Ondas Eletromagnéticas Planas e Uniformes

Prof. César Augusto Dartora - UFPR

E-mail: cadartora@eletrica.ufpr.br

Curitiba-PR

Roteiro da Aula:

- Um pouco de história
- Dedução da Equação de Ondas Eletromagnéticas
- Solução Geral da Equação de Ondas
- Relações entre $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ e $\mathbf{S}$

Sir Isaac Newton (1642-1727): Inglês, um dos maiores cientistas que o mundo já viu. Descobriu independentemente de Leibniz o Cálculo Diferencial, formulou as leis básicas da Mecânica Clássica Não-Relativística e a teoria da gravitação, além de seus estudos grandiosos sobre refração e reflexão em óptica. Deixou ainda como legado uma teoria corpuscular da luz (não ondulatória, portanto), que se veria mais adiante, estava incorreta. Sua autoridade retardou a aceitação de uma teoria ondulatória para a luz.

Figure 1: Retrato de Sir Isaac Newton.

Christiaan Huygens (1629-1695): Holandês, propôs com base em observações experimentais dele e de outros que a luz era um fenômeno ondulatório. Conhecido pelo princípio que leva seu nome, o princípio de Huygens, descobriu também a birrefringência. Discordava da teoria corpuscular de Newton.

Figure 2: Retrato de Huygens.

Expoentes da teoria ondulatória da luz:

$\Rightarrow$ Thomas Young e Augustin Fresnel - Experimentos com a luz evidenciam o caráter ondulatório.

Rightarrow Jean Foucault demonstrou que a luz se propagava mais rápido no ar do que na água, o que contrariava a teoria corpuscular de Newton, que previa o oposto.

$\Rightarrow$ J.C. Maxwell: A luz é uma onda eletromagnética! Encontrou o valor de c para o vácuo, com base em cálculos eletromagnéticos e pode comparar com os valores experimentais conhecidos da época. Veja o artigo:

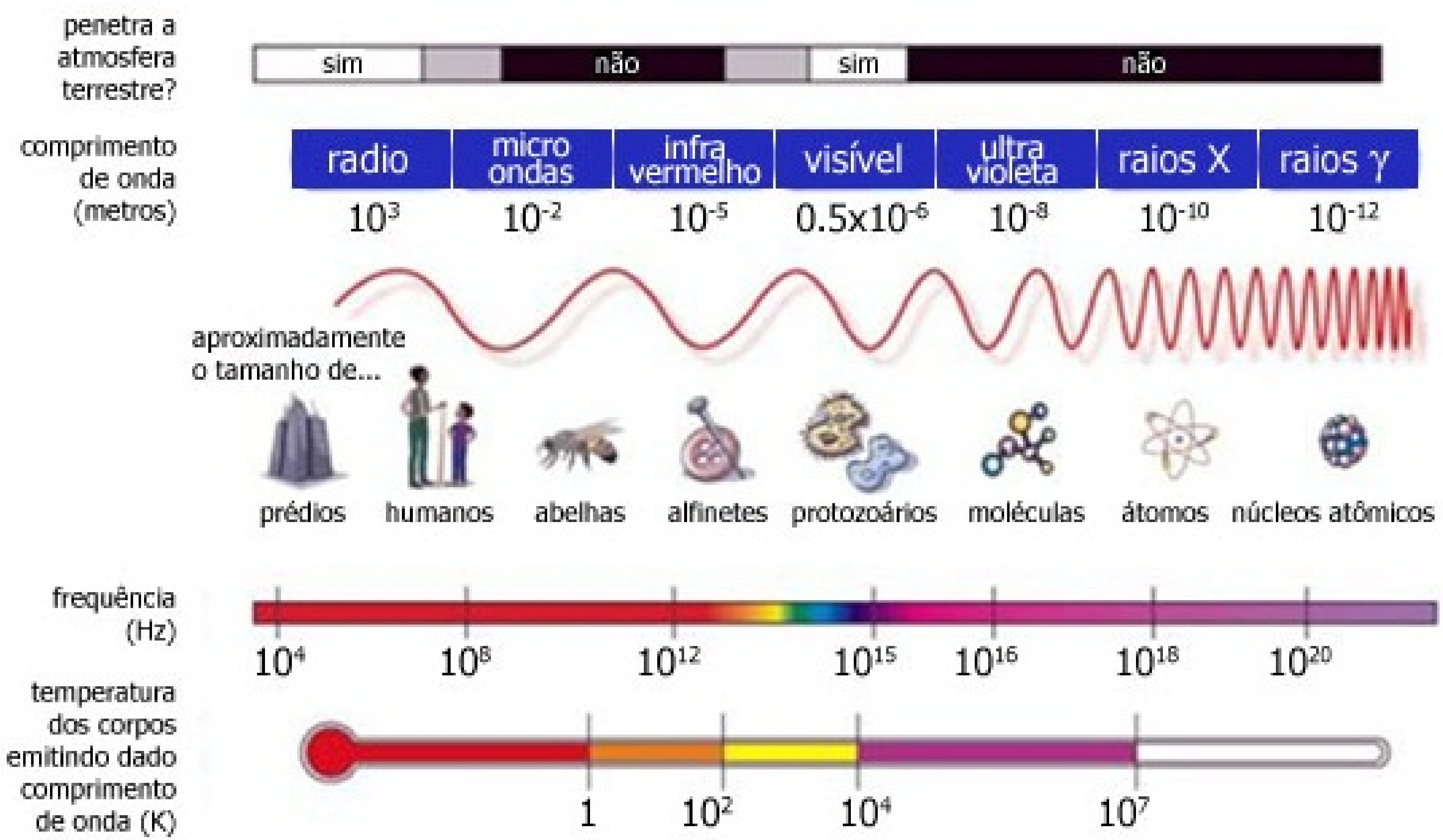
A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field, J.C. Maxwell, 1864, Philosophical Transactions of the Royal Society of London 155: 459-512.

