AS EQUAÇÕES DE MAXWELL

PROF. CÉSAR AUGUSTO DARTORA - UFPR

E-MAIL: CADARTORA@ELETRICA.UFPR.BR

CURITIBA-PR

Roteiro da Aula:

- Equações de Maxwell: forma integral e forma diferencial
- Indução e a Lei de Faraday-Lenz
- Continuidade da carga e Lei de Ampère-Maxwell
- Regime Harmônico e as Equações de Maxwell
- Interpretação Física das Equações de Maxwell

Equações de Maxwell

As leis do Eletromagnetismo são usualmente apresentadas na ordem cronológica até a obtenção das Equações de Maxwell em regime variante no tempo.

- A Eletrostática e a Magnetostática são descritas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{1}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{2}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \tag{3}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \tag{4}$$

onde as relações constitutivas dos meios são:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{5}$$
$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H} \tag{6}$$

Nas equações acima:

$\mathbf{D} \rightarrow$ vetor densidade de fluxo elétrico [C/m^2];

$\mathbf{E} \rightarrow$ vetor campo elétrico [V/m];

$\mathbf{B} \rightarrow$ vetor densidade de fluxo magnético [T ou Wb/m^2];

$\mathbf{H} \rightarrow$ vetor campo magnético [A/m];

$\mathbf{P} \rightarrow$ vetor polarização dielétrica[C/m^2];

$\mathbf{M} \rightarrow$ vetor magnetização do meio[A/m];

$\rho \rightarrow$ densidade de carga elétrica [C/m^3];

$\mathbf{J} \rightarrow$ vetor densidade de corrente elétrica [A/m^2];

onde as unidades do SI são mostradas entre colchetes.

• No regime estático é possível desacoplar a eletricidade do magnetismo. Os problemas são de certa forma independentes.

Eletrostática:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{E} = -\nabla\phi \tag{8}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} \ , \tag{9}$$

Substituindo (9) e (8) em (7) obtemos a equação de Poisson em meios homogêneos:

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{10}$$

onde ϕ é o potencial escalar elétrico, medido em volts.

Magnetostática:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (11)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (12)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \ , \quad (13)$$

Substituindo (13) e (11) em (12) obtemos a equação de Poisson em meios homogêneos:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (14)$$

onde $\mathbf{A}$ é denominado vetor potencial magnético, medido em [V.s/m]. Para obter a equação de Poisson vetorial deve-se assumir que:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \ ,$$

O ELETROMAGNETISMO ANTES DE MICHAEL FARADAY

$\Rightarrow$ Antes de Oersted em 1820 - Eletricidade e Magnetismo eram tratados como disciplinas distintas.

$\Rightarrow$ Oersted observa a corrente elétrica em um circuito próximo a uma agulha imantada (bússola) era capaz de defletir a agulha.

$\Rightarrow$ Por volta de 1820 - Lei de Biot-Savart, Ampère (o Newton do Eletromagnetismo, segundo Maxwell). formula leis matemáticas para descrever o magnetismo gerado por correntes elétricas.

$\rightsquigarrow$ Dens. de cargas $\rho \Longrightarrow \mathbf{E}$

$\rightsquigarrow$ Carga em movimento $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} \Longrightarrow \mathbf{B}$.

$\rightsquigarrow$ Pergunta: Se fenômeno elétrico gera campo magnético seria possível que o campo magnético produza fenômenos elétricos? (Idéia de simetria na natureza).

