Polarização de Ondas Eletromagnéticas

Prof. César Augusto Dartora - UFPR

E-mail: cadartora@eletrica.ufpr.br

Curitiba-PR

Roteiro da Aula:

- Representação Geral da Polarização de Ondas Eletromagnéticas
- Polarização Linear
- Polarização Circular

Representação Geral da Polarização de Ondas Eletromagnéticas

Consideremos a solução geral de ondas planas uniformes propagando-se em uma direção arbitrária $\hat{\mathbf{n}}$:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-\alpha\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}} e^{i(\omega t - \beta\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x})}$$

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E} = 0$$

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{H} = \frac{k}{\omega\mu}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E} = \frac{1}{Z}\hat{\mathbf{n}}\times\mathbf{E}$$

$$\mathbf{E} = \frac{\omega\mu}{k}\,\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{n}} = Z\,\mathbf{H}\times\hat{\mathbf{n}}$$

Definição: Polarização de uma onda eletromagnética indica o caráter vetorial da onda e é sempre obtida a partir da orientação do vetor campo elétrico $\mathbf{E}$.

Queremos agora encontrar uma solução geral para o vetor $\mathbf{E}_0$, sendo conhecido $\hat{\mathbf{n}}$. Da equação:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} = 0$$

é fácil ver que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}_0 = 0$$

A solução vetorial mais geral para esta equação é a superposição linear de vetores $\mathbf{E}_0$ contidos no plano normal à $\hat{\mathbf{n}}$:

$$\mathbf{E}_0 = E_1 \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{1} + E_2 \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{2}$$

onde $\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{1}$ e $\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{2}$ são vetores unitários que formam uma base ortonormalizada no plano normal à $\hat{\mathbf{n}}$, ou seja:

$$\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{1} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{1} = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{2} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{2} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$$

$$\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{1} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{2} = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{1} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{2} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

$$\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{1} \times \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{2} = \hat{\mathbf{n}}$$

Lembrando ainda que

$$|\mathbf{E}_0| = E_0 = \sqrt{|E_1|^2 + |E_2|^2}$$

é possível definir

$$E_1 = E_0 \cos(\varphi) e^{i\theta_1}$$

$$E_2 = E_0 \sin(\varphi) e^{i\theta_2}$$

de tal forma que possamos escrever:

$$\mathbf{E} = E_0[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{1} + \sin(\varphi)e^{i\gamma}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{2}]e^{-\alpha\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x}}e^{i(\omega t - \beta\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{x} + \theta_1)}$$

onde θ_1 é dita fase global e

$$\gamma = \theta_2 - \theta_1$$

é a fase relativa entre as componentes nas direções $\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{1}$ e $\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{2}$

Por simplicidade vamos assumir ondas propagantes na direção positiva de z, ou seja, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}$, tal que:

$$\mathbf{E} = E_0[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + \sin(\varphi)e^{i\gamma}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}]e^{-\alpha z}e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)} \tag{1}$$

$$\mathbf{H} = \frac{E_0}{Z}[-\sin(\varphi)e^{i\gamma}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + \cos(\varphi)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}]e^{-\alpha z}e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)} \tag{2}$$

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z^*}\right\}|\mathbf{E}|^2\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} \tag{3}$$

Polarização Linear

A polarização linear será obtida quando $e^{i\gamma} = \pm 1$, ou seja, a fase relativa será dada por

$$\gamma = m\pi \quad , m = 0, \pm 1, \pm 2 ...$$

Por simplicidade vamos escolher $m = 0$ e $\theta_1 = 0$:

$$\mathbf{E} = E_0[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + \sin(\varphi)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}]e^{-\alpha z}e^{i(\omega t - \beta z)} \tag{4}$$

cuja parte real vale:

$$\mathbf{E}_R = E_0[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + \sin(\varphi)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}]e^{-\alpha z}\cos(\omega t - \beta z) \tag{5}$$

$\leadsto$ Observe que tanto a componente E_x quanto E_y estão em mesma fase, e portanto o campo resultante oscila sobre uma linha reta contida no plano (x, y) formando um ângulo φ com o eixo x - daí o nome de Polarização Linear.

Obviamente o campo magnético oscila sobre uma linha perpendicular a esta, ou seja, uma linha que forma um ângulo φ com o eixo y.