$\Rightarrow$ A confirmação experimental dos resultados de Maxwell só veio em 1888, em experimentos conduzidos por Heinrich Hertz e independentemente por Oliver Lodge.

$\Rightarrow$ Tempos modernos: Planck, Einstein, Bohr e a Mecânica Quântica. Na interação com a matéria a luz pode se comportar como partícula mas propaga-se como onda - dualidade onda-partícula.

Heinrich Rudolf Hertz (1857-1894): Alemão, foi um dos primeiros a compreender a importância da teoria de Maxwell. Desenvolveu experimentos que confirmaram a existência das ondas eletromagnéticas no espectro do RF. Demonstrou a refração, reflexão e difração das ondas EM. Curiosamente descobriu também o aspecto corpuscular da luz: o efeito fotoelétrico, explicado em 1905 por A. Einstein.

O Espectro Eletromagnético



$\Rightarrow$ Ondas Eletromagnéticas são empregadas em:

• Comunicação: broadcasting de rádio e TV, internet guiada e wireless, comunicação via satélite, telefonia fixa e móvel, telefonia celular;

• Radar, Telemetria e Radioastronomia

• Sistemas de Telecomando: controle remoto.

• Medicina: RF, Infravermelho, Raios X, eliminação de tumores, cirurgias a laser.

• Equipamentos e usos industriais: forno de microondas, corte a laser, ensaios em materiais

3.1- As diversas faixa de frequência e suas características:

$\Rightarrow$ Órgão regulador do uso do espectro EM no Brasil: ANATEL.

www.anatel.gov.br

ELF (Ondas Megamétricas): corresponde a $30 \leq f \leq 300$ Hz, ou $10^4 \geq \lambda \geq 10^3$ km

• Aqui está frequência da rede elétrica. No Brasil ela é de 60Hz ($\lambda =$ 5000km).

VF (Banda de Voz): corresponde a $300 \leq f \leq 3000$ Hz, ou $10^3 \geq \lambda \geq 10^2$km

• O som audível para algumas pessoas vai até $15 - 20$kHz, porém a **Telefonia Analógica** definiu a banda base até 3400Hz: transmissão por par metálico e chavemento por relés

VLF(Ondas Muito Longas): corresponde a $3 \leq f \leq 30$ kHz, ou $10^2 \geq \lambda \geq 10$ km

LF(Ondas Longas):corresponde a $30 \leq f \leq 300$ kHz, ou $10 \geq \lambda \geq 1$ km

• VLF e LF tem aplicações militares (comunicação submarina). Emissão de sinal de relógio padrão em 125kHz e atualmente tem aplicações na tecnologia de RFID.

MF(Ondas Médias):corresponde a $300 \leq f \leq 3000$ kHz, ou $1000 \geq \lambda \geq 100$ m

• Radionavegação e broadcasting de AM (usualmente a faixa se extende de 550kHz a 1850kHz)

HF(Ondas Curtas): corresponde a $3 \leq f \leq 30$ MHz, ou $100 \geq \lambda \geq 10$ m

• Radionavegação, broadcasting de Rádio e Comunicações de Longa Distância por Ondas Celestes (ou Ionosféricas).

VHF(Ondas muito curtas): corresponde a $30 \leq f \leq 300$ MHz, ou $10 \geq \lambda \geq 1$ m

• Broadcasting de TV, Rádio FM $(88 - 108\text{MHz})$, Telefonia e Comunicações de Polícia, Radionavegação

• A partir do VHF predomina a comunicação via visada direta.

Faixa das Microondas

$\Rightarrow$ Compreende a faixa $300\text{MHz} \leq f \leq 300\text{GHz}$ ou $1\text{m} \geq \lambda \geq 1\text{mm}$. Subdivide-se em faixas:

• **UHF**: $0,3 \leq f \leq 3$ GHz ou $100 \geq \lambda \geq 10$cm. Aplicações: radares, comunicação de TV, forno microondas ($2,4$GHz), internet wireless ($2,4$GHz), comunicações via satélite, telefonia celular (faixas de 900MHz, 1800MHz, 2100MHz).

• **SHF** $3-30$GHz e **EHF** $30-300$GHz. Aplicações: radar, comunicações militares, via satélite e de curta distância.

Outra nomenclatura das bandas de microondas:

Designação	Faixa (GHz)
L	1.0 - 2.0
S	2.0 - 4.0
C	4.0 - 8.0
X	8.0 - 12.0
Ku	12.0 - 18.0
K	18.0 - 27.0
Ka	27.0 - 40.0
R	26.5 - 40.0
Q	33.0 - 50.0
V	40.0 - 75.0
W	75.0 - 110.0
Milimétricas	110.0 - 300.0
Infravermelho, visível e ultra violeta	10^3 - 10^7

Ondas Submilimétricas: 300-3000 GHz, também chamada radiação de terahertz ou banda T.

- Espectro pouco explorado. Possiveis aplicações médicas, em química e bioquímica e comunicações no futuro.

Região do Infravermelho (IR): situa-se entre 0.3-375 THz ($100 \geq \lambda \geq 0,8\mu$m) e compreende a banda T.

- Tem importantes aplicações na medicina e nas comunicações ópticas.

