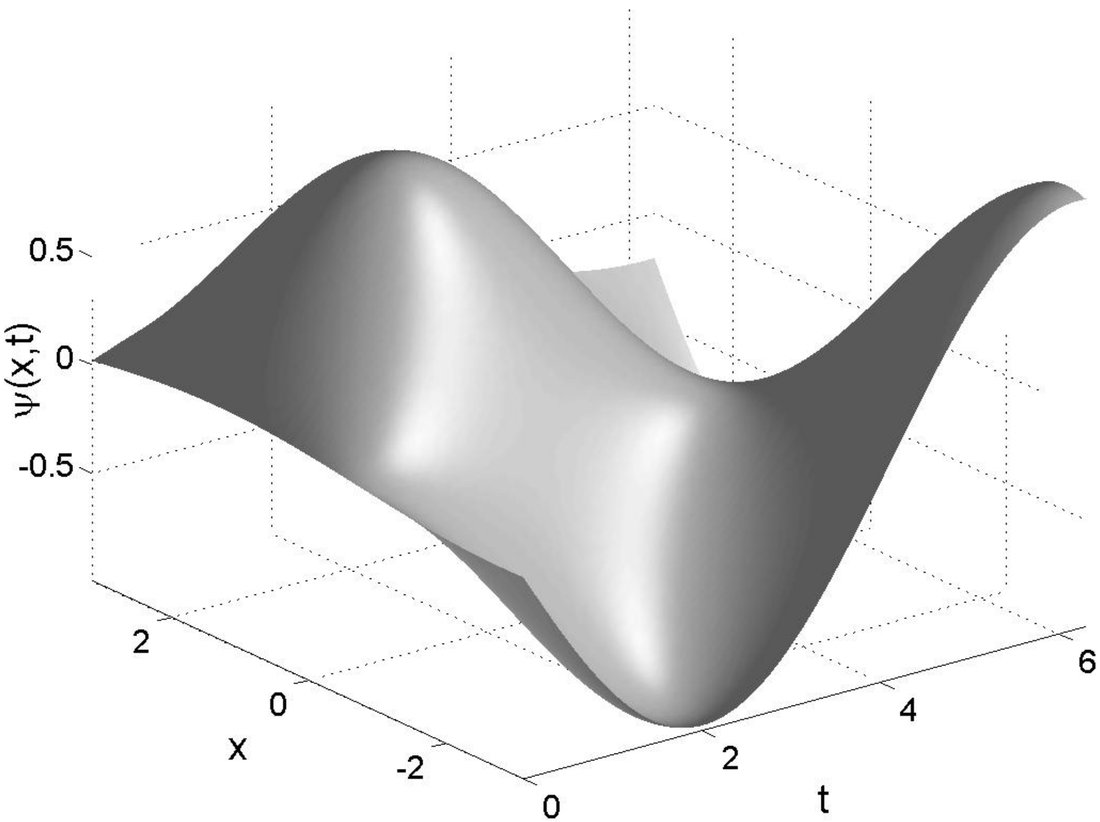
- Representamos um campo por uma função ψ na forma a seguir:

$$\psi = \psi(x, y, z, t) \ . \tag{2}$$

$\Rightarrow$ ψ é parametrizada por $(\mathbf{r}, t) = (x, y, z, t)$. As coordenadas (x, y, z) são independentes de t, diferentemente do que ocorre para uma partícula.

$\Rightarrow$ **Campos vetoriais são funções orientadas extendidas no espaço-tempo**: $\vec{f}(x, y, z, t)$.

Exemplo de campo: onda de pressão do ar. Para cada (x, t) a amplitude $\psi(x, t)$ assume um valor, definindo uma superfície.



O que é uma onda?

É uma pertubação no espaço-tempo que se propaga, i.e., viaja de um ponto a outro com certa velocidade transportando energia, momentum linear...

Tipos de Ondas:

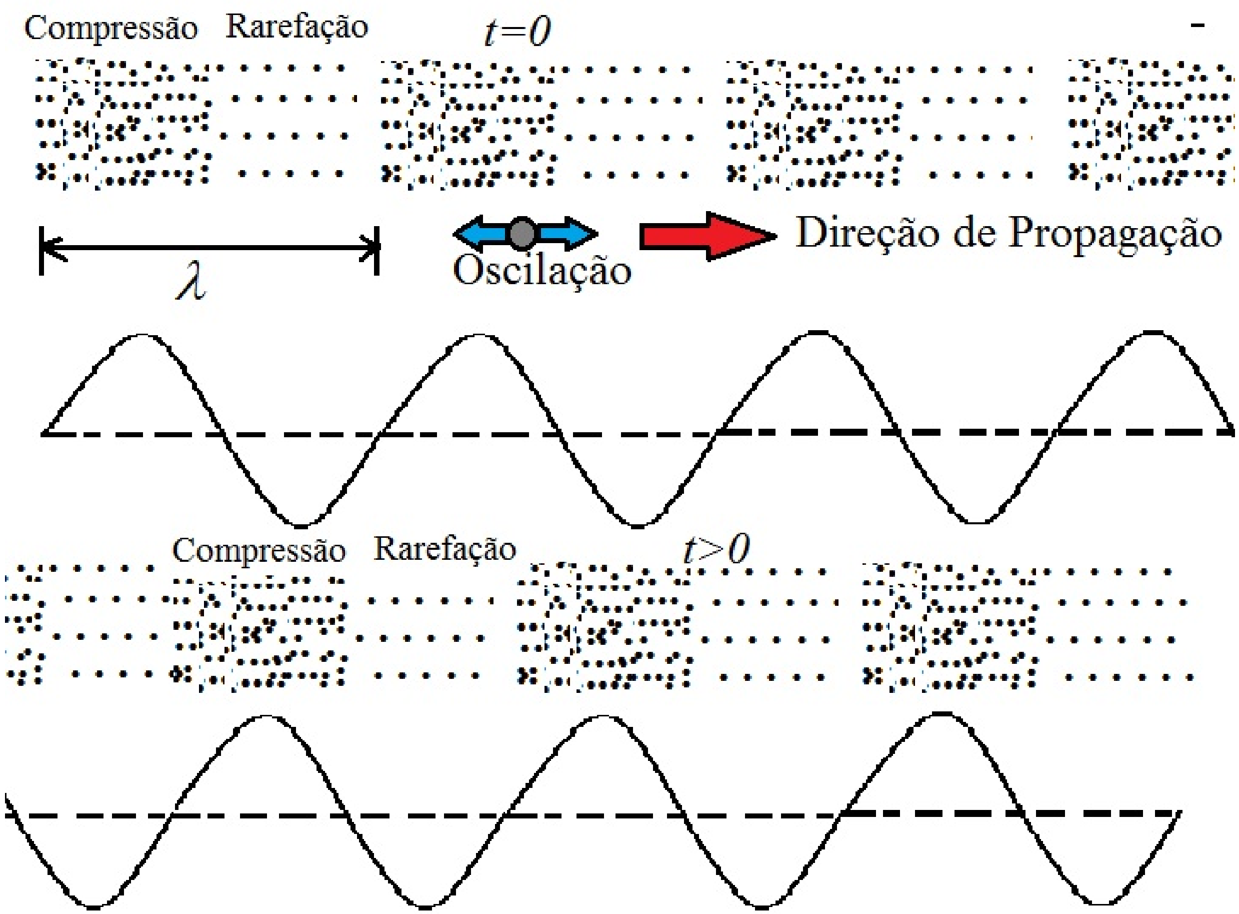
A) Quanto ao caráter:

- *Longitudinais*: som, alguns tipos de ondas mecânicas...
- *Transversais*: vibrações de cordas, ondas eletromagnéticas

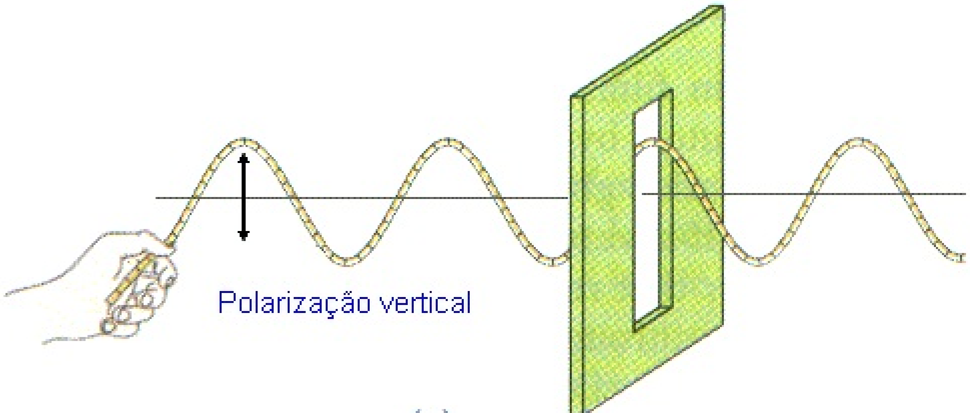
B) Quanto à periodicidade:

- *Periódicas*: 1) Harmônicas ou senoidais, 2) Superposições de Harmônicas
- *Não Periódicas*: Pulsos (espectro contínuo)

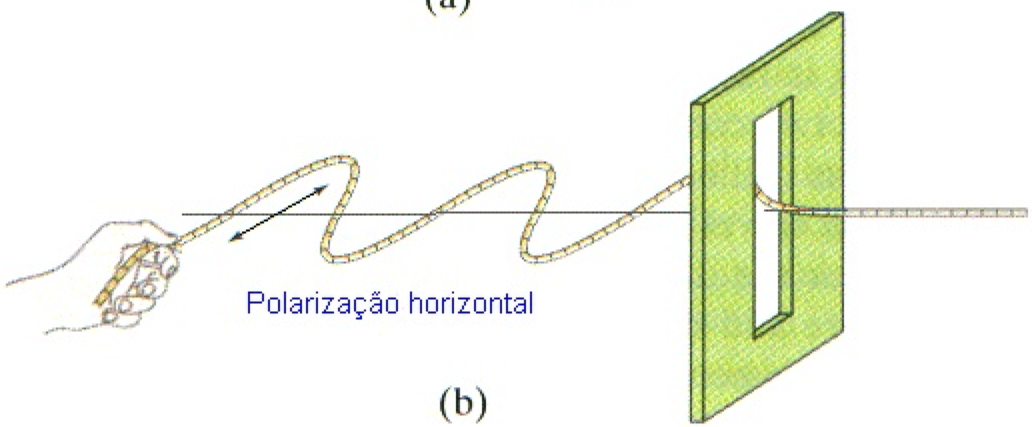
• Exemplo de **onda longitudinal**: o som é a variação da pressão $\Delta p(x,t)$ em relação atmosférica p_0Moléculas do ar se movem na mesma direção da propagação da onda.