$\rightsquigarrow$ Se definirmos o eixo x como eixo vertical e o plano (y, z) como plano horizontal, temos dois casos particulares:

$\rightsquigarrow$ Polarização Vertical: $\varphi = 0$

$$\mathbf{E}_R = E_0 \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \tag{6}$$

$\rightsquigarrow$ Polarização Horizontal: $\varphi = \pi/2$

$$\mathbf{E}_R = E_0 \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \tag{7}$$

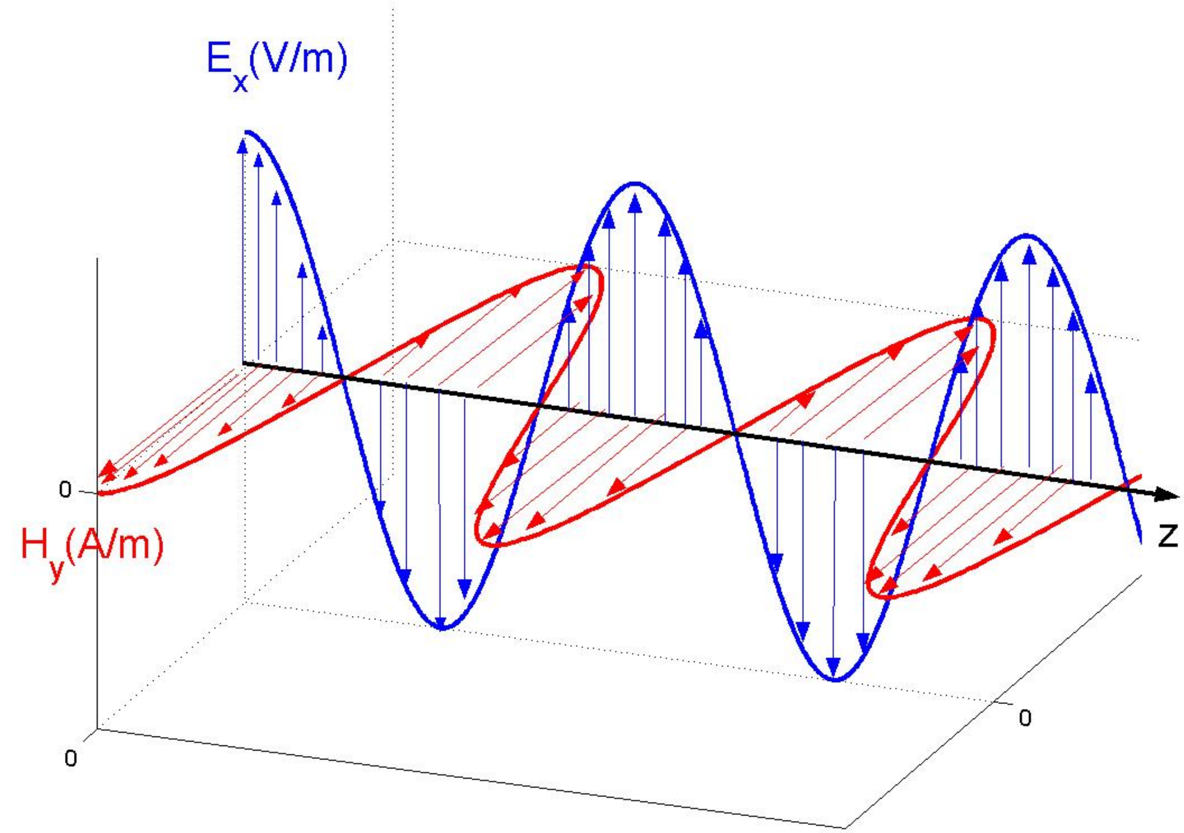

Figure 1: Onda de Polarização Linear: para um observador em z qualquer, a figura move-se para a direita à medida que o tempo passa e o campo **E** oscila sobre uma linha reta.

