O TEOREMA DE POYNTING E CONSERVAÇÃO DA ENERGIA

PROF. CÉSAR AUGUSTO DARTORA - UFPR

E-MAIL: CADARTORA@ELETRICA.UFPR.BR

CURITIBA-PR

Roteiro da Aula:

- Equações de Maxwell, Força de Lorentz e Densidade de Força
- Trabalho Realizado e Densidade de Potência
- Demonstração do Teorema de Poynting
- Interpretação Física das Quantidades Relevantes
- Vetor de Poynting em Regime Harmônico

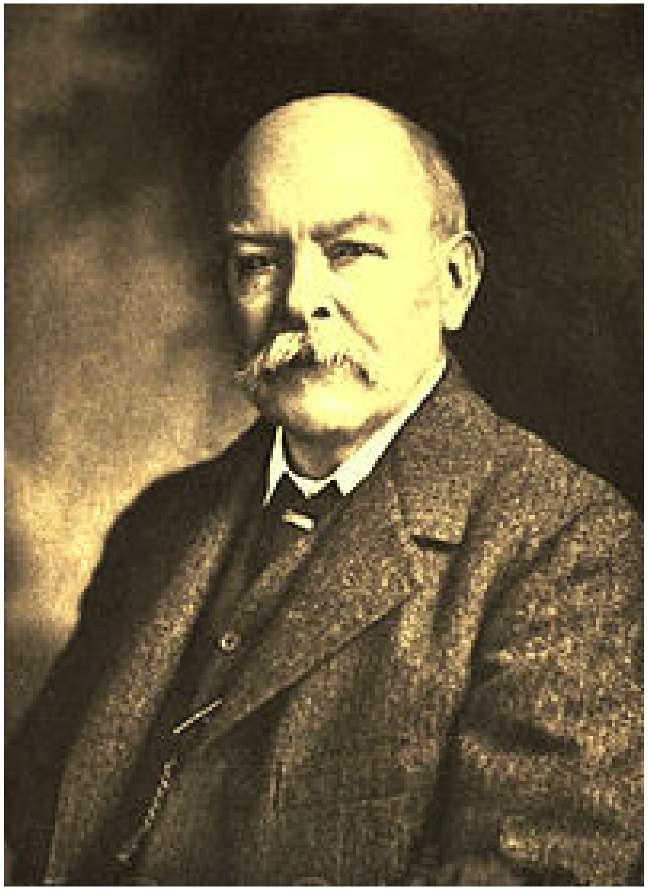
Leis de Conservação e o Vetor de Poynting

$\Rightarrow$ O campo eletromagnético é capaz de transportar energia, momento linear (quantidade de movimento análogo ao termo $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ de uma partícula) e momento angular, e portanto produz pressão e outros efeitos físicos.

É um ente físico real, com energia, momento linear e angular, e não meramente um artifício matemático utilizado para estudar problemas eletromagnéticos.

$\Rightarrow$ O teorema que iremos deduzir a partir de primeiros princípios, denominado Teorema de Poynting, devido ao físico que o obteve, está associado à conservação de energia em um sistema de cargas e campos.