- Tipicamente a fibra óptica opera nas faixas de $0,9\mu$m , 1.3μm e $1,55\mu$m , denominadas janelas ópticas.

Espectro Visível:

• Olho humano é capaz de detectar ondas na faixa de 375-790 THz ou seja, $800 \geq \lambda \geq 379$ nm.

• Oftalmologia: estudo da física e fisiologia do olho, melhoramento de lentes corretivas, aplicações de laser em cirurgias corretivas, etc

• Aplicações em mouses ópticos, cortes a laser, semáforos, comunicação de última milha em fibras plásticas, etc.

• A frequência f aumenta ($\lambda = c/f$ diminui) do vermelho para o violeta.

Região do Ultravioleta (UV): entre 790-22500 THz, ou $379 - 13$ nm.

• É capaz de ionizar gases atmosféricos e causa danos à saúde, mas tem aplicações em medicina, fabricação de dispositivos, etc.

Raios X e Raios Gama: $f > 22500$ THz ou $\lambda < 13$ nm, são altamente energéticos e ionizantes.

• Utilizados em Medicina (aparelho de raio X, radioterapia) e para ver a estrutura da matéria, estão presentes nos Raios cósmicos.

A energia transportada por uma OEM pode se propagar de duas formas principais:

$\Rightarrow$ Ondas Guiadas (Guided Waves);

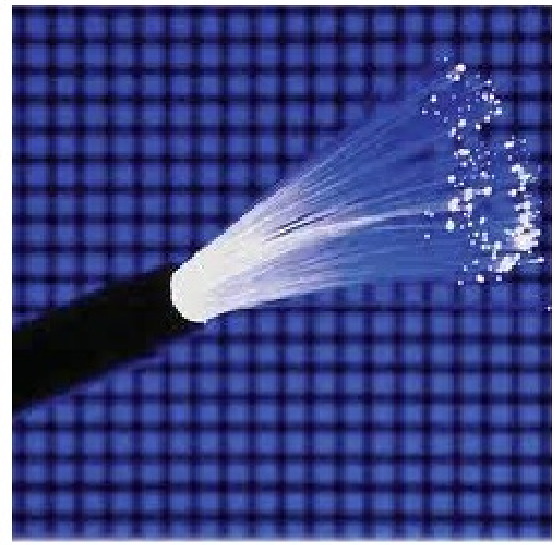
$\Rightarrow$ Ondas Não-Guiadas (Wireless);

$\rightsquigarrow$ Na **Propagação Não-Guiada** predominam dois fenômenos ondulatórios - **Atenuação e Difração** em espaço livre.

$\rightsquigarrow$ A **Propagação Guiada** é capaz de compensar a difração (no sentido mais amplo da palavra), todavia introduz o fenômeno de **Dispersão temporal**.

Comparação entre o sistema guiado e não-guiado:

(a) Sistema Wireless



(b) Sistema Guiado

Uso de Sistemas Não-Guiados

• No sistema não-guiado a onda é radiada (emitida) por uma antena e espalha-se pelo espaço. A dens. de potência decai na forma $1/r^2$. Mais suscetível à influência do ambiente (condições atmosféricas, obstáculos eventuais...). Usos:

- Broadcasting de rádio e TV;
- Internet via rádio
- Telefonia Móvel Celular;
- Sistemas de Radar Civil e Militar, Sensoreamento remoto;
- Teleguiamento de objetos, aplicações militares;
- Comunicação via satélite, links de visada direta;
- Conexões locais wireless, etc;

Uso de Sistemas Guiados

$\Rightarrow$ Utiliza um guia de onda(cabo coaxial, fibra óptica). Excluindo situações em que o uso de ondas guiadas não é possível (Radar, Telefonia Móvel, Broadcasting, etc) ondas guiadas tem maior confiabilidade, com a contra-partida de maior custo de implementação e manutenção.

- TV a cabo e Internet banda larga via cabo;
- Telefonia e Transmissão de Dados;
- Comunicações Transoceânicas de altas taxas de transmissão por fibra óptica;
- Transmissão de Potência em 60Hz;
- Redes locais, Redes de longas distâncias;

Formas de Abordagem para o estudo de Propagação de OEM

$\rightsquigarrow$ **Óptica Geométrica:** negligencia a difração. Ondas são representadas por raios. Aplica-se bem em algumas situações em que $d >> \lambda$ e distâncias propagadas relativamente pequenas.

$\rightsquigarrow$ **Óptica Física/Teoria da Difração Escalar:** negligencia-se o caráter vetorial das ondas eletromagnéticas. Muito útil no domínio óptico.

$\rightsquigarrow$ **Equações de Maxwell:** leva em conta tanto o aspecto ondulatório quanto o caráter vetorial das ondas eletromagnéticas.

Dedução da Equação de Ondas Eletromagnéticas

Partindo das equações de Maxwell na forma abaixo(para um meio homogêneo, linear e isotrópico):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \tag{1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{4}$$

e tomando simultaneamente o rotacional em (3) e (4) temos:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\mu \nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{5}$$

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \varepsilon \nabla \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{6}$$

As derivadas temporais e o rotacional são comutáveis $\Rightarrow \nabla \times \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times$.