Polarização Circular

A polarização circular será obtida quando $e^{i\gamma} = \pm i$, ou seja, a fase relativa entre as componentes E_x e E_y será dada por

$$\gamma = \pm\frac{\pi}{2}$$

e quando a amplitude das componentes E_x e E_y forem iguais, ou seja, $\varphi = \pi/4$. Temos então duas soluções distintas:

$$\mathbf{E}_{\pm} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}[\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \mp i\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}]e^{-\alpha z}e^{i(\omega t-\beta z)} \tag{8}$$

cuja parte real vale:

$$\mathbf{E}_{\pm}^{R} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}e^{-\alpha z}[\cos(\omega t-\beta z)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \pm \sin(\omega t-\beta z)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}] \tag{9}$$

$\rightsquigarrow$ Onda de Polarização Circular Direita ou Anti-Horária

Considere o plano $z = 0$ e temos

$$\mathbf{E}_{+}^{R} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}[\cos(\omega t)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}] \tag{10}$$

Observe que as componentes E_x e E_y oscilam no tempo em diferença de fase de 90^o, com o vetor $\mathbf{E}$ descrevendo uma circunferência de raio $E_0/\sqrt{2}$, no sentido anti-horário para um observador que vê a onda chegando até ele (regra da mão direita).

Fazendo $\alpha = 0$, por conveniência, em $t = 0$ tem-se

$$\mathbf{E}_{+}^{R} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}[\cos(\beta z)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} - \sin(\beta z)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}] \tag{11}$$

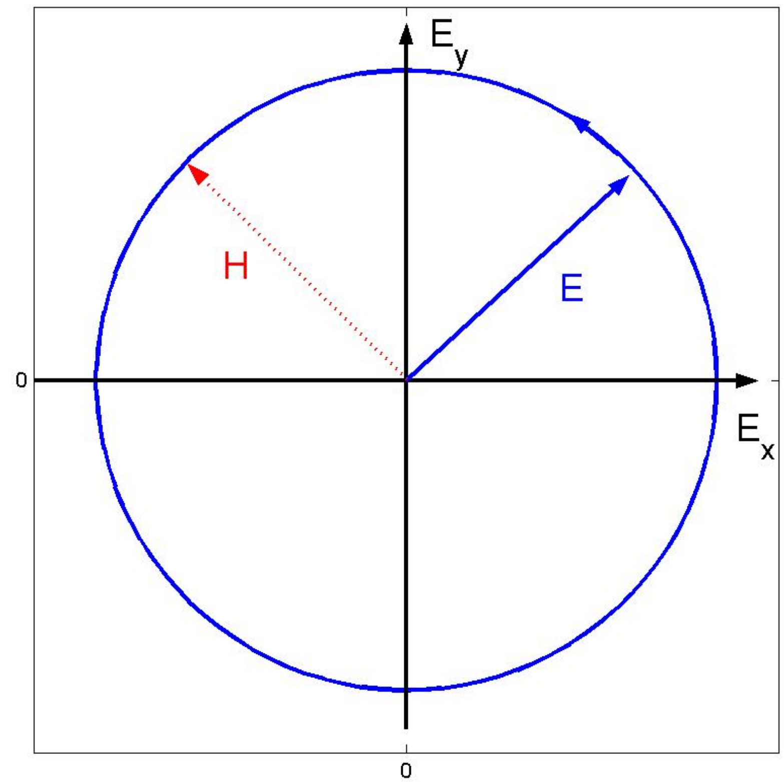

Figure 2: Onda de Polarização Circular Direita (RHCP): Um observador em $z = 0$ vendo a onda chegar percebe um campo **E** que descreve uma circunferência no sentido anti-horário à medida que o tempo passa.

