Ondas Eletromagnéticas em Meios Materiais

Prof. César Augusto Dartora - UFPR

E-mail: cadartora@eletrica.ufpr.br

Curitiba-PR

Roteiro da Aula:

- Ondas em Dielétricos Ideais
- Ondas em Dielétricos Reais
- Ondas em Meios Condutores
- Ondas em Meios com $\sigma \sim \omega\varepsilon$

Análise da Propagação de Ondas em Meios Materiais

Da relação de dispersão,

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = \beta - i\alpha$$

sabemos que k é complexo e depende das características do meio, pois

$$\varepsilon_c = \varepsilon\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

bem como a impedância do meio, $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon_c}$.

Para uma onda plana uniforme propagante em uma direção arbitrária $\hat{\mathbf{n}}$ em um meio qualquer temos:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \beta\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x})}$$

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E} = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E} = \frac{1}{Z}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\omega\mu}{k}\,\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{n}} = Z\,\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{n}}$$

Vamos assumir ondas propagantes na direção positiva de z, ou seja, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}$, tal que:

$$\mathbf{E}_0 = E_{0x}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} + E_{0y}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}$$

Para o que segue vamos escolher $E_{0x} = E_0$ e $E_{0y} = 0$, de forma que:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \tag{1}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z} E_0 e^{i(\omega t - kz)}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \tag{2}$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z^*}\right\}|\mathbf{E}|^2\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} \tag{3}$$

Precisamos agora avaliar k e Z. Observe que:

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = \beta - i\alpha$$

$\rightsquigarrow$ k é dita constante de propagação [1/m]

$\rightsquigarrow$ β é chamada constante de fase [1/m ou rad/m]

$\rightsquigarrow$ α é dita constante de atenuação [1/m ou np/m]

$\rightsquigarrow$ Já que para um meio sem perdas $k = \beta = 2\pi/\lambda$, generalizamos a relação:

$$\beta = \mathrm{Re}(k) = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Do ponto de vista da propagação de ondas eletromagnéticas:

O que define se um meio é dielétrico ideal, dielétrico real ou condutor é a relação entre corrente de condução e corrente de deslocamento. Essa relação é chamada tangente de perdas do meio.

$\rightsquigarrow$ Assumindo que a corrente de condução $\mathbf{J}$ obedece a lei de Ohm: $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$.

$\rightsquigarrow$ A corrente de deslocamento $\mathbf{J}_D = \partial\mathbf{D}/\partial t$ em regime harmônico é dada por

$$\mathbf{J}_D = i\omega\varepsilon\mathbf{E}$$

Define-se então:

$$\tan\theta_p = \frac{|\mathbf{J}|}{|\partial\mathbf{D}/\partial t|} = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$$

Essa relação define o comportamento do meio. Veja que a tangente de perdas aparece na definição de ε_c:

$$\varepsilon_c = \varepsilon\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)$$

Meios Dielétricos Ideais ou Meios Sem Perdas ($\sigma = 0$)

No caso de materiais dielétricos e magnéticos sem perdas, ou seja, ideais, temos as seguintes expressões para as constantes de propagação, perdas e impedância:

$$\alpha = 0 \ \ ; \ \ \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{4}$$

$$k = \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} \tag{5}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{6}$$

Temos então, os campos propagantes na direção z positiva:

$$\mathbf{E} = E_0 \ e^{-i\beta z} \ \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \tag{7}$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \, E_0 \ e^{-i\beta z} \ \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \tag{8}$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \, E_0^2 \ \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} \tag{9}$$

Definindo a constante de propagação no vácuo:

$$k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \tag{10}$$

e considerando-se o fato de que a velocidade de fase é dada por:

$$c = \frac{\omega}{k} = \lambda f$$

Lembramos algumas relações da óptica:

$\rightsquigarrow$ Índice de Refração n:

$$c = \frac{c_0}{n} \quad \text{ou} \quad n = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{\beta}{k_0} \tag{11}$$

temos:

$$n = \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{\mu_0\varepsilon_0}} \tag{12}$$

Definindo valores relativos $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$ e $\mu_r = \mu/\mu_0$ temos:

$$n = \sqrt{\mu_r\varepsilon_r} \tag{13}$$

Em dielétricos ideais e não-magnéticos, $\mu_r = 1$ $(\mu = \mu_0)$ e

$$n = \sqrt{\varepsilon_r} \tag{14}$$

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

$$Z = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}}$$

Um caso particular desse caso é o próprio Vácuo:

$$\varepsilon_r = 1$$

$\Rightarrow$ Em muitos casos o ar atmosférico é considerado como sendo aproximadamente o vácuo, como primeira aproximação.