• Exemplo de **ondas transversais**: vibrações de uma corda esticada, que admitem polarização. A perturbação oscila no plano perpendicular ao eixo de propagação da onda.

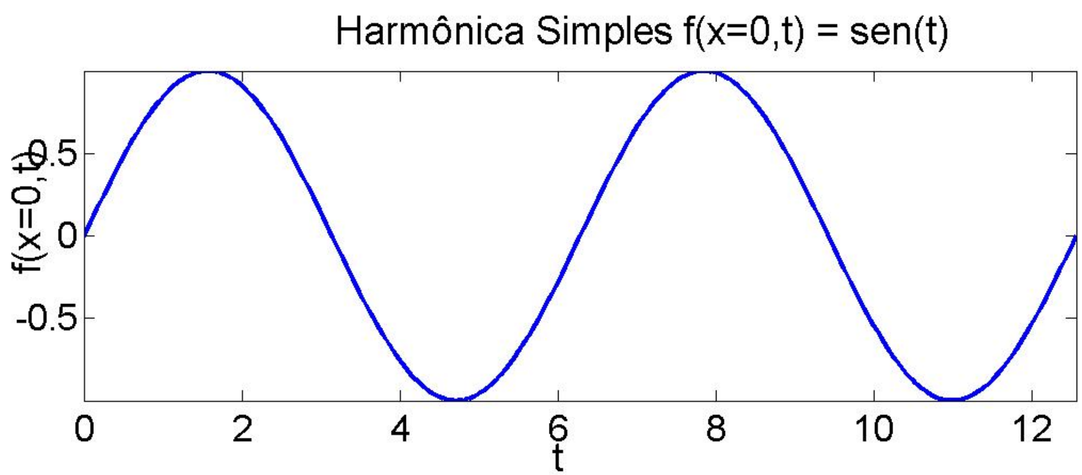


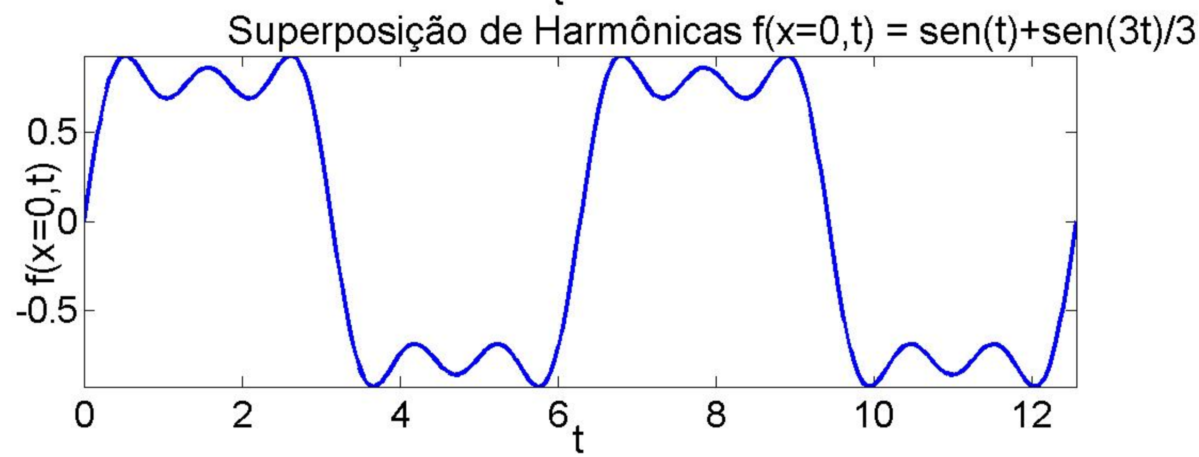
(a)