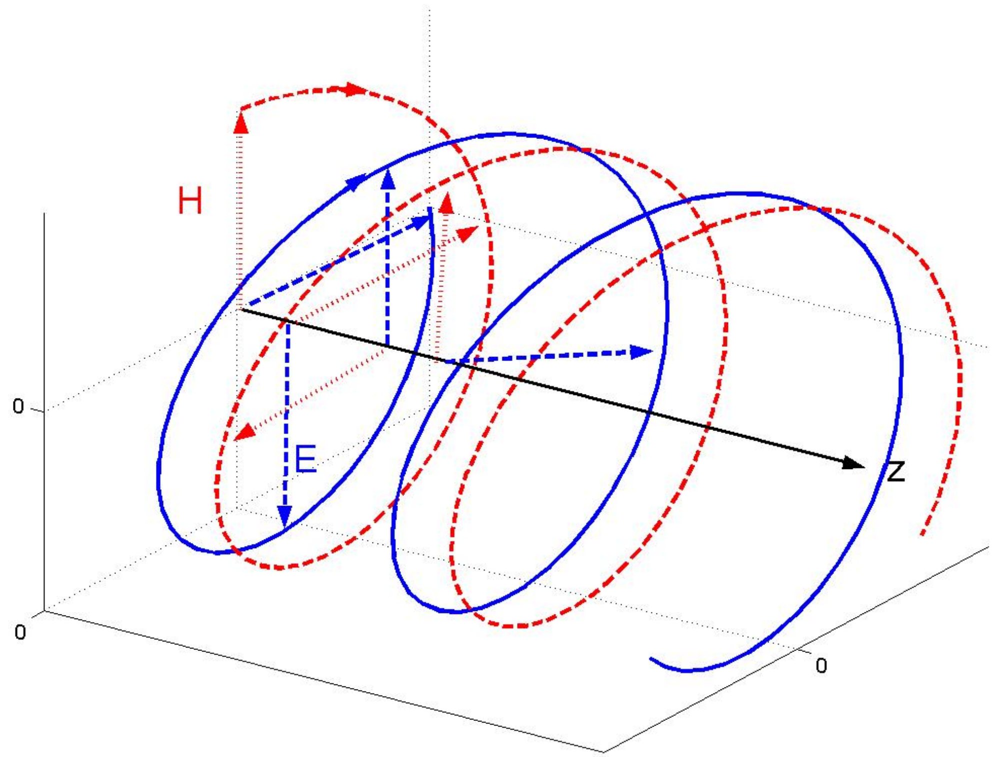

Figure 3: Onda de Polarização Circular Direita (RHCP): o campo **E** descreve uma hélice no espaço para um determinado instante t. À medida que o tempo passa a figura se desloca para a direita, e um observador em um plano z qualquer vê um campo elétrico que descreve uma circunferência no sentido anti-horário.

$\rightsquigarrow$ Onda de Polarização Circular Esquerda ou Horária

Considere o plano $z = 0$ e temos

$$\mathbf{E}_{-}^{R} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}[\cos(\omega t)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} - \sin(\omega t)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}] \tag{12}$$

Observe que as componentes E_x e E_y oscilam no tempo em diferença de fase de -90^o, com o vetor $\mathbf{E}$ descrevendo uma circunferência de raio $E_0/\sqrt{2}$, no sentido horário para um observador que vê a onda chegando até ele (regra da mão esquerda).

Fazendo $\alpha = 0$, por conveniência, em $t = 0$ tem-se:

$$\mathbf{E}_{-}^{R} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}[\cos(\beta z)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} + \sin(\beta z)\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}}] \tag{13}$$

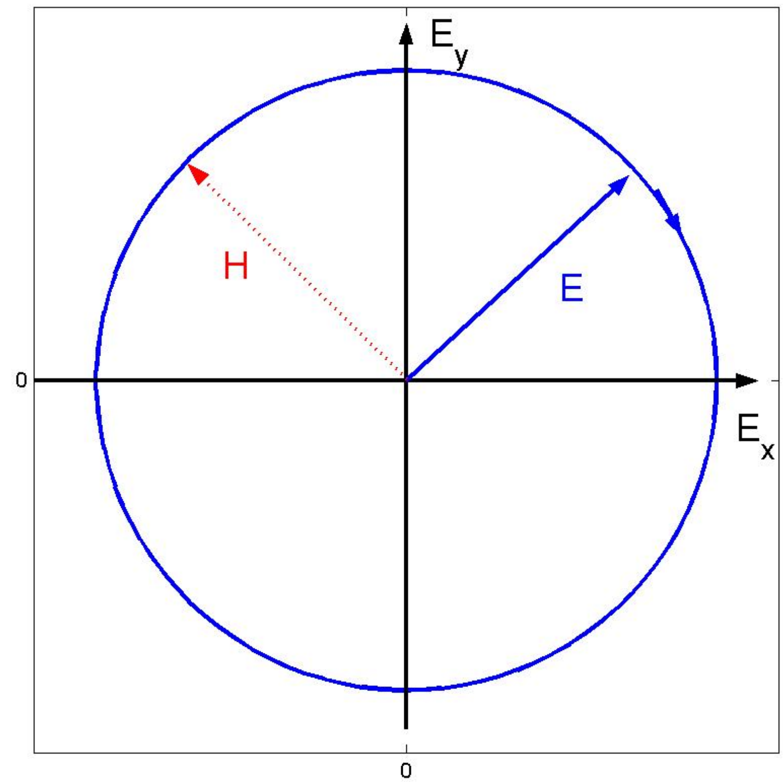

Figure 4: Onda de Polarização Circular Esquerda (LHCP): Um observador em $z = 0$ vendo a onda chegar percebe um campo $\mathbf{E}$ que descreve uma circunferência no sentido horário à medida que o tempo passa.