Meios Dielétricos Reais ou com Pequenas Perdas($\sigma << \omega\varepsilon$)

$\rightsquigarrow$ Em dielétricos reais não magnéticos ($\mu_r = 1$), $\sigma \neq 0$ embora $\sigma << 1$. Para um meio comportar-se como dielétrico porém, basta que

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} << 1$$

predominando a corrente de deslocamento. Nesse caso, utilizando a seguinte aproximação

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$$

temos:

$$k = \beta - i\alpha \approx \omega\sqrt{\mu\varepsilon} - i\,\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{15}$$

$$\alpha = \frac{\sigma Z_0}{2\sqrt{\varepsilon_r}} \quad \text{e} \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k_0\sqrt{\varepsilon_r} \tag{16}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\left(1 + i\,\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) \approx \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} \tag{17}$$

A onda propagada nesse meio tem, no sentido positivo de z, as seguintes expressões:

$$\mathbf{E} = E_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}z\right] e^{-i\beta z}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} \tag{18}$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\left(1 - i\ \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon}\right) E_0 \exp\left[-\frac{1}{2}\sigma\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}z\right] e^{-i\beta z}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} \approx \frac{E_0}{Z_0}\sqrt{\varepsilon_r} e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} \tag{19}$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{2Z_0}\ E_0^2 \exp\left(-2\alpha z\right)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} \tag{20}$$

$\rightsquigarrow$ Observando as expressões de campo em um dielétrico real: $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ ficam ligeiramente defasados entre si, mas esta pode ser até mesmo negligenciada já que mas não há uma influência significativa na densidade de potência.

$\rightsquigarrow$ As perdas são dependentes de σ e são levadas em conta pela constante α.

$\rightsquigarrow$ Definição. Comprimento de Penetração δ:

É a distância necessária para a intensidade de campo cair a $1/e$ ($\approx 37\%$) do valor em $z = 0$. Dada por ser:

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \tag{21}$$

Para um dielétrico real, será dada por:

$$\delta = \frac{2\sqrt{\varepsilon_r}}{\sigma Z_0}$$

Exemplo: Para um material na frequência de $f = 3\times 10^9$ Hz ($\lambda = 10$cm), com as seguintes características: $\varepsilon_r = 4$, $\mu_r \approx 1$, $\sigma = 10^{-6}\ \Omega^{-1}$m^{-1} temos:

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = 1.498\times 10^{-6} << 1$$

de forma que a penetração da onda nesse meio é da ordem de

$$\delta = \frac{2\sqrt{4}}{10^{-6}}\frac{1}{377}\ \mathrm{m} = 10.6\mathrm{km}$$

ou seja,

$$\delta >> \lambda$$

o que significa que a onda se propaga muitos comprimentos de onda em um dielétrico real, e portanto, dielétricos não são bons isolantes para ondas eletromagnéticas.

Meio Condutor ($\sigma >> \omega\varepsilon$)

O meio condutor ideal possui condutividade infinita ($\sigma \to \infty$).

Vamos nos concentrar nos casos em que $\sigma >> \omega\varepsilon$, ou seja,

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$$

em um condutor predomina a corrente de condução. é muito grande. Dessa forma temos:

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

e podemos escrever:

$$k = \beta - i\alpha \approx \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}(1-i) \tag{22}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1+i) \tag{23}$$

Aqui o campo magnético fica em defasagem evidente (-45^o) em relação ao campo elétrico e temos:

$$\mathbf{E} = E_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right] \exp\left[-i\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right] \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} \tag{24}$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}(1-i)E_0 \exp\left[-\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right] \exp\left[-i\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right] \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} \tag{25}$$

$$\mathbf{S}_{med} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\mu}}\, E_0^2 \exp\left[-2\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}z\right] \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} \tag{26}$$

Observamos que o campo magnético assume valores bastante altos, dado que é multiplicado por $\sqrt{\sigma}$.

O comprimento de penetração de campo será dado por:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

Esta é distância em um condutor onde o valor do campo cai do valor para um valor de $\approx 37\%$ do campo inicial.

Essa é a essência do **efeito skin ou pelicular** dos condutores: os campos e correntes ficam somente na superfície do condutor a altas frequências.

Para exemplificar, vamos supor $f = 1$ MHz, $\mu = \mu_0$ e a condutividade do alumínio $\sigma \approx 3.54 \cdot 10^7\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$:

$$\delta \approx 8.5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} = 85\ \mu\mathrm{m}$$

ou seja, um campo eletromagnético incidindo numa chapa de aluminio de $1\ \mathrm{mm}$ não passaria para o outro lado, o que sugere que os condutores são bons isolantes para ondas eletromagnéticas.