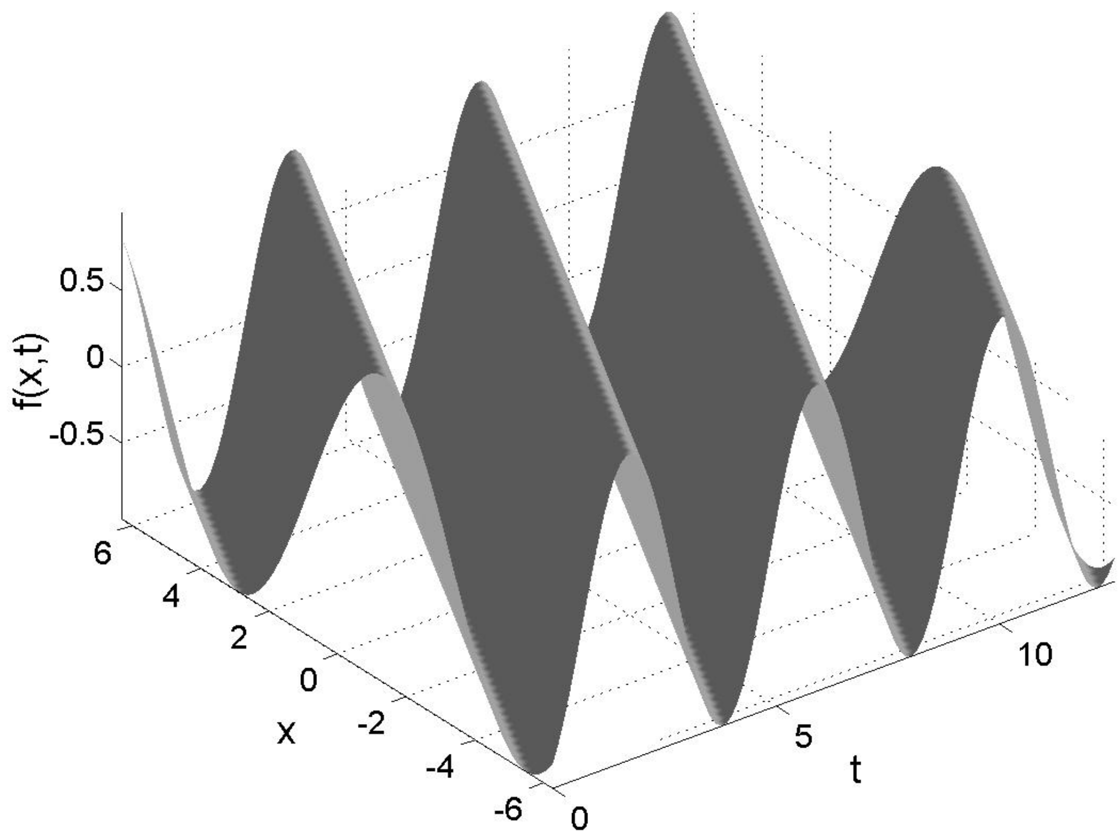
(b)

⇒ Ondas periódicas:

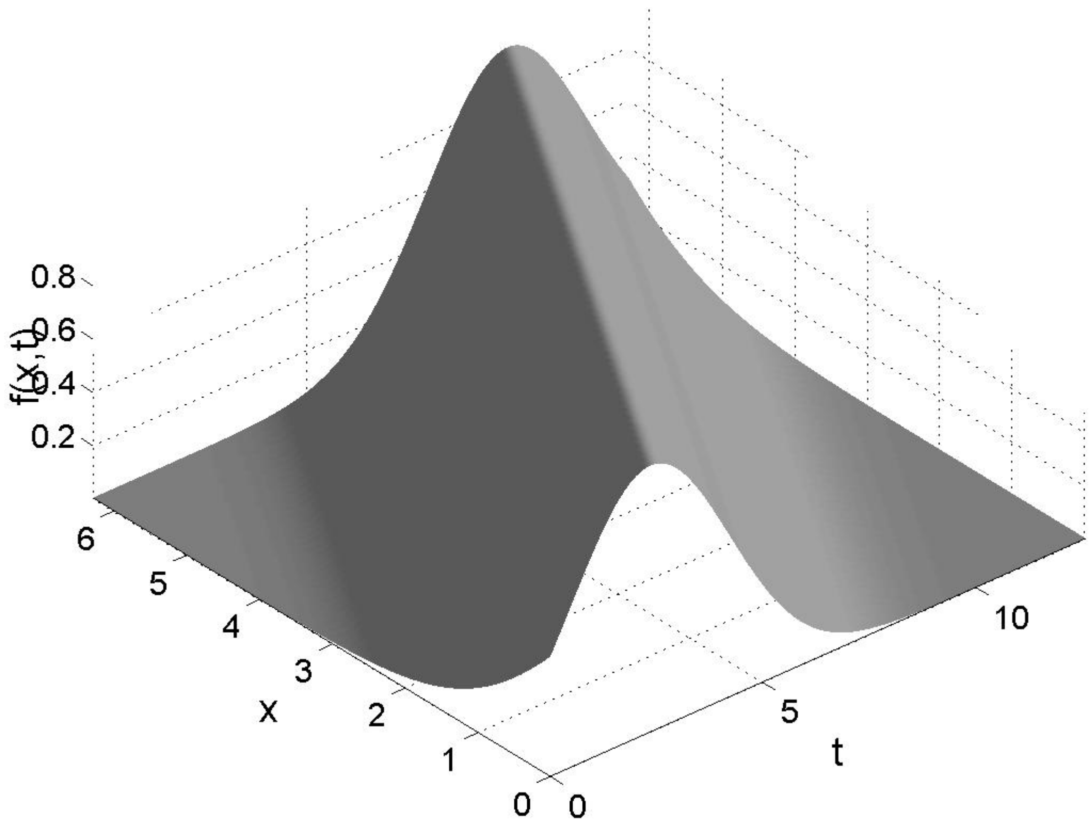




$\Rightarrow$ Onda harmônica $f(x,t) = \text{sen}(\omega t - kx)$:

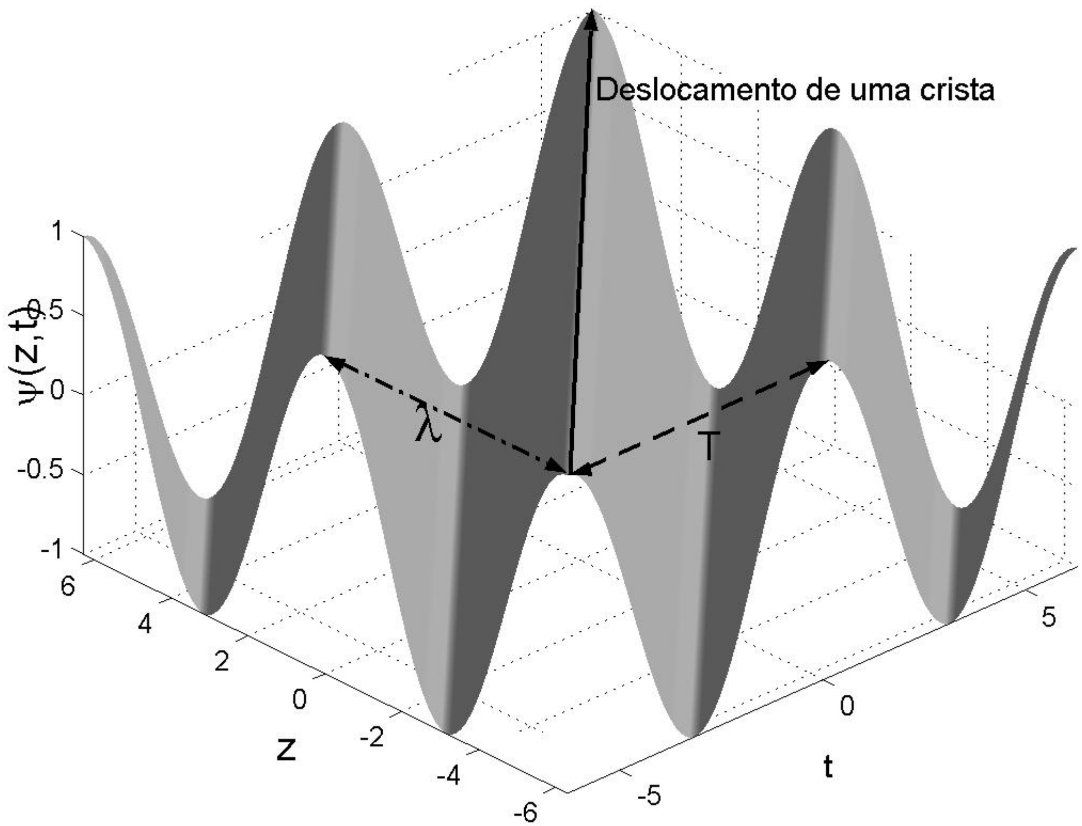


⇒ Exemplos de onda não-periódica: o Pulso Gaussiano $f(x,t) = Ae^{-(x-vt)^2/\tau^2}$.

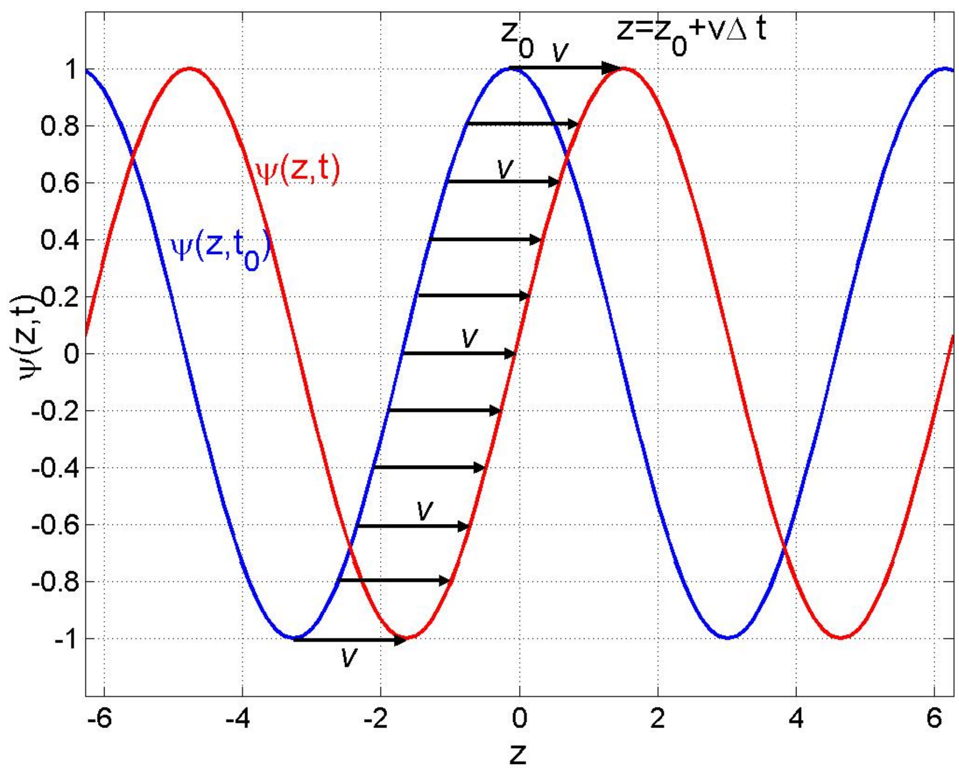


Uma dedução para a equação de ondas

• Abaixo temos uma onda harmônica $\psi(z,t)$ propagando-se com velocidade v ao longo do eixo z:



• $\psi(z,t)$ em função de z em t_0 e t: a onda se desloca sem deformação. A crista que em t_0 estava na posição z_0 se desloca para a posição $z = z_0 + v\Delta t$, $\Delta t = t - t_0$.