Utilizando a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$, obtemos:

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{H}) \tag{7}$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{H}) - \nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{E}) \tag{8}$$

Considerando as equações de Maxwell na forma (1)-(4), e substituindo nas equações (7) e (8):

$$\nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right) \tag{9}$$

$$-\nabla^2 \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right) \tag{10}$$

Separando agora as fontes dos campos, ficamos com:

$$\left(\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{E} \; = \; \nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon}\right) + \mu \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \; , \tag{11}$$

$$\left(\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{H} \; = \; -\nabla \times \mathbf{J} \; . \tag{12}$$

Jean le Rond D'Alembert (1717=1783): Francês, estudou equações diferenciais parciais, dentre elas a equação de ondas, dentre outras contribuições fundamentais à matemática. O operador de ondas leva seu nome.

Figure 3: Retrato de D'Alembert.

O operador de ondas muitas vezes é representado pelo símbolo

$$\Box = \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$$

e é dito operador de D'Alembert, ou D'Alembertiano. $\mu\varepsilon = 1/c^2$.

$\rightsquigarrow$ ρ e $\mathbf{J}$ podem ser intrínsecas ao meio, ou também induzidas pelos campos que incidem no meio.

Caso mais simples: Meio Macroscopicamente Neutro $\Rightarrow \rho = 0$ e obedecendo a LEI VETORIAL DE OHM:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \tag{13}$$

onde σ é a condutividade do material.

Obtém-se nesse caso as seguintes equações de onda:

$$\left(\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \, , \tag{14}$$

$$\left(\nabla^2 - \mu\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \, . \tag{15}$$

$\rightsquigarrow$ Tais equações representam a propagação de campos eletromagnéticos em meios nos quais $\mathbf{J}$ deve-se ao próprio campo. Neste sentido o termo à direita nas equações representa as perdas da onda para o material.

$\Rightarrow$ No vácuo ou meios dielétricos ideais não há perdas $(\sigma = 0)$ resultam as equações:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0 \tag{16}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{H} = 0 \tag{17}$$

$\Rightarrow$ Por outro lado, em bons condutores $\mu\varepsilon\partial^2/\partial t^2 << \mu\sigma\partial/\partial t$ então:

$$\nabla^2\mathbf{E} = \mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \tag{18}$$

Esta última é a Equação de Difusão (Não tem soluções ondulatórias verdadeiras)!!

A solução da Equação de Ondas no Vácuo

Vamos buscar a solução mais simples possível para o campo eletromagnético no vácuo, onde $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = 0$.

Sejam as equações de Maxwell no vácuo:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \ , && (19) \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \ , && (20) \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \ , && (21) \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \ , && (22) \end{aligned}$$

juntamente com a equação de ondas para o campo elétrico no vácuo:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E} = 0$$

⇒ Observando a lei de Gauss:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0\ ,$$

vamos assumir uma forma para o campo elétrico que a satisfaça automaticamente:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t)=E_x(z,t)\hat{\mathbf{a}}_x\quad ,\forall(x,y,z,t) \tag{23}$$

ou seja, o campo elétrico só tem componente na direção x e esta somente depende de (z,t). Nesse caso a equação de ondas é dada por:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)E_x(z,t)=0$$

⇝ Já estudamos essa equação no capítulo de Ondulatória. O método de solução usual é a separação de variáveis.

⇝ Em regime harmônico (variações do tipo $e^{i\omega t}$) a solução geral pode ser escrita como:

$$E_x(z,t)=(Ae^{ikz}+Be^{-ikz})e^{i\omega t}$$

sendo $k^2=\omega^2/c^2$ (relação de dispersão),A e B são constantes complexas. O termo e^{ikz} representa onda contra-propagante e e^{-ikz} uma onda propagante.

$\rightsquigarrow$ Para o que segue assumimos que:

$$A = 0 \ \text{ e } \ B = E_0 e^{i\theta_0}, E_0 = E_0^*$$

de forma que, na forma vetorial:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} \exp[i(\omega t - kz + \theta_0)] \tag{24}$$

Podemos perceber que a onda possui as seguintes características:

- Amplitude , dada por E_0
- Polarização $\Rightarrow$ demonstra o caráter vetorial, nesse caso, $\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x}$
- Fase $\phi(z,t) = \omega t - kz + \theta_0$, que depende de (z,t).

$\Rightarrow$ Considerando somente a parte real da solução acima temos:

$$\mathbf{E}_R(z,t) = E_0 \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} \cos(\omega t - kz + \theta_0)$$

Lembre ainda que do termo de fase $\phi(z,t) = \omega t - kz + \theta_0$ tiramos as seguintes informações:

Frequência:

$$\omega = 2\pi f$$

Comprimento de onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

e utilizando a relação de dispersão $k^2 = \omega^2/c^2$:

$$ck = \omega$$

podemos facilmente mostrar que:

$$c = \lambda f$$

$\rightsquigarrow$ Para o que segue vamos assumir $\theta_0 = 0$, sem perder generalidade.

$$\mathbf{E}_R(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x}$$

$\rightsquigarrow$ Consideremos agora a função em todo o espaço para $t = 0$:

$$E_x(z = 0, t) = E_0 \cos(-kz) = E_0 \cos(kz) \tag{25}$$

Esta função também é cossenoidal e podemos daqui definir o comprimento de ondas λ (ou período espacial):

Comprimento de Onda λ: é a menor distância espacial entre duas frentes de onda distintas para os quais a diferença de fase é igual a 2π em um dado instante de tempo, i.e.,

$$\phi(z,t) - \phi(z+\lambda,t) = [\omega t - kz + \theta_0] - [\omega t - k(z+\lambda) + \theta_0] = k\lambda = 2\pi$$

de onde vem:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Note que o número de onda k pode ser interpretado como uma frequência espacial.