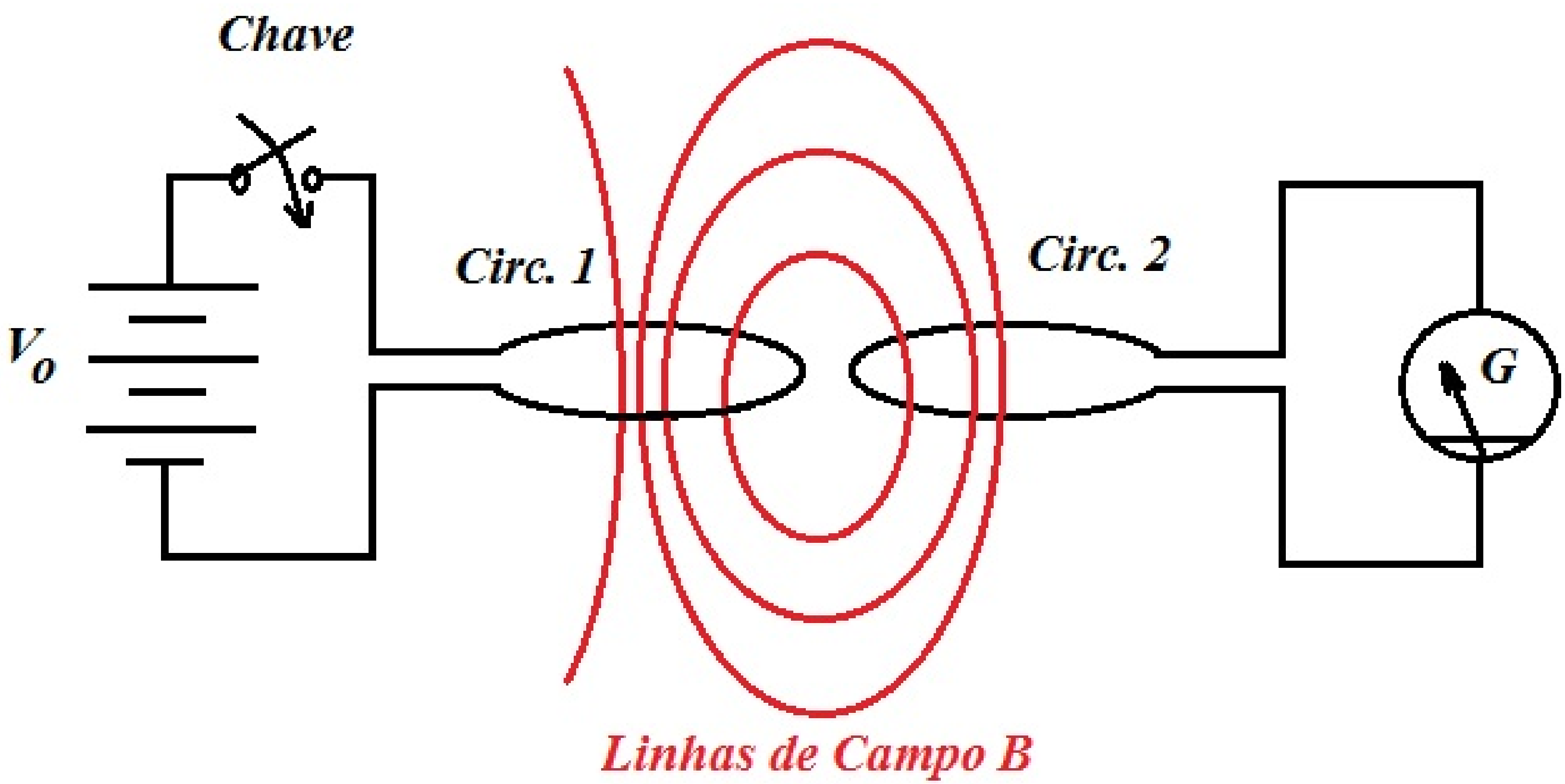
O EXPERIMENTO DE FARADAY

A resposta à pergunta:

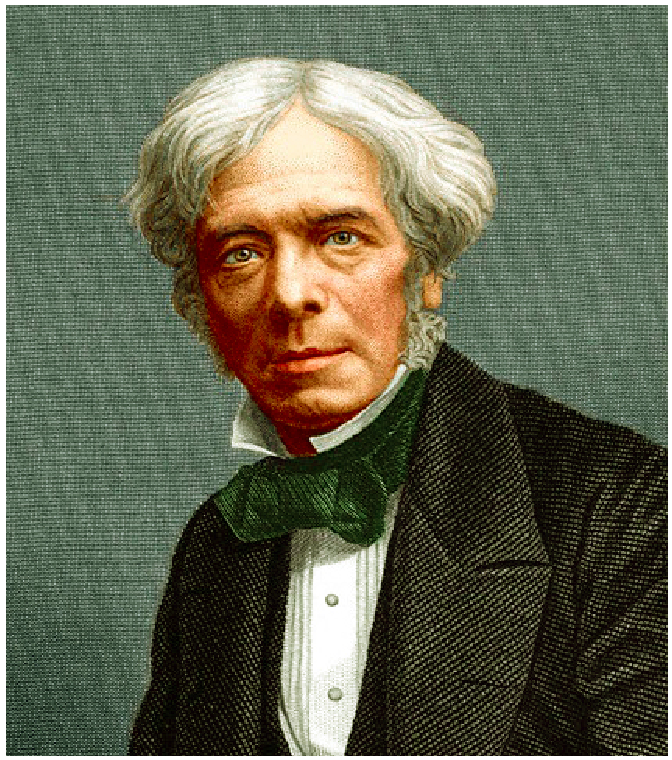
É possível gerar fenômenos elétricos por meio do campo magnético?