$\rightsquigarrow$ A perturbação $\psi(z,t)$ se desloca no espaço com velocidade constante v no sentido positivo do eixo z (similar a um MRU), portanto para a amplitude de pico temos:

$$z = z_0 + v\Delta t = z_0 + v(t - t_0) \Rightarrow z_0 - vt_0 = z - vt \tag{3}$$

Em meios sem perdas a onda não sofre atenuação e o valor de pico $\psi_p(z_0, t_0)$ se desloca satisfazendo a equação:

$$\psi_p(z_0, t_0) = \psi_p(z = z_0 + v\Delta t, t)$$

A condição acima é cumprida se o argumento de ψ tem a forma (vide eq. 3):

$$\psi(z,t) = \psi(z - vt)$$

Considerando também uma onda contra-propagante ou seja, que se propaga para $-z$, com velocidade v, temos:

$$\psi(z,t) = f(z - vt) + g(z + vt) \tag{4}$$

Qual equação diferencial a função $\psi(z,t)$ deve obedecer?

$\rightsquigarrow$ Uma vez que ψ pode ter duas componentes, uma propagante e a outra contra-propagante, vamos definir duas novas variáveis:

$$\eta = z - vt \tag{5}$$
$$\zeta = z + vt \tag{6}$$

de tal forma que

$$\psi(z,t) = \psi(\eta,\zeta) = f(\eta) + g(\zeta) \tag{7}$$

e ainda (lembre que z e t são variáveis independentes):

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \eta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial \zeta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \zeta} = -v\frac{\partial}{\partial \eta} + v\frac{\partial}{\partial \zeta} \tag{9}$$

Pode-se demostrar que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \eta} + \frac{\partial g}{\partial \zeta} \ ,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -v\left(\frac{\partial f}{\partial \eta} - \frac{\partial g}{\partial \zeta}\right) \ .$$

Invertendo as equações acima:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{1}{v}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \ ,$$

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{1}{v}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) \ .$$

Agora veja que:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right) = 0$$

Fica como exercício demonstrar que:

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)=\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0$$

Esta equação que segue:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \tag{10}$$

é a equação de ondas homogênea em uma dimensão espacial (1D).

Generalizando, se quisermos considerar uma função geral $\psi(x,y,z,t)$

$\rightsquigarrow$ Que operador corresponde a $\partial^2/\partial z^2$?

$\rightsquigarrow$ Devemos incluir uma fonte independente do lado direito!

Basta lembrar que o operador diferencial que contém derivadas de segunda ordem é o laplaciano, de tal forma que:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \Longrightarrow \nabla^2$$

Incluindo a fonte, ficamos com a equação de ondas não-homogênea:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,y,z,t) = -s(x,y,z,t) \tag{11}$$

É importante notar que a função ψ pode representar um campo escalar, ou então poderá ser substituída por um campo vetorial, ou até mesmo uma matriz.

• Exemplo de onda escalar: som (é uma onda de pressão) $\Rightarrow$ Não admite polarização!

• Exemplo de onda de caráter vetorial: onda eletromagnética, vibração transversal em uma corda.

Solução da Equação de Ondas Homogênea

Nesse caso $s(x,y,z,t) = 0$ e vamos fazer $\psi(x,y,z,t) = \psi(z,t)$, i.e., devemos resolver:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0$$

Utilizando o método da separação de variáveis:

$$\psi(z,t) = F(z) \cdot G(t)$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{d^2F}{dz^2}G - \frac{1}{v^2}F\frac{d^2G}{dt^2} = 0$$

Dividindo a equação acima por $\psi = FG$ tem-se

$$\frac{v^2}{F}\frac{d^2F}{dz^2} = \frac{1}{G}\frac{d^2G}{dt^2} = -\omega^2$$

$\Rightarrow$ Em regime harmônico fazemos $G(t) = G_0 e^{i\omega t}$, que implica que:

$$F(z) = A\exp(-ikz) + B\exp(ikz) \ ,$$

onde $v^2 k^2 = \omega^2$.

A solução final, corresponde à parte real da função a seguir:

$$\psi(z,t) = A\exp[i(\omega t - kz)] + B\exp[i(\omega t + kz)] \qquad (12)$$

Observe que a solução acima tem a forma da solução necessária, ou seja, depende somente de $z - vt$ e $z + vt$. Levando-se em conta que $vk = \omega$, tem-se:

$$\psi(z,t) = A\exp[-ik(z - vt)] + B\exp[ik(z + vt)]$$

Por simplicidade vamos fazer $B = 0$, tal que ψ contenha somente a componente propagante (sentido $+z$). Escrevendo $A = |A|\exp(i\phi_0)$ e considerando a parte real da equação (12) temos:

$$\psi_R(z,t) = |A|\cos(\omega t - kz + \phi_0) \qquad (13)$$

⇒ Sem perda de generalidade, vamos fazer a fase global nula, ou seja, $\phi_0 = 0$.