Aqui tem-se em geral

$$\delta << \lambda$$

Meios com Perdas e Condutividade da ordem $\sigma \sim \omega\varepsilon$

Aqui devem resultar expressões gerais para α e β. Da definição :

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon_c} = \beta - i\alpha = \omega\sqrt{\mu\varepsilon\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}$$

Colocando na forma polar a parte complexa, e fazendo os cálculos necessários, chegamos a:

$$k = \beta - i\alpha \tag{27}$$

$$\alpha = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1} \tag{28}$$

$$\beta = \omega\sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1} \tag{29}$$

Para a impedância do meio temos:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon\left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)}}$$

e após as manipulações matemáticas, podemos escrever:

$$Z = r + ix \tag{30}$$

sendo

$$r = \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon\left(1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}+1} \tag{31}$$

$$x = \sqrt{\frac{\mu}{2\varepsilon\left(1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}\right)}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1} \tag{32}$$

Os campos propagantes na direção z positiva são da forma geral:

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \tag{33}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{Z} E_0 e^{-\alpha z} e^{-i\beta z}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} \tag{34}$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z^*}\right\} E_0^2 e^{-2\alpha z}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} \tag{35}$$

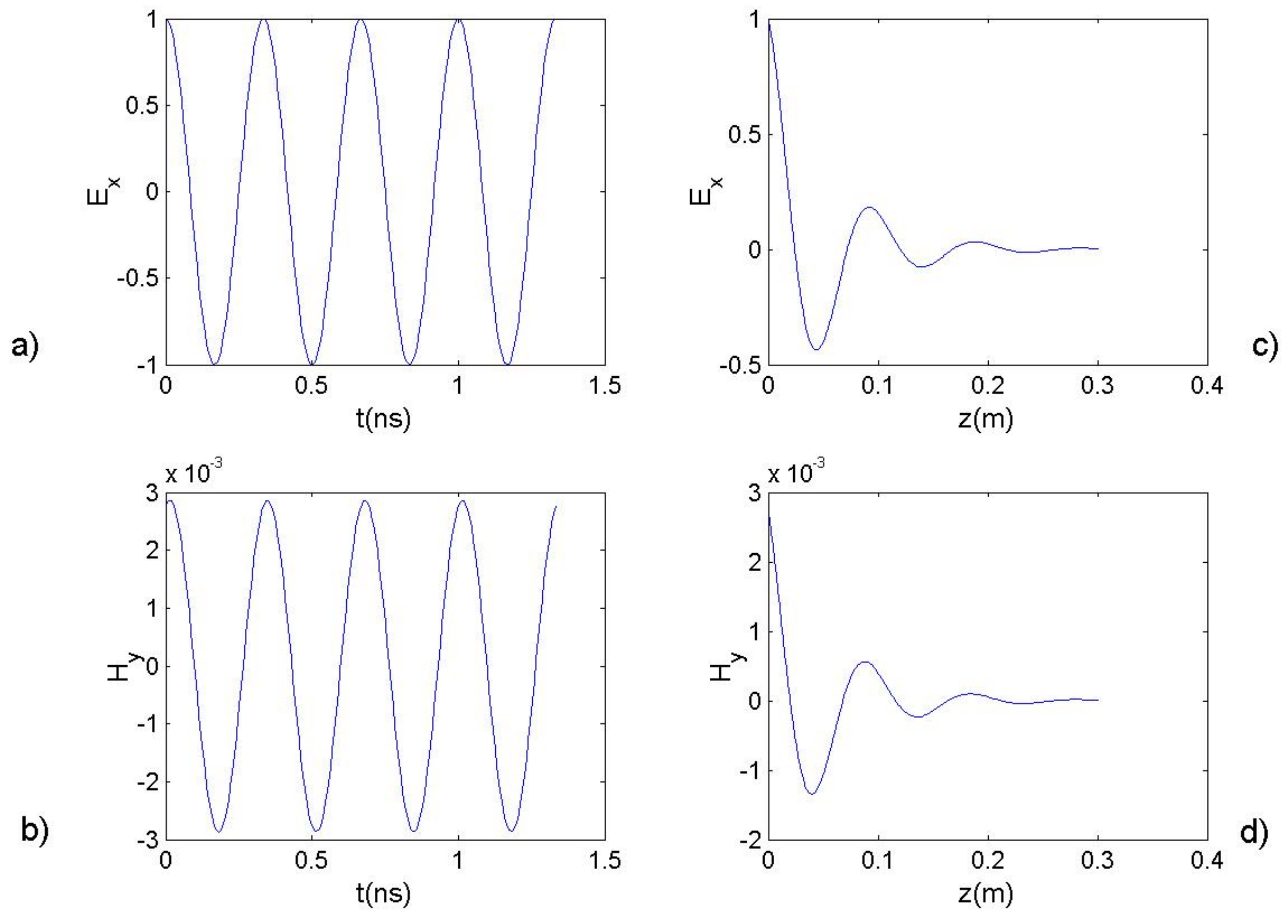

Figure 1: Campos Elétrico e Campo Magnético de uma Onda Plana em meio com perdas $\sigma \sim 1$. a) e b) mostram **E** e **H** em $z = 0$ e para todo t, respectivamente; c) e d) mostram **E** e **H** em $t = 0$ para todo z, respectivamente. Os campos decaem enquanto se propagam em z.