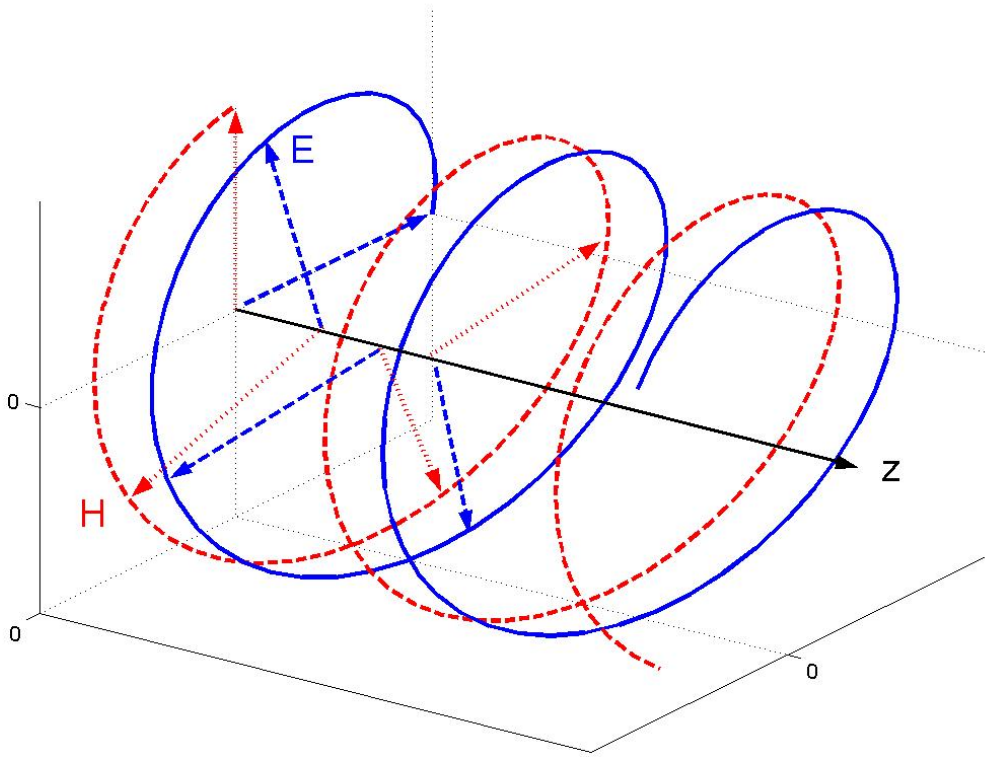

Figure 5: Onda de Polarização Circular Esquerda (LHCP): o campo **E** descreve uma hélice no espaço para um determinado instante t. À medida que o tempo passa a figura se desloca para a direita, e um observador em um plano z qualquer vê um campo elétrico que descreve uma circunferência no sentido horário.

Álgebra dos vetores unitários de polarização circular

São definidos os vetores unitários de polarização circular conforme as expressões abaixo:

$$\hat{\mathbf{a}}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \mp i\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}})$$

Veja que

$$\hat{\mathbf{a}}_{\pm}^{*} = \hat{\mathbf{a}}_{\mp}$$

bem como

$$\hat{\mathbf{a}}_{\pm} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{\pm} = 0$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{\pm} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{\pm}^{*} = \hat{\mathbf{a}}_{\pm} \cdot \hat{\mathbf{a}}_{\mp} = 1$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{\pm} \times \hat{\mathbf{a}}_{\mp} = i\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}$$

É possível mostar que uma onda de polarização linear é uma superposição adequada de ondas de polarização circular:

$$\mathbf{E} = (E_+ \hat{\mathbf{a}}_+ + E_- \hat{\mathbf{a}}_-] e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)}$$

Veja que se $E_+ = E_- = E_0/\sqrt{2}$ então:

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)}$$

enquanto que se $E_+ = E_-^* = iE_0/\sqrt{2}$ então:

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{y}} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)}$$