Velocidade de Fase

$\rightsquigarrow$ Um observador estático em uma dada posição z perceberá o campo elétrico (e também magnético da onda) variar senoidalmente, ou seja, naquele ponto há mudança de fase à medida que o tempo passa.

$\rightsquigarrow$ Para que um observador acompanhe um plano de fase constante $\phi(z,t) = \phi_0 = cte$, o mesmo tem que se deslocar com velocidade constante, chamada *velocidade de fase, v_p*. Sendo $\phi_0 = cte$:

$$\phi_0 = \omega t - kz \Rightarrow d\phi_0 = 0 = \omega dt - kdz$$

$$\frac{dz}{dt} = v_p = \frac{\omega}{k} = c$$

$\rightsquigarrow$ Verifica-se daí que a onda se propaga para $+z$: à medida que o tempo t passa, para que a fase medida por um observador seja constante $\phi_0 = \omega t - kz$ ele deve se deslocar para $+z$, de tal modo que a diferença $\omega t - kz$ se mantenha constante.

$\rightsquigarrow$ Uma onda contra-propagante, que vai para $-z$ tem fase dada em geral, por $\phi(z,t) = \omega t + kz + \theta_0$. $t\uparrow$ implica $z\downarrow$ para que um observador acompanhe um plano de fase constante.

Voltando agora para a solução na forma complexa:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} e^{i(\omega t - kz + \theta_0)}$$

Sabemos que a mesma satisfaz a equação de ondas, mas devemos ainda determinar $\mathbf{H}$ e verificar se a mesma satisfaz todas as equações de Maxwell.

Pela lei de Faraday em regime harmônico temos:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H} \Rightarrow \mathbf{H} = i\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\omega\mu}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} \quad (26)$$

como $\mathbf{E}$ só tem componente $E_x(z,t)$, resulta que

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} = -ikE_0 e^{i(\omega t - kz + \theta_0)}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}$$

e temos portanto:

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu_0} E_0 \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} e^{i(\omega t - kz + \theta_0)}$$

$\rightsquigarrow$ Veja que $\mathbf{E}$ é medido V/m e $\mathbf{H}$ em A/m.

Definição: Impedância do Espaço Livre Z_0:

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{k}{\omega\mu_0} = \frac{\omega}{\omega c_0\mu_0} = \frac{1}{c_0\mu_0} \ .$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = 2.9979 \times 10^8 \mathrm{m/s} \approx 3 \times 10^8 \mathrm{m/s} \ .$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \approx 377\Omega = 120\pi \ \Omega \tag{27}$$

Portanto:

$$\mathbf{E}(z,t) = E_0 \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} e^{i(\omega t - kz + \theta_0)}$$
$$\mathbf{H} = \frac{E_0}{Z_0} \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} e^{i(\omega t - kz + \theta_0)}$$

Verifique que esta solução satisfaz todas as eqs. de Maxwell no vácuo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \mathrm{e} \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H} \quad \mathrm{e} \quad \nabla \times \mathbf{H} = i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$\Rightarrow$ Algumas conclusões:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(z,t) &= E_0\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x}e^{i(\omega t-kz+\theta_0)}\\ \mathbf{H}(z,t) &= \frac{E_0}{Z_0}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}e^{i(\omega t-kz+\theta_0)}\end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ são ortogonais entre si.

$\rightsquigarrow$ São ortogonais à direção de propagação $z \Longrightarrow$ A onda EM plana uniforme é transversal.

Calculando o vetor de Poynting:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) = \frac{E_0^2}{2Z_0}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} \tag{28}$$

$\rightsquigarrow$ A energia se propaga na direção z, através do vetor de Poynting $\mathbf{S}_{med}$.

$\rightsquigarrow$ A onda é dita Eletromagnética pois: para haver transporte de energia, através de $\mathbf{S}$ deve haver $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$. É transversal pois a perturbação $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ é ortogonal à direção de propagação!

$\Rightarrow$ Para uma ONDA PLANA UNIFORME: $\mathbf{E}\perp\mathbf{H}\perp\mathbf{S}_{med}$.