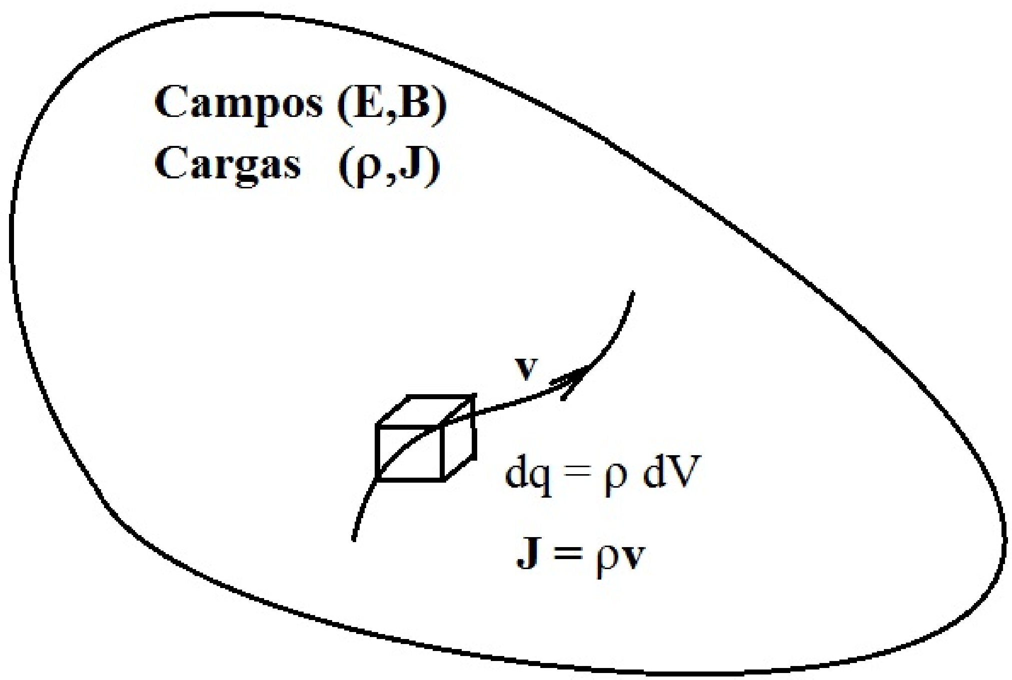
John Henry Poynting (1852-1914): Inglês, aluno de J.C. Maxwell, demonstrou a existência do vetor que leva seu nome.



Força de Lorentz: A força total exercida sobre uma partícula puntual de carga q é dada por

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{1}$$

Considere um volume V que pode ser particionado em elementos infinitesimais dV:



Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928): Holandês, Universidade de Leiden. Grandes contribuições para a eletrodinâmica das partículas e para a relatividade. As transformações relativísticas de referenciais inerciais levam seu nome. Prêmio Nobel de 1902 juntamente com Zeeman, foi presidente das 5 primeiras conferências de Solvay.