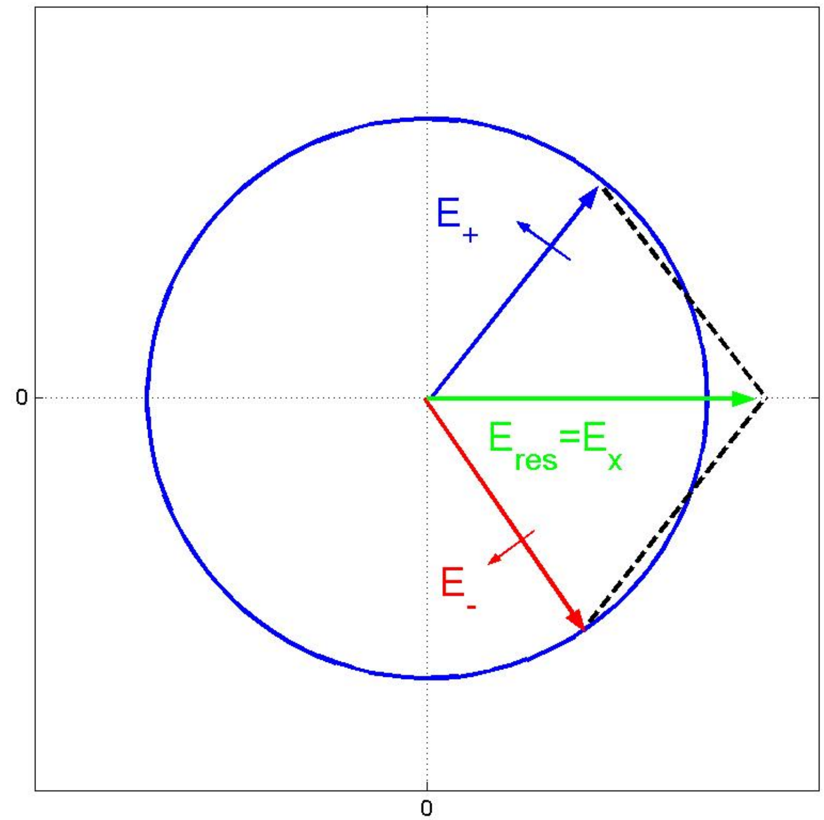

Figure 6: Onda de Polarização Linear obtida a partir da soma de duas ondas de polarização circular, $\mathbf{E}_+$ e $\mathbf{E}_-$.

$\rightsquigarrow$ De modo geral a Polarização de uma onda pode ser Elíptica, $\varphi \neq 45^o$ e $\gamma \neq 0$:

$$\mathbf{E} = E_0[\cos(\varphi)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + \sin(\varphi)e^{i\gamma}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}]e^{-\alpha z}e^{i(\omega t - \beta z + \theta_1)}$$

sendo as polarizações lineares e circulares casos particulares do caso mais geral. Segue um exemplo abaixo:

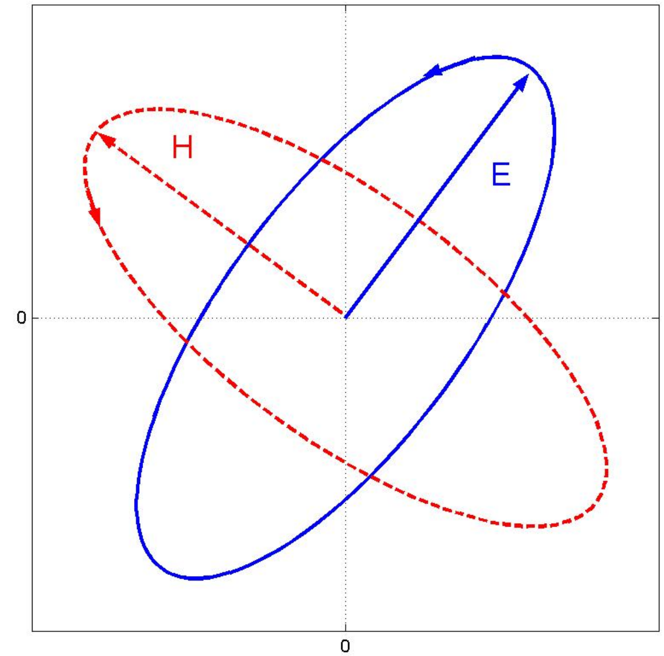

Figure 7: Polarização Elíptica Anti-Horária