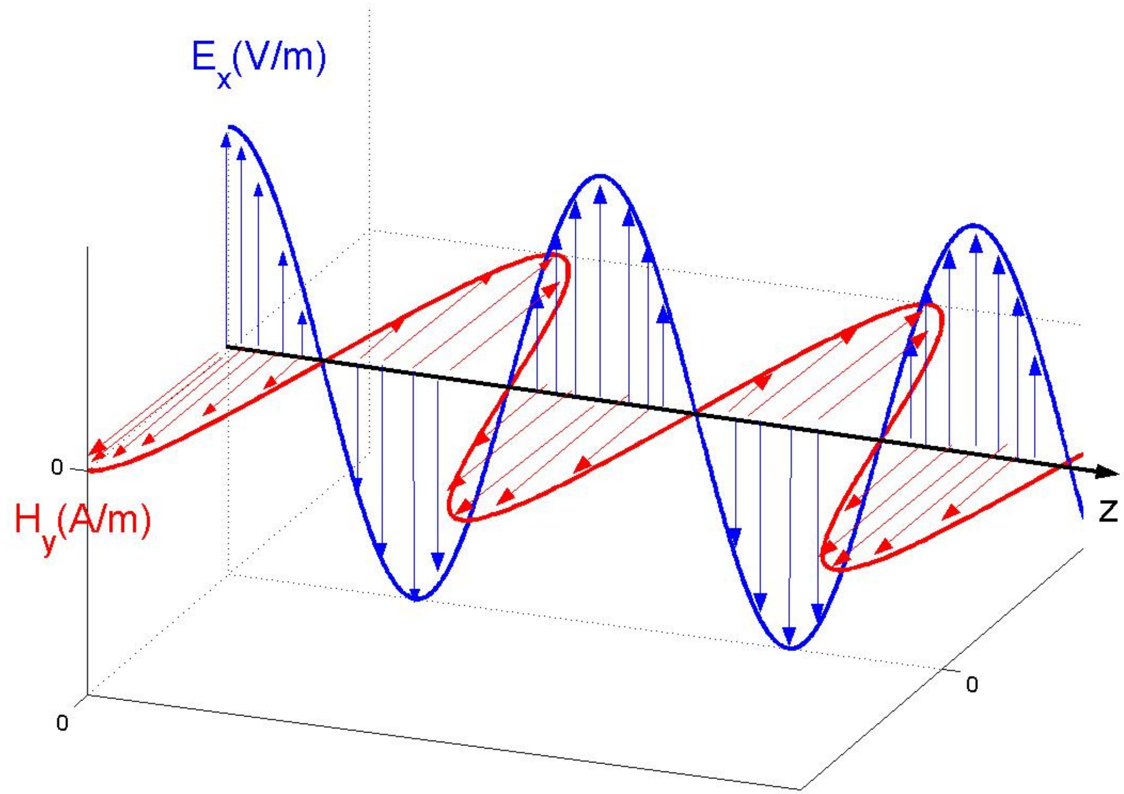


Figure 4: Onda Eletromagnética Plana Uniforme. Os gráficos mostram os campos $E_x(z,t=0)$ e $H_y(z,t=0)$(em função de z, para $t=0$). Observe que à medida que o tempo passa a figura é transladada no sentido positivo do eixo z.

Solução da Equação de Ondas no Caso Geral

⇒ Devemos lembrar que um campo com variação temporal qualquer pode ser representado por uma superposição (ou soma) de frequências, na forma:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathbf{E}(x,y,z,\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{29}$$

$$\mathbf{H}(x,y,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathbf{H}(x,y,z,\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{30}$$

onde $F(\omega)$ é o espectro de frequências contido no campo EM. Podemos decompor o campo nas componentes espectrais contidas nele e fazer a análise individual de cada harmônica (isso vale para meios lineares):

⇒ Para passarmos ao regime harmônico (ou fazer a transformada de Fourier), basta fazer as substituições

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow -\omega^2$$

em (14) e (15)

Equações de onda no domínio da frequência $\Rightarrow$ **Equações de Helmholtz**:

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon\right) \mathbf{E}(x,y,z) = i\omega\mu\sigma\mathbf{E}(x,y,z) \tag{31}$$

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon\right) \mathbf{H}(x,y,z) = i\omega\mu\sigma\mathbf{H}(x,y,z) \tag{32}$$

É possível escrever ainda em forma mais compacta as equações de Helmholtz, definindo uma **Permissividade Dielétrica Complexa**:

$$\varepsilon_c = \varepsilon\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \tag{33}$$

de tal forma que (31) e (32) possam ser reescritas conforme abaixo:

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_c\right) \mathbf{E}(x,y,z) = 0 \tag{34}$$

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_c\right) \mathbf{H}(x,y,z) = 0 \tag{35}$$

$\leadsto$ É bom lembrar que os parâmetros μ e ε_c podem variar com a frequência.

Herman Ludwig von Helmholtz (1821-1894): Alemão, foi médico e físico. Estudou a teoria de Maxwell e deduziu soluções da equação de ondas que leva seu nome. Fez contribuições em termodinâmica e também no estudo da visão e da audição. Teve como aluno Heinrich Hertz.

$\rightsquigarrow$ Conforme mostrado antes, tanto $\mathbf{E}$ quanto $\mathbf{H}$ cumprem com a equação de ondas.

$\rightsquigarrow$ Todavia os campos devem satisfazer também as equações de Maxwell, o problema original.

$\rightsquigarrow$ Uma vez determinado $\mathbf{E}$ através da eq. de Helmholtz, devemos determinar $\mathbf{H}$ por sua relação com o campo $\mathbf{E}$, dado nas equações de Maxwell. Para tal é interessante utilizar a Lei de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

No domínio da frequência pode ser escrita como:

$$\mathbf{H} = i \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\omega \mu} \tag{36}$$

conforme já utilizado antes.

$\rightsquigarrow$ Outra questão importante: devemos determinar o valor médio do vetor de Poynting $\mathbf{S}_{med}$:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} \tag{37}$$

Equação a ser resolvida:

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_c\right) \mathbf{E}(x,y,z,t) = 0$$

Considere a solução anterior:

$$\mathbf{E}(z,t) = (E_0 \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}) e^{i(\omega t - kz + \theta_0)} = (E_0 \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}}) e^{i\phi(z,t)}$$

Vamos tentar generalizar a solução, pelo método de indução.

$\leadsto$ Primeiro veja que a fase é dada por:

$$\phi(z,t) = \omega t - kz + \theta_0$$

Um dado valor de fase $\phi(z,t)$ em um tempo qualquer t em um dado valor z descreve a equação do plano para a qual a fase assume valor constante em todo o plano (x,y) no valor fixado (z,t), tal que:

$$z = \frac{\omega t - \phi + \theta_0}{k}$$

$\rightsquigarrow$ Lembrando que a equação geral do plano é dada por:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} = d$$

onde

$\rightsquigarrow$ $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1)$ normal ao plano.