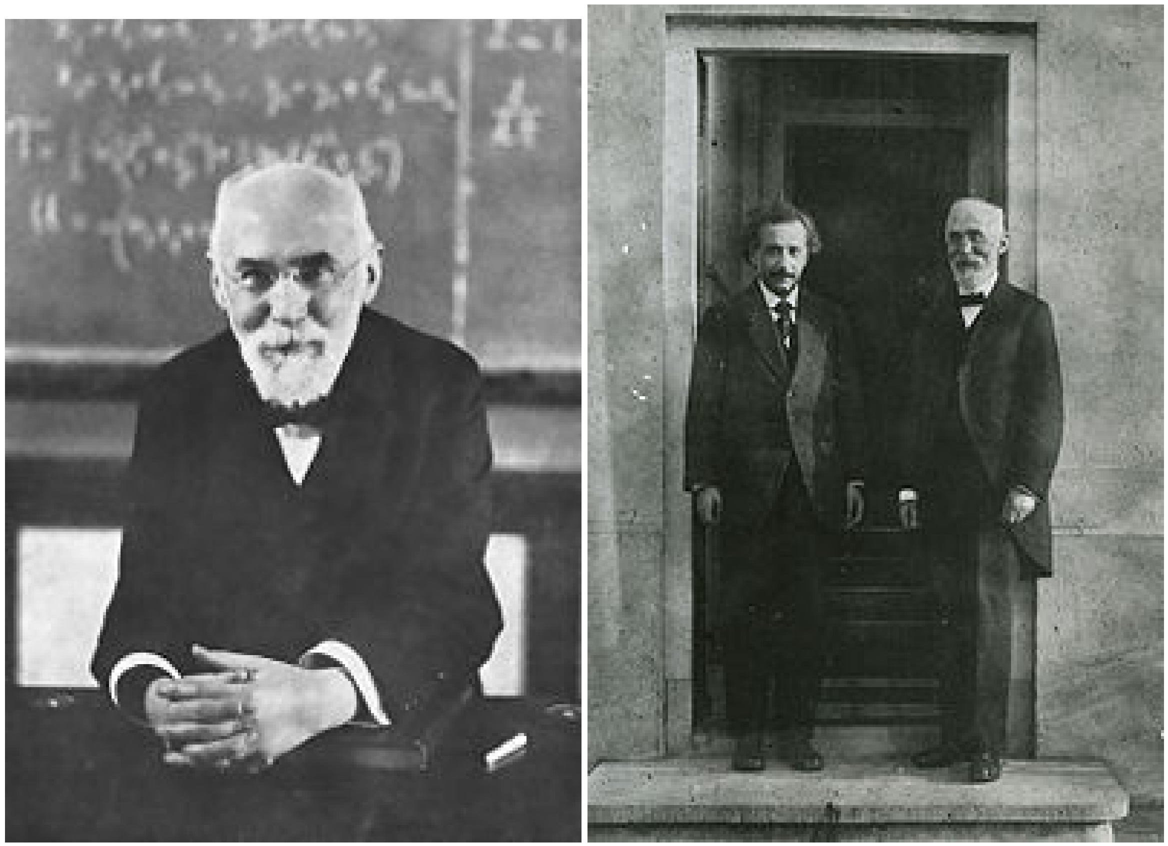


Figure 1: Foto da direita: com Einstein em 1921.

$\Rightarrow$ Um elemento infinitesimal dV contém uma carga do tipo ponto de valor $dq = \rho dV$, tal que possamos utilizar a força de Lorentz sobre esse elemento, para determinar a sua trajetória:

$$d\mathbf{F} = dq(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) = dV(\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \ , \tag{2}$$

A força total é simplesmente obtida integrando sobre o volume V:

$$\mathbf{F} = \int (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) dV \tag{3}$$

Nesse caso o termo $(\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})$ tem unidades de $[\mathrm{N}/\mathrm{m}^3]$ e portanto corresponde à uma densidade de força de Lorentz:

$$\vec{\mathcal{F}} = \rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \ . \tag{4}$$

O trabalho realizado pelos campos no sistema de partículas é simplesmente dado por:

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int \int (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}\ dV \tag{5}$$

Ainda é conveniente definir uma densidade de trabalho realizado, e neste caso temos simplesmente:

$$\mathcal{W} = \frac{dW}{dV} = \int (\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \tag{6}$$

o termo de força magnética não realiza trabalho, e por isso podemos escrever:

$$\mathcal{W} = \int \rho \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dt = \int dt \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \tag{7}$$

ou para a densidade de potência (potência é dada por $P = dW/dt$):

$$\mathcal{P} = \frac{dP}{dV} = \frac{d\mathcal{W}}{dt} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}\ . \tag{8}$$

Fazendo uso das equações de Maxwell:

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

podemos expressar a densidade de potência na forma:

$$\mathcal{P} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} \tag{9}$$

É conveniente ainda incluir um termo $\nabla \times \mathbf{E} + \partial \mathbf{B}/\partial t = 0$, que é um termo nulo para simetrizar as equações, de modo a obter uma identidade vetorial:

$$\mathcal{P} = \left(\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{E} - \left(\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{H} \tag{10}$$

Expandindo temos então:

$$\mathcal{P} = (\nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{E} - \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) - \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} \right) \qquad (11)$$

Utilizemos agora a seguinte propriedade vetorial:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \nabla \times \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} - \nabla \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{E}$$

e ainda, se $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$$

para finalmente obter:

$$\mathcal{P} = -\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \qquad (12)$$

A equação acima pode ser reescrita agora, na sua forma final e mais elegante:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \tag{13}$$

onde:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{14}$$

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu}\mathbf{B}^2\right) \tag{15}$$

Esta é a forma pontual da equação de conservação da energia, ou Teorema de Poynting.

⇒ O vetor $\mathbf{S}$ é o vetor de Poynting e tem unidades de potência por unidade de área, ou seja, corresponde a uma densidade de fluxo de energia [W/m^2] ou [J/$(s.\mathrm{m}^2)$], no SI.

⇒ Já u_{em} é uma densidade de energia eletromagnética, medida em [J/m^3] no SI.