⇒ Período temporal e frequência

Consideremos inicialmente $z = 0$ e :

$$\psi_R(z = 0, t) = |A| \cos(\omega t) \tag{14}$$

Esta função é cossenoidal e podemos daqui definir o período T:

O período T é o intervalo temporal transcorrido entre dois instantes de tempo distintos para os quais a diferença de fase é igual a 2π, i.e.,

$$\omega t - \omega t_0 = \omega \Delta t = \omega T = 2\pi$$

de onde vem:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{15}$$

e uma vez que $f = 1/T$ é fácil mostrar que:

$$\omega = 2\pi f \tag{16}$$

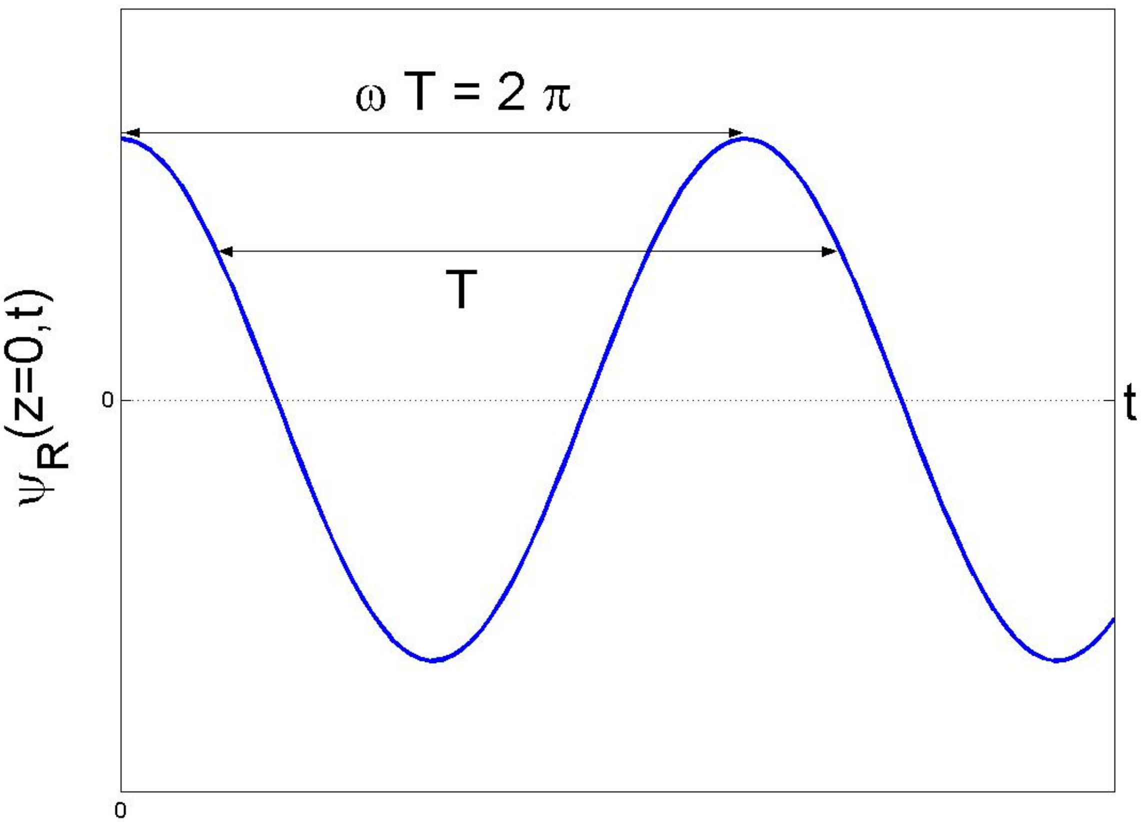


Figure 2: Definição: Período temporal.

⇒ Comprimento de onda e frequência espacial

Consideremos agora a função em todo o espaço para $t = 0$:

$$\psi_R(z = 0, t) = |A| \cos(kz) \tag{17}$$

Esta função também é cossenoidal e podemos daqui definir o comprimento de onda λ (ou período espacial):

O comprimento de ondas λ é a menor distância espacial entre duas frentes de onda distintas para os quais a diferença de fase é igual a 2π em um dado instante de tempo, i.e.,

$$kz - kz_0 = k\Delta z = k\lambda = 2\pi$$

de onde vem:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{18}$$

Note que o número de onda k pode ser interpretado como uma frequência espacial.