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{r} = (x, y, z)$ é o vetor de posição

$\rightsquigarrow$ d é uma constante real qualquer

vamos supor um plano geral, no lugar de $z = d$:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} = \frac{\omega t - \phi + \theta_0}{k}$$

Dessa forma:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \omega t - k\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + \theta_0$$

Além disso, é preciso considerar a polarização. Devemos trocar o vetor constante $E_0\mathbf{\hat{a}_x}$ por um vetor complexo geral $\mathbf{E}_0$, que pode absorver o termo de fase geral $e^{i\theta_0}$. Propõe-se como solução geral então:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t} e^{-ik\mathbf{\hat{n}}\cdot\mathbf{r}} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k\mathbf{\hat{n}}\cdot\mathbf{r})} \tag{38}$$

onde $\mathbf{E}_0$ é um vetor complexo constante e o vetor de onda $\mathbf{k}$ é definido por

$$\mathbf{k} = k\mathbf{\hat{n}} = k_x\mathbf{\hat{a}_x} + k_y\mathbf{\hat{a}_y} + k_z\mathbf{\hat{a}_z} = (k_x, k_y, k_z), \tag{39}$$

e além disso

$$\mathbf{r} = \mathbf{\hat{a}_x} + y\mathbf{\hat{a}_y} + z\mathbf{\hat{a}_z} = (x,y,z),$$

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

Exercícios:

1- Demonstre que:

$$\nabla\left(e^{i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r})}\right) = -ik\hat{\mathbf{n}}e^{i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r})}$$
$$\nabla^2\left(e^{i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r})}\right) = -k^2 e^{i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r})}$$

2- Demonstre que (38) satisfaz a equação de ondas homogênea

$$\left(\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon_c\right)\mathbf{E} = 0$$

desde que $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = k^2 = \omega^2\mu\varepsilon_c$.

3- O que representa o vetor $\hat{\mathbf{n}}$?

A solução geral da Eq. de Helmholtz é então:

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \tag{40}$$

onde $\mathbf{E}_0$ é um vetor complexo constante e

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} \tag{41}$$

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}} \tag{42}$$

sendo $\hat{\mathbf{n}}$ é um vetor unitário que aponta na direção de $\mathbf{k}$.

$$\hat{\mathbf{n}} = (n_x, n_y, n_z)$$

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Agora que temos $\mathbf{E}$ precisamos determinar $\mathbf{H}$ através de (36):

$$\mathbf{H} = i\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\omega\mu} = i\frac{\nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})}{\omega\mu}$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{E}_0$ é um vetor constante. Podemos utilizar uma identidade vetorial:

$$\nabla \times (\Phi\mathbf{A}) = \nabla\Phi \times \mathbf{A} + \Phi\nabla \times \mathbf{A}$$

onde fazemos:

$\rightsquigarrow$ $\Phi = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{A} = \mathbf{E}_0$

Portanto:

$$\nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \nabla(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \times \mathbf{E}_0 + e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\nabla \times \mathbf{E}_0 = \nabla(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \times \mathbf{E}_0.$$

Utilizando :

$$\nabla(e^{i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r})}) = -ik\hat{\mathbf{n}}e^{i(\omega t - k\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r})}$$

obtém-se

$$\nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = -i\mathbf{k}e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \times \mathbf{E}_0 = -i\mathbf{k} \times (\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = -i\mathbf{k} \times \mathbf{E}$$

Substituindo na eq. para $\mathbf{H}$, tem-se:

$$\mathbf{H} = i\frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\omega\mu} = i\frac{\nabla \times (\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})}{\omega\mu} = i\frac{-i\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega\mu} =$$

$$= \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega\mu},$$

e colocando o vetor de onda na notação módulo e vetor unitário temos:

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}$$

Def.: Impedância Característica do Meio Z

Substituindo k por (41)e simplificando tem-se:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \qquad (43)$$

Finalmente temos como resultado:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega\mu} = \frac{1}{Z}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \qquad (44)$$

Vamos verificar agora pela equação de Maxwell $\nabla\cdot\mathbf{E}=0$ que $\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}}=0$:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0=\nabla\cdot\left(\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right)=\nabla\left(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right)\cdot\mathbf{E}_0+e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\nabla\cdot\mathbf{E}_0$$

$\rightsquigarrow$ $\mathbf{E}_0$ é constante, e a sua divergencia é nula, portanto temos, utilizando o resultado para o gradiente, o seguinte resultado:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0=\nabla\left(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\right)\cdot\mathbf{E}_0=-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}=-ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E}=0$$

de onde a única solução possível é:

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E}=0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0 \tag{45}$$

Podemos facilmente mostrar também que:

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{H}=0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{H}=0 \tag{46}$$

Conclusão Importante: das duas últimas equações vemos que tanto $\mathbf{E}$ quanto $\mathbf{H}$ devem ser ortogonais à direção de propagação $\hat{\mathbf{n}}$ (ou equivalentemente ao vetor de onda $\mathbf{k}$).