⇒ O termo $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$ é o termo dissipativo para o campo eletromagnético, mas está associado à energia de movimento das partículas, pois podemos escrever:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\ . \tag{16}$$

$\Rightarrow$ Definindo a densidade de energia total do sistema u como a soma das densidades de energia associadas aos campos u_{em} e partículas $\mathcal{W}$:

$$u = u_{em} + \mathcal{W} \ ,$$

podemos colocar o teorema de Poynting na forma de uma **equação de continuidade para a energia**:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \ , \tag{17}$$

O vetor de Poynting é responsável pelo transporte de energia: se a densidade de energia total u diminui com o tempo em um ponto do espaço, significa que há energia fluindo para fora daquele ponto. Esta é transportada pelo vetor de Poynting.

Teorema de Poynting na forma integral:

Podemos colocar a equação (13) na sua forma integral(basta usar o teorema de Gauss, integrando sobre o volume):

$$\oint_a \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt}\int_V u \, dV = -\int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \, dV \qquad (18)$$

onde $d\mathbf{a}$ é o diferencial de superfície, a é a superfície que encerra o volume total V.

O termo $\oint_a \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$ representa o fluxo de energia eletromagnética que atravessa os contornos dovolume V, encerrado pela superfície de contorno a, na forma do vetor de Poynting.

Em outras palavras o fluxo de energia eletromagnética para fora de uma superfície a fechada, deve ser igual à diminuição da energia eletromagnética armazenada no interior do volume adicionada a uma taxa dissipativa de trabalho dos campos sobre as partículas.

Termos correspondentes em circuitos elétricos

$\Rightarrow$ A dissipação está contida no termo:

$$\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}dV = V_e I \ .$$

$\Rightarrow$ A energia armazenada na forma do campo elétrico está associada ao capacitor C e à diferença de potencial V_e:

$$\frac{1}{2}\int_V \varepsilon\mathbf{E}^2 dV = \frac{1}{2}CV_e^2 \ .$$

$\Rightarrow$ A energia armazenada na forma do campo magnético está associada ao indutor L e à corrente elétrica I:

$$\frac{1}{2}\int_V \frac{1}{\mu}\mathbf{B}^2 dV = \frac{1}{2}LI^2 \ .$$

$\Rightarrow$ O termo de radiação não tem análogo direto em circuitos:

$$P_{rad} = \lim_{r\to\infty}\oint_a \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} \ .$$

Vetor de Poynting em Regime Harmônico

$\Rightarrow$ Em regime harmônico interessa-nos a média sobre um período de oscilação, ou valor RMS do vetor de Poynting $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S}_{med} = \langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T (\mathbf{E}\times\mathbf{H})dt \ . \tag{19}$$

Fica como exercício demonstrar que

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right], \tag{20}$$

de acordo com os resultados mostrados na revisão de Vetores e Fasores.

Radiação Eletromagnética:

Vamos considerar o valor médio do teorema de Poynting:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_{med} = -\langle \frac{\partial u}{\partial t} \rangle = f(\mathbf{r}), \tag{21}$$

onde $f(\mathbf{r})$ atua como fonte para a divergência de $\mathbf{S}_{med}$ em analogia com a densidade de carga ρ em relação ao vetor $\mathbf{D}$.

Se pudermos assumir que $f(\mathbf{r})$ é dominada por um termo de fonte externa que cede energia ao sistema:

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}_{ext}] \ ,$$

desprezando outros efeitos temos como solução:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{4\pi}\int_{V'} f(\mathbf{r}')\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}dV' \ . \tag{22}$$

⇒ Para uma fonte puntual isotrópica colocada na origem podemos escrever:

$$f(\mathbf{r}) = P_0 \delta^3(\mathbf{r}) \ ,$$

onde P_0 é a potência emitida por essa fonte.

Substituindo em (23) nos dá como resultado:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{P_0}{4\pi r^2}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{r} \ . \tag{23}$$

⇒ Observe o decaimento na forma $1/r^2$. Esse resultado mantém-se para fontes não isotrópicas, na chamada região de campo distante, conforme será visto mais adiante.