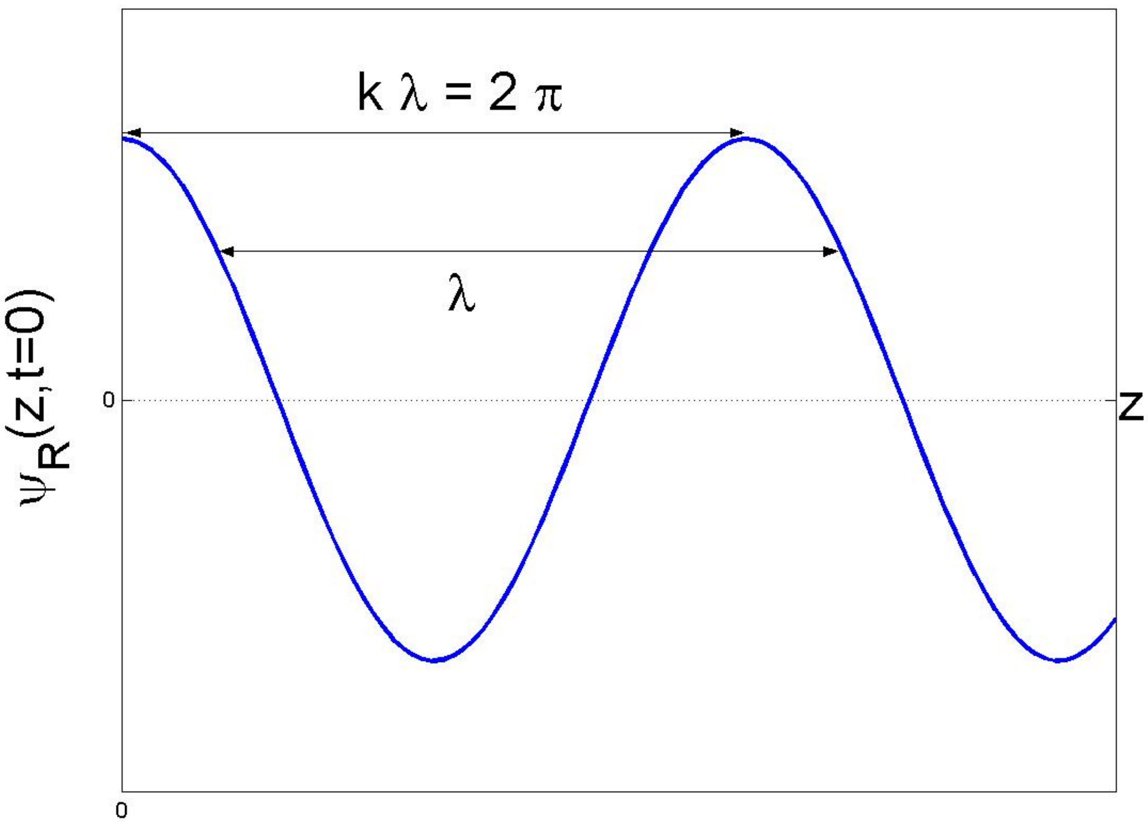


Figure 3: Definição: Comprimento de onda.

Lembrando que:

$$vk = \omega \tag{19}$$

$$\omega = 2\pi f \tag{20}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{21}$$

podemos facilmente mostrar que:

$$v = \lambda f \tag{22}$$

Voltemos novamente então à solução de ondas, considerando somente a onda propagante $(+z)$:

$$\psi(z,t) = A\exp[i(\omega t - kz + \phi_0)] \tag{23}$$

São características da onda:

- Amplitude (e polarização, se a onda tem caráter vetorial), dada por A
- Frequência angular $\omega = 2\pi f$
- Comprimento de ondas $\lambda = 2\pi/k$
- Velocidade de propagação: $v = \lambda f = \omega/k$;
- Uma fase global ϕ_0;
- Direção e sentido de propagação, nesse caso, $+z$.

Conceito: Ondas Planas Uniformes

Uma vez que seja conhecida a solução da equação de ondas homogênea

$$\psi(x,y,z,t) = \psi(z,t) = A\exp[i(\omega t - kz + \phi_0)]$$

podemos concluir que a solução acima é uma onda plana uniforme!

$\rightsquigarrow$ Observe que a função ψ independe de (x,y), e portanto podemos interpretar que esta solução é válida no espaço (x,y,z) para todo tempo, desde que em todo o plano (x,y) para um dado z em um dado instante de tempo t a função tenha o mesmo valor, ou seja, é UNIFORME NO PLANO.

$\rightsquigarrow$ Daí o nome: ONDA (porque é uma perturbação que se propaga com velocidade v constante ao longo de z à medida que o tempo passa) e PLANA E UNIFORME pois em todos os pontos do plano (x,y) a função tem o mesmo valor para um dado z a um dado intante t. $\Longrightarrow$ é uma ONDA COM AMPLITUDE UNIFORME EM UM PLANO $\Rightarrow$ ONDA PLANA UNIFORME

.

$\Rightarrow$**Vamos generalizar a solução.** Veja que a função de fase pode ser escrita como:

$$\phi(z,t) = \omega t - kz + \phi_0$$

Considerando um dado valor da fase $\phi(z,t)$ para um instante t qualquer e isolando z encontramos a equação do plano para a qual a fase ϕ é constante em todo plano (x,y) dado por aquele valor de z:

$$z = \frac{\omega t - \phi + \phi_0}{k}$$

A equação geral do plano é dada por:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} = d$$

onde

$\rightsquigarrow$ $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário normal ao plano.

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{r} = (x,y,z)$ é o vetor posição.

$\rightsquigarrow$ d é uma constante real qualquer que mede a distância entre a origem e o ponto mais próximo no plano.

Vamos propor então a substituição de z por $\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}$ tal que:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r} + \phi_0 \tag{24}$$

e a solução geral é dada por:

$$\psi(\mathbf{r},t) = \psi(x,y,z,t) = Ae^{i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}+\phi_0)} \tag{25}$$

Exercícios:

1- Demonstre que:

$$\nabla(\exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}+\phi_0)]) = -ik\hat{\mathbf{n}}\exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}+\phi_0)]$$

$$\nabla^2(\exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}+\phi_0)]) = -k^2\exp[i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}+\phi_0)]$$

2- Demonstre que (25) satisfaz a equação de ondas homogênea

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi(x,y,z,t) = 0$$

desde que $v^2k^2 = \omega^2$.

3- O que representa o vetor $\hat{\mathbf{n}}$?