⇒ Vamos calcular agora o **vetor de Poynting**:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\mathbf{E}\times\left(\frac{1}{Z^*}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^*\right)\right\}$$

Utilizando o triplo produto vetorial:

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\mathbf{C}$$

temos

$$\mathbf{E}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^*) = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*)\hat{\mathbf{n}} - (\mathbf{E}\cdot\hat{\mathbf{n}})\mathbf{E}^*$$

Utilizando os resultados anteriormente obtidos, temos:

$$\mathbf{E}\times(\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}^*) = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*)\hat{\mathbf{n}}$$

e finalmente:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z^*}\right\}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*)\hat{\mathbf{n}} \tag{47}$$

Pode-se mostrar também que:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{Z\}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*)\hat{\mathbf{n}} \tag{48}$$

$\rightsquigarrow$ IMPORTANTE: As relações (47) e (48) só valem para ondas planas uniformes. Para uma superposição qualquer deve-se utilizar a forma geral:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\}$$

⇒ Vamos agora sumarizar os principais resultados e tirar as conclusões pertinentes:

- Dada a equação de Helmholtz para o campo elétrico (regime harmônico $e^{i\omega t}$):

$$\left(\nabla^2 + \omega^2 \mu \varepsilon_c\right) \mathbf{E}(x,y,z) = 0$$

e a equação de Maxwell para determinar o campo magnético:

$$\mathbf{H} = i \frac{\nabla \times \mathbf{E}}{\omega \mu};$$

- Temos por solução de **Onda Eletromagnética Plana Uniforme**:

$$\mathbf{E}(x,y,z) = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r})} \quad \text{e} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} \tag{49}$$

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{k}}{k} \ ; \ k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_c} \ ; \ Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon_c}} \tag{50}$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left\{ \frac{1}{Z^*} \right\} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \hat{\mathbf{n}} \tag{51}$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad \text{e} \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H} = 0 \tag{52}$$

- De (49), como o campo magnético é obtido através de um produto vetorial entre $\hat{\mathbf{n}}$ e $\mathbf{E}$, sabemos que $\mathbf{H}$ é ortogonal aos outros dois;

- De (51) concluímos que a energia eletromagnética se propaga na direção de $\mathbf{k}$, haja vista que a direção do vetor de Poynting é $\hat{\mathbf{n}}$. A intensidade da densidade de potência é proportional ao módulo do campo ao quadrado.

- De (52) concluimos que para uma onda plana a direção de propagação da energia $\hat{\mathbf{n}}$ é ortogonal tanto a $\mathbf{E}$ quanto a $\mathbf{H}$.

- Portanto $\hat{\mathbf{n}}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ formam uma tríade de vetores ortogonais entre si. Como a perturbação $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ é ortogonal à direção de propagação a onda é dita transversa (característica das ondas planas muito importante);

Equações de Ondas Planas Uniformes: outra forma de obtê-las

⇒ No caso geral as equações de Maxwell, são um conjunto de equações diferenciais.

⇒ Para ondas planas uniformes elas reduzem-se a um conjunto de relações algébricas.

⇒ Uma forma simples de obtê-las é fazer uso das seguintes substituições:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to i\omega \ ,$$

$$\nabla \to -i\mathbf{k} \ ,$$

já que a onda plana uniforme tem dependência na forma $e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ e os operadores diferenciais atuam sobre esta exponencial apenas.

Desse modo não é difícil ver que, para meios lineares com densidade macroscópica de cargas nula ($\rho = 0$) e satisfazendo $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \ , \tag{53}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0 \ , \tag{54}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega\mu\mathbf{H} \ , \tag{55}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon_c\mathbf{E} \ , \tag{56}$$

onde $\varepsilon_c = \varepsilon - i\sigma/\omega$ é a permissividade dielétrica complexa previamente definida.

Exemplo: Para a lei de Ampère-Maxwell temos:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Fazendo as seguintes substituições:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega \ ,$$

$$\nabla \rightarrow -i\mathbf{k} \ ,$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

temos:

$$(-i\mathbf{k}) \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon (i\omega) \mathbf{E}$$

Agora basta colocar em evidência o termo $(i\omega)\mathbf{E}$ no lado direito e dividir toda a equação por $-i$.

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega\varepsilon \left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right) \mathbf{E} = -\omega\varepsilon_c \mathbf{E} \ .$$

Fica como exercício demonstrar para as outras equações.

Exercícios:

1 Uma onda plana em um meio não-magnético sem perdas tem campo elétrico dado por:

$$\mathbf{E} = 50\sin(10^8 t + 2z)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} \text{ mV/m} ,$$

onde t é dado em segundos e z é dado em metros. Encontre:
a) a representação complexa de $\mathbf{E}$ e a orientação de propagação da onda;
b) λ, f e o índice de refração do meio;
c) o campo $\mathbf{H}$, tanto na forma complexa quanto no domínio temporal.

2 Considere uma onda eletromagnética plana e uniforme no vácuo cujo vetor campo elétrico seja dado por:

$$\mathbf{E} = (342\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} - 477i\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z})\exp\left\{i\left(10^{10}t - k_0 x\right)\right\} \ \mu\text{V/m}$$

onde t é dado em segundos e (x, y, z) em metros . Determine:
a) a direção de propagação $\mathbf{n}$, a frequência $f = \omega/(2\pi)$ e o comprimento de ondas λ_0.
b) a parte real de $\mathbf{E}$, esboçando a trajetória desse vetor no plano $x = 0$. Diga qual a sua polarização.
c) o campo magnético $\mathbf{H}$ e o seu valor em módulo, H_0.

d) a densidade de potência média transportada por essa onda, em módulo.

3 Considere o campo elétrico de uma onda eletromagnética monocromática no vácuo, dado abaixo:

$$\mathbf{E} = 10\cos(5x)e^{i(\omega t-12z)}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}\mathrm{mV/m} \ .$$

x e z são medidos em metros e t em segundos. a) Este campo corresponde a uma onda plana uniforme? Por que? Se sua resposta é não, encontre uma representação como superposição de ondas planas.
b) Determine a frequência f em hertz.
c) Determine o campo magnético $\mathbf{H}$.
d) Determine a densidade de potência média transportada por esta onda. Em que direção se propaga a densidade de potência média?