foi dada de modo independente por Michael Faraday e Joseph Henry, por volta de 1831.

$\Rightarrow$ Demonstração Experimental em Sala de Aula: $\Leftarrow$


Chave
Circ. 1
Circ. 2
V_o
G
Linhas de Campo B

Michael Faraday (1791-1867): Inglês, Royal Institution. Deu contribuições fundamentais em Eletromagnetismo e Eletroquímica. Introduziu o conceito de linhas de força e de campo. Brilhante experimentalista.



OBSERVAÇÕES:

- Em regime estacionário o campo magnético não é capaz de produzir fenômeno elétrico ou força eletromotriz no circuito vizinho;

- A variação temporal do fluxo magnético no circuito 2 produzido pela abertura ou fechamento do circuito 1 induz uma força eletromotriz no circuito 2.

- A variação temporal do fluxo magnético no circuito 2 produzido pelo movimento relativo entre os dois circuitos ou pelo movimento relativo do circuito 2 em um campo magnético constante induz uma força eletromotriz no circuito 2.

Lei de Faraday: forma integral

Matematicamente essa lei é expressa na forma:

$$\text{f.e.m.} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \tag{15}$$

onde o fluxo magnético Φ_m é dado por:

$$\Phi_m = \int_{a(C)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$\rightsquigarrow$ Lê-se: a integral de caminho do campo elétrico $\mathbf{E}$ sobre um circuito fechado C, representando a força eletromotriz induzida (f.e.m.) nesse caminho C é igual ao negativo da taxa de variação temporal do fluxo magnético Φ_m.

$\rightsquigarrow$ O sinal $-$ deve-se a Lenz e indica que a f.e.m. tem sentido contrário ao da variação, na tentativa de, ao produzir corrente, contrabalançar a variação do fluxo e manter o fluxo constante.

IMPORTANTE:

$\rightsquigarrow$ O campo elétrico $\mathbf{E}$ que surge devido à indução pela variação do fluxo magnético não pode ser escrito na forma de um gradiente de potencial, como era o caso do campo eletrostático $\mathbf{E}_e$.

$\rightsquigarrow$ Lembre-se: o campo obtido por um gradiente de um escalar tem integral de circulação total nula, ou seja, o campo é irrotacional:

$$\oint \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{l} = \oint \nabla\phi \cdot d\mathbf{l} = 0$$

$\rightsquigarrow$ Este novo campo apresenta $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \neq 0$, e por isso não pode ser um campo gerado a partir do gradiente do potencial escalar ϕ. É o campo elétrico induzido.

$\rightsquigarrow$ Em breve será demonstrado que esse novo campo é solenoidal ou rotacional e não conservativo.

LEI DE FARADAY: FORMA DIFERENCIAL

Consideremos novamente a Lei de Faraday na sua forma integral:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \tag{16}$$

e sem perder a generalidade vamos assumir que a superfície a não varia no tempo para escrever:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\int_a \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \tag{17}$$

Agora aplicamos o teorema de Stokes:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_a \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = -\int_a \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$$

ou seja:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{18}$$

Exemplos e Aplicações

A Lei de Faraday é utilizada em inúmeras aplicações na Engenharia Elétrica e apenas para citar alguns exemplos:

- Máquinas Elétricas: motores e geradores
- Transformadores e Indutores
- Microfones, guitarra elétrica, outros dispositivos...

James Clerk Maxwell (1831-1879): Escocês. Universidade de Edimburgo e Cambridge. Contribuições fundamentais para o Eletromagnetismo e a Termodinâmica. Seu livro *A treatise on Electricity and Magnetism* (1873) é um marco.

Figure 1: James Clerk Maxwell e esposa Katherine em 1869.

Corrente de Deslocamento e Lei de Ampère-Maxwell

~ 1860 James Clerk Maxwell percebeu que a lei de Ampère continha um erro. Consideremos a equação da lei de Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

e tomemos o divergente dessa equação:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

Identidade vetorial: $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0$ para qualquer vetor $\mathbf{A}$, ou seja, o divergente do rotacional de um vetor é sempre nulo, de tal forma que isso implica:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

• Esse resultado somente é válido no caso em que $\partial\rho/\partial t = 0$, ou seja, quando não há variação no tempo.

Se $\partial\rho/\partial t \neq 0$ (regime variante no tempo) e $\nabla\cdot\mathbf{J} = 0$ simultaneamente, a conservação da carga elétrica será violada, e isso não ocorre experimentalmente.

Sabemos que:

$$\nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0 \tag{19}$$

$\rightsquigarrow$ Para compatibilizar a equação de Ampère com a conservação da carga elétrica, Maxwell adicionou o termo que falta para satisfazer a equação de continuidade:

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{H} = \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

Utilizando a lei de Gauss na forma diferencial, $\rho = \nabla\cdot\mathbf{D}$, tem-se:

$$\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{H} = \nabla\cdot\mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\mathbf{D} = 0$$

Uma vez que a derivada temporal e a divergência comutam:

$$\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \nabla \cdot \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \ .$$

Removendo o símbolo de divergência de ambos os lados, obtemos a lei de Ampère modificada, agora denominada lei de Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{20}$$

$\Rightarrow$ O termo $\partial \mathbf{D}/\partial t$ é chamado de corrente de deslocamento e só depende da variação temporal do campo elétrico.

$\Rightarrow$ Note que não somente uma corrente de condução $\mathbf{J}$ dá origem a um campo magnético, mas também a variação temporal do vetor elétrico $\mathbf{D}$ também.

Equações de Maxwell: forma diferencial e integral

As equações de Maxwell na sua expressão diferencial são dadas abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \ , \quad (21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \ , \quad (22)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ , \quad (23)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \ , \quad (24)$$

juntamente com as relações constitutivas:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (25)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \quad (26)$$

⇒ Tomando a divergência de (24) e utilizando (21) chega-se à Equação da Continuidade da carga elétrica:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \ . \tag{27}$$

⇒ A forma integral pode ser facilmente obtida a partir dos teoremas de Gauss e Stokes aplicados às equações acima:

$$\oint_a \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho \ dV \tag{28}$$

$$\oint_a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \tag{29}$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_a \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \tag{30}$$

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_a \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_a \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} \tag{31}$$

De forma geral em meios lineares e isotrópicos, a polarização e a magnetização podem ser escritas como uma convolução:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \int_{-\infty}^{\infty} \chi_e(t-\tau)\mathbf{E}(\tau)d\tau \tag{32}$$

$$\mathbf{M} = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_m(t-\tau)\mathbf{H}(\tau)d\tau \tag{33}$$

onde χ_e e χ_m são ditas susceptibilidades dielétrica e magnética do meio, respectivamente.

As expressões mostradas são para campos de variação geral no tempo, em meios lineares, em que a polarização $\mathbf{P}$ ou a magnetização $\mathbf{M}$ dependem diretamente do campo elétrico $\mathbf{E}$ ou magnético $\mathbf{H}$ aplicado.

Para o vácuo e meios lineares, isotrópicos e homogêneos vamos considerar uma forma mais simplificada:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

e então:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{34}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{35}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{36}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{37}$$

Equações de Maxwell no Regime Harmônico

Considerando-se o regime harmônico podemos escrever um campo vetorial na forma:

$$\mathbf{A}(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{A}(x,y,z)e^{i\omega t}\right]$$

onde $\mathbf{A}(x,y,z)$ é uma grandeza complexa, ou um fasor.

Todas as operações podem ser realizadas sobre a quantidade complexa, e então, tomar a parte real do resultado, dada a linearidade das operações com que trabalharemos.

Nesse caso:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}(x,y,z)e^{i\omega t}$$

$$\mathbf{B}(x,y,z,t) = \mathbf{B}(x,y,z)e^{i\omega t}$$

⇒ Tomar o regime harmônico é o equivalente à tomar a transformada de Fourier das equações de Maxwell em relação ao tempo, para ir para o domínio da frequência.

Para meios lineares e isotrópicos as relações entre $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ podem ser escritas na forma simplificada:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E} \tag{38}$$
$$\mathbf{B} = \mu(\omega)\mathbf{H} \tag{39}$$

onde $\varepsilon = \varepsilon_0[1+\chi_e(\omega)]$ é a permissividade dielétrica e e $\mu = \mu_0[1+\chi_m(\omega)]$ é a permeabilidade magnética do meio.

Para meios homogêneos ε e μ não dependem da posição, e fazendo essas considerações podemos escrever as equações de Maxwell no regime harmônico:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{40}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{41}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} \tag{42}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} \tag{43}$$

o que nos permite utilizar apenas os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$.

$\Rightarrow$ Qualquer campo com dependência temporal mais complicada pode ser decomposto em componentes de Fourier, para cada componente estudamos as equações de Maxwell no regime harmônico, e depois o resultado é a soma de todas as componentes.

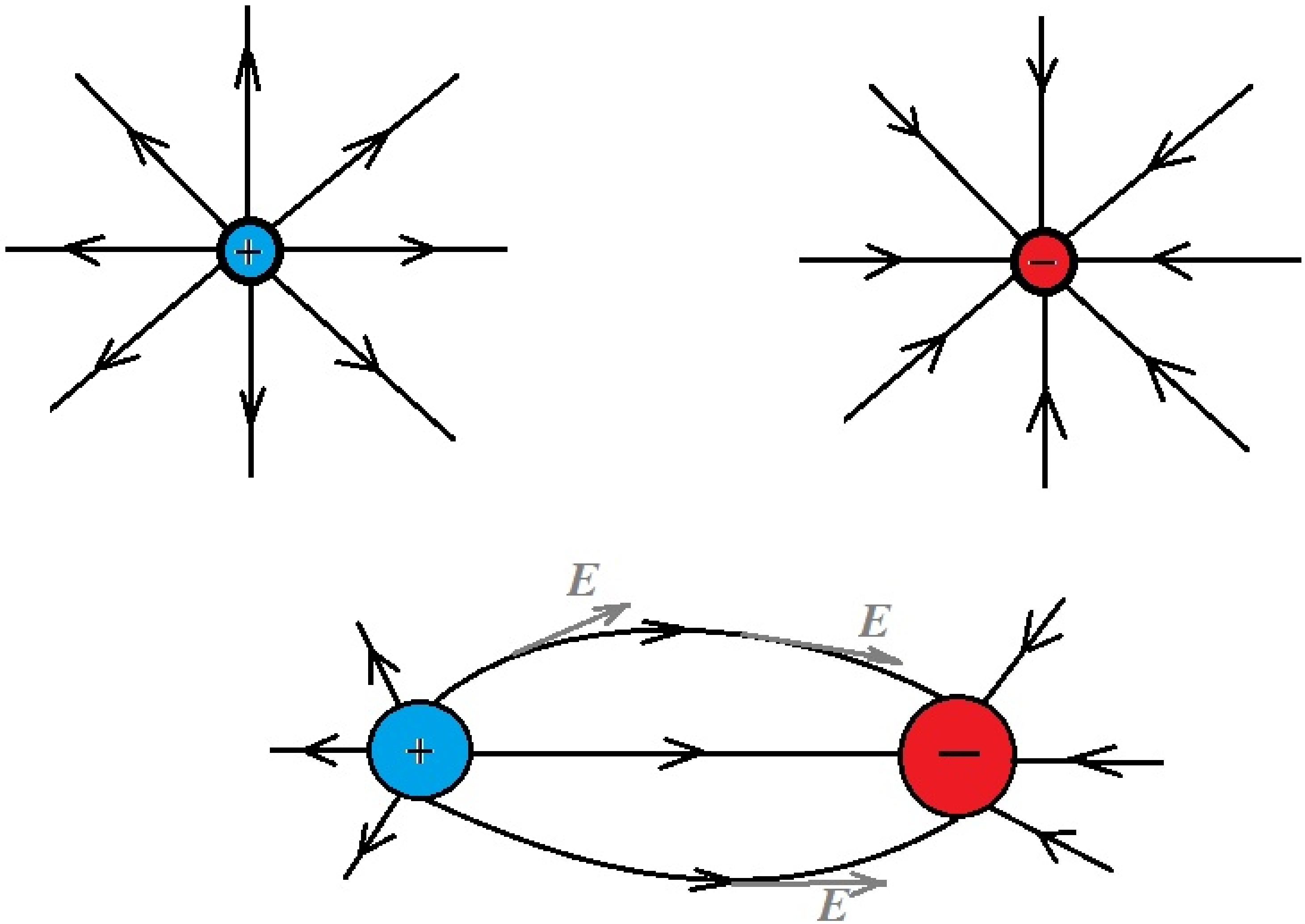
SIGNIFICADO FÍSICO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

- Lei de Gauss-Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \ .$$

$\Rightarrow$ Existe fonte de divergência para o campo elétrico nas densidades de cargas ρ. O campo diverge (nasce) nas densidades de carga positivas e converge (morre) nas densidades de carga negativas.

Linhas de Campo Elétrico com fonte de divergência:

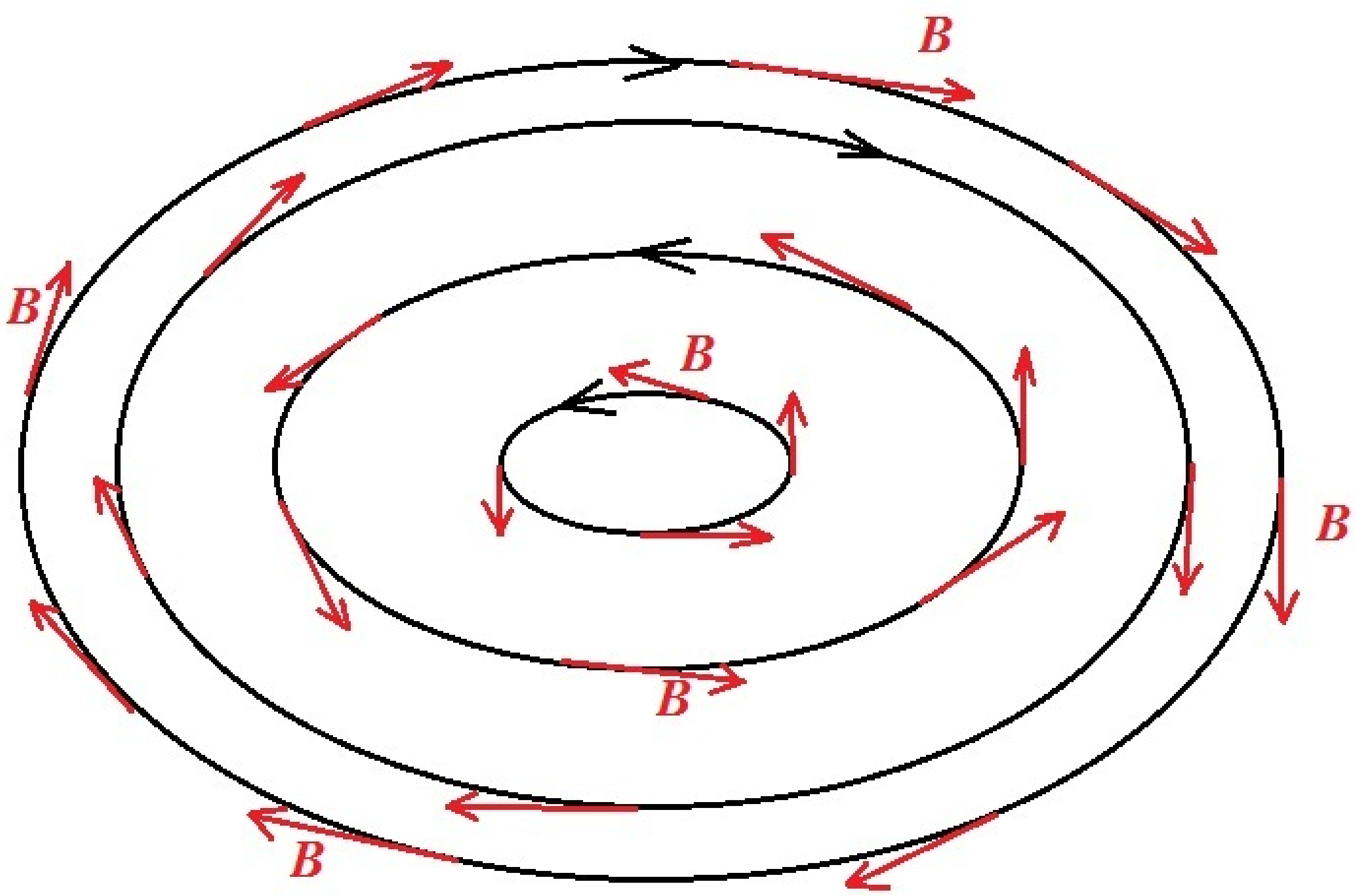


- Lei de Gauss magnetica ou Ausência do Monopolo Magnético

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \ .$$

$\Rightarrow$ Não há fonte de divergência para o campo magnético. Em outras palavras, não há monopolo magnético e as linhas do campo $\mathbf{B}$ devem ser fechadas. Isso significa que o campo magnético só pode ter natureza solenoidal.

Linhas de Campo Magnético $\mathbf{B}$ são fechadas

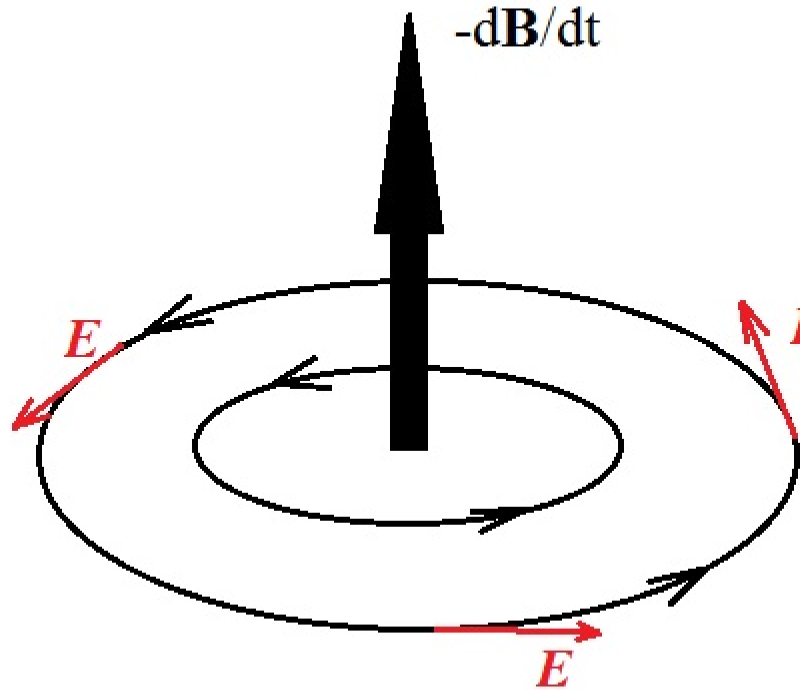


- Lei de Faraday-Lenz

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ O campo elétrico tem fonte de natureza solenoidal no negativo da variação temporal do campo magnético. Em outras palavras, a variação temporal do campo magnético induz um campo elétrico de natureza solenoidal, cujas linhas devem ser fechadas.

Linhas de campo elétrico geradas pela variação temporal do campo magnético, conforme a Lei de Faraday:



- Lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ O campo magnético tem fonte de natureza solenoidal nas densidades de corrente de condução $\mathbf{J}$ e nas densidades de corrente de deslocamento, que representam a variação temporal do vetor elétrico $\mathbf{D}$. Em outras palavras, tanto as cargas em movimento quanto a variação temporal do campo elétrico são capazes de produzir campo magnético de natureza solenoidal, cujas linhas devem ser fechadas.

Linhas de campo magnético geradas pela corrente $\mathbf{J}$ somada à variação temporal do campo elétrico conforme a Lei de Ampère-Maxwell: