

TE053-Ondas Eletromagnéticas

INCIDÊNCIA DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS EM  
INTERFACES PLANAS: REFLEXÃO, REFRAÇÃO E LEI DE  
SNELL

PROF. CÉSAR AUGUSTO DARTORA - UFPR

E-MAIL: CADARTORA@ELETRICA.UFPR.BR

CURITIBA-PR

## Roteiro da Aula:

- Condições de Contorno e Equações de Maxwell
- Interfaces Planas, Plano de Incidência e Ondas
- Incidência Oblíqua: Polarização Paralela e Perpendicular
- Lei de Snell, Reflexão e Refração
- Caso Particular: Incidência Normal à interface

# Reflexão e Refração

⇒ Ao passar de um meio para outro as ondas sofrem reflexão e refração.

- Reflexão: parcela da energia da onda incidente devolvida ao meio de origem.
- Refração: transmissão de parte da energia para o meio seguinte, com a mudança de direção da onda em relação ao eixo normal.
- Entre dielétricos os parâmetros relevantes são os índices de refração dos meios e o ângulo de incidência.

- Definição: Índice de Refração - é a relação entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade da luz em um dado meio material:

$$n = \frac{c_0}{c} \geq 1 . \quad (1)$$

- Maxwell mostrou que para meios dielétricos  $n$  é diretamente associado à permissividade dielétrica relativa do meio  $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0$ :

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (2)$$

Ao passar de um meio para outro a onda eletromagnética:

- não muda de frequência,  $f = f'$ ,
- diminui a velocidade de acordo com a relação:

$$c = \frac{c_0}{n},$$

- utilizando a expressão  $c = \lambda f$  e  $c_0 = \lambda_0 f$ :

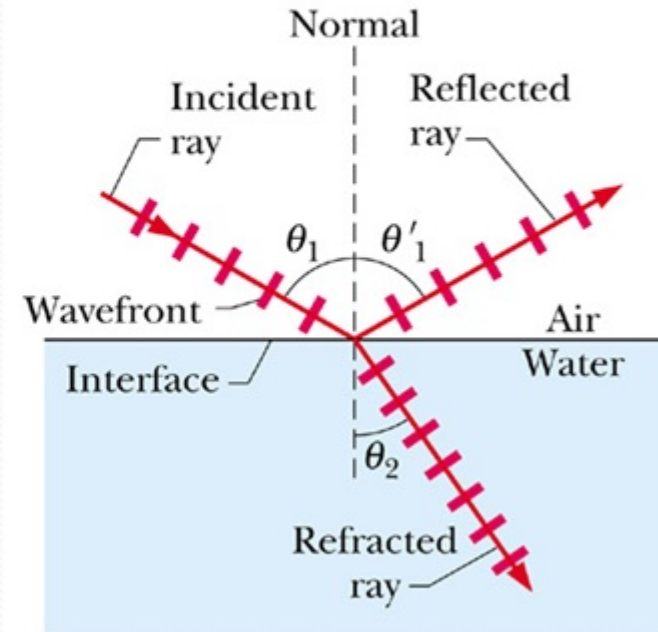
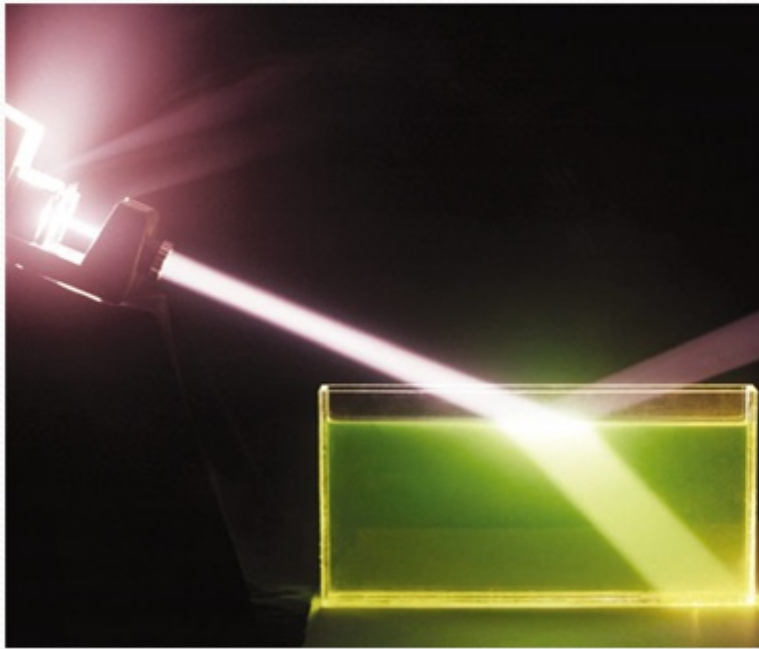
$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n},$$

⇒ O comprimento de onda se altera ao passar de um meio para outro, sendo que  $\lambda < \lambda_0$ , onde  $\lambda_0$  refere-se ao valor no vácuo na frequência  $f$ .

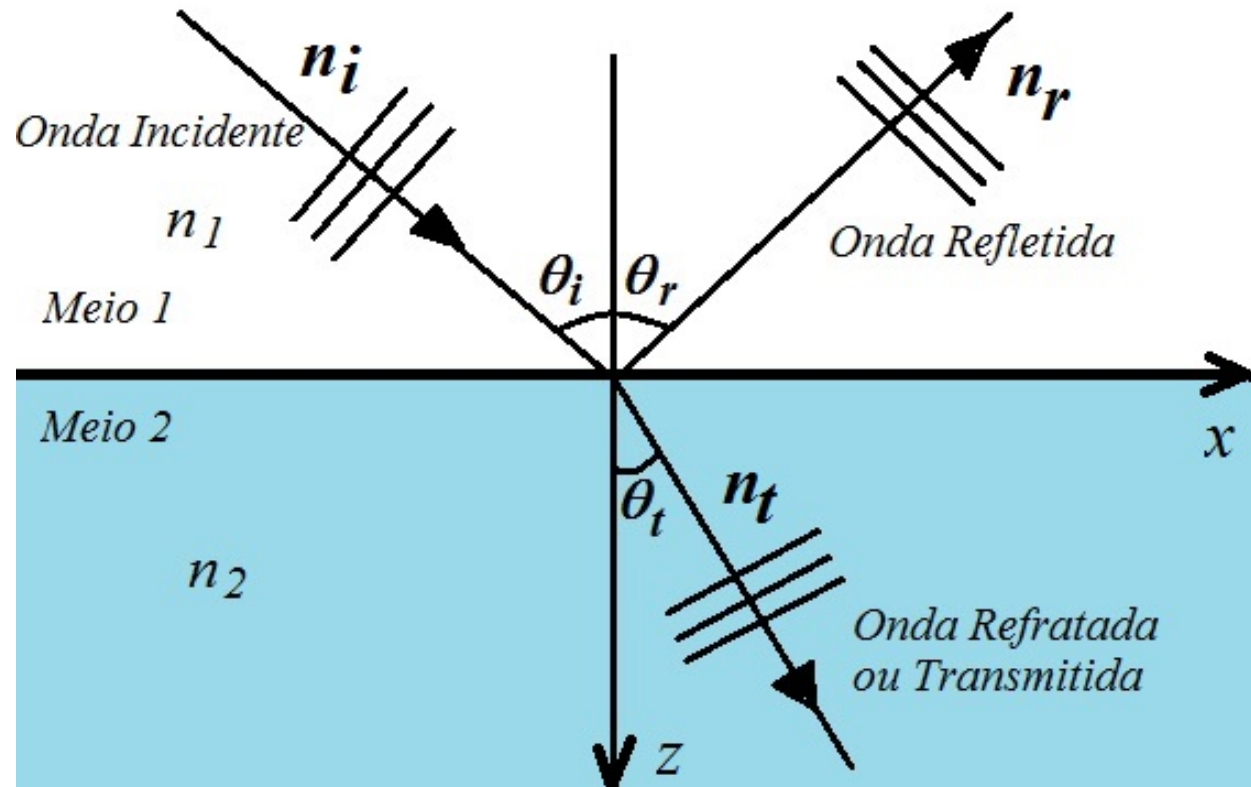
# Conceitos da óptica geométrica

Considerar raio luminoso como uma linha.

Frentes de ondas são perpendiculares ao raio.



- Incidência de uma onda em uma interface entre dois meios  $n_1$  e  $n_2$ .



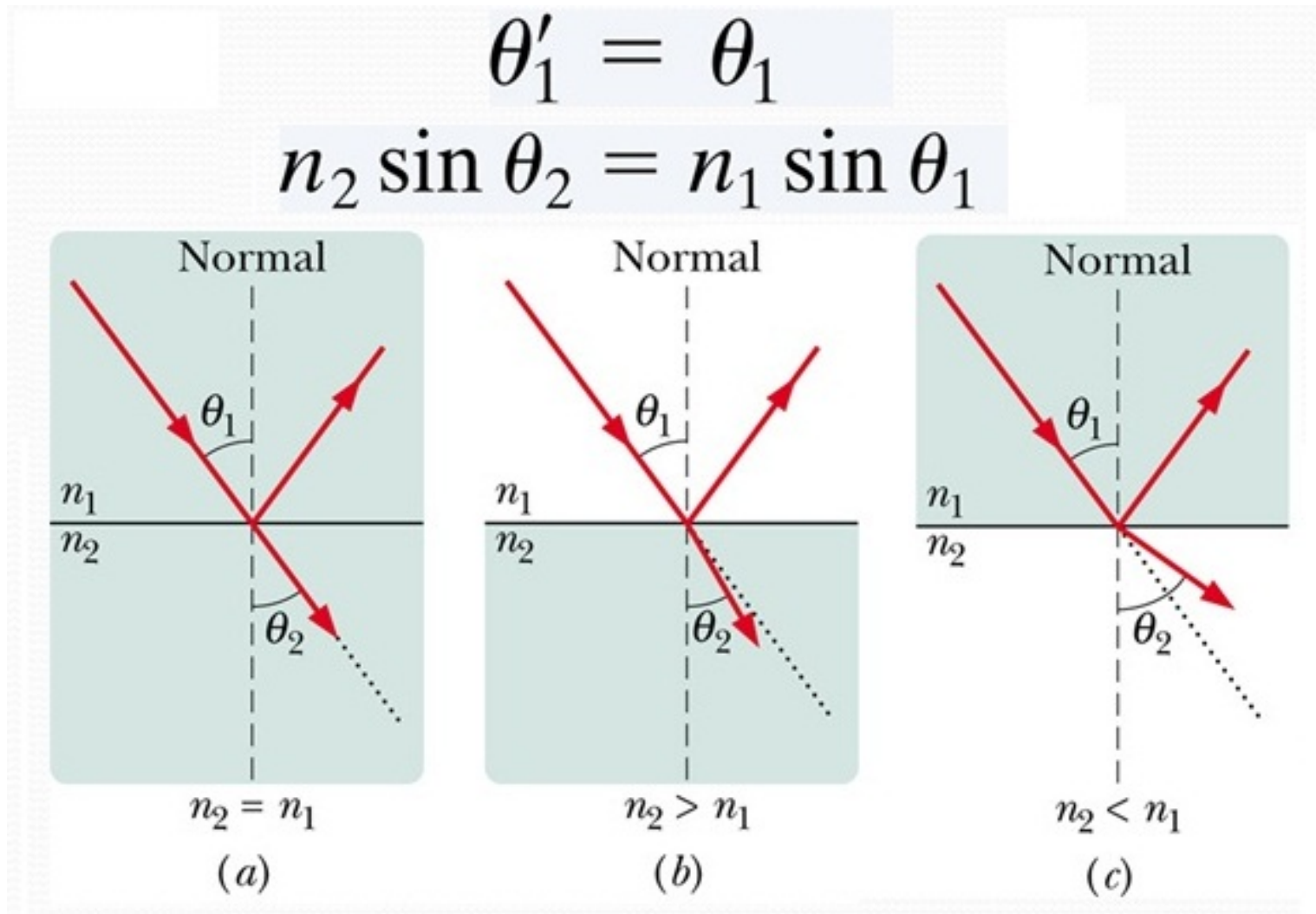
- $\theta_i$  é o ângulo de incidência em relação à normal (eixo perpendicular ao plano de interface).
- $\theta_r$  é o ângulo de reflexão e  $\theta_t$  é o ângulo de refração, relativos à normal.
- Refração é o desvio de trajetória da onda ao passar de um meio para outro.
- As **Leis de Snell** relacionam os ângulos  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  e  $\theta_t$  da seguinte forma:

$$\theta_i = \theta_r , \quad (3)$$

$$n_1 \text{sen}\theta_i = n_2 \text{sen}\theta_t \quad (4)$$



- Situações para valores de  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\theta_i = \theta_1$  e  $\theta_t = \theta_2$ .



# Condições de Contorno e Equações de Maxwell

↪ A incidência das ondas eletromagnéticas em interfaces entre meios distintos é um problema de suma importância já que a idealização de meios infinitos não se realiza na prática e temos a presença de vários meios, com a onda se propagando de um meio para outro.

O problema da incidência em interfaces nada mais é do que solucionar as equações de Maxwell com condições de contorno apropriadas. As condições de contorno gerais em interfaces são as seguintes:

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) = \rho_S \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) = 0 \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_1 - \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_2 = 0 \quad (7)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_1 - \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_2 = \mathbf{J}_S \quad (8)$$

Se na interface entre dois meios quaisquer não há carga nem corrente superficial, ou seja,  $\rho_S = 0$  e  $\mathbf{J}_S = 0$ :

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{D}_1 = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{D}_2 \quad (9)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{n}}_1 \cdot \mathbf{B}_2 \quad (10)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{E}_2 \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_1 = \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{H}_2 \quad (12)$$

o que reflete o fato de que

↪ componentes normais de  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  são contínuas na interface,

↪ componentes de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  tangenciais na interface são contínuas.

O problema mais simples que podemos pensar é uma interface plana conforme mostra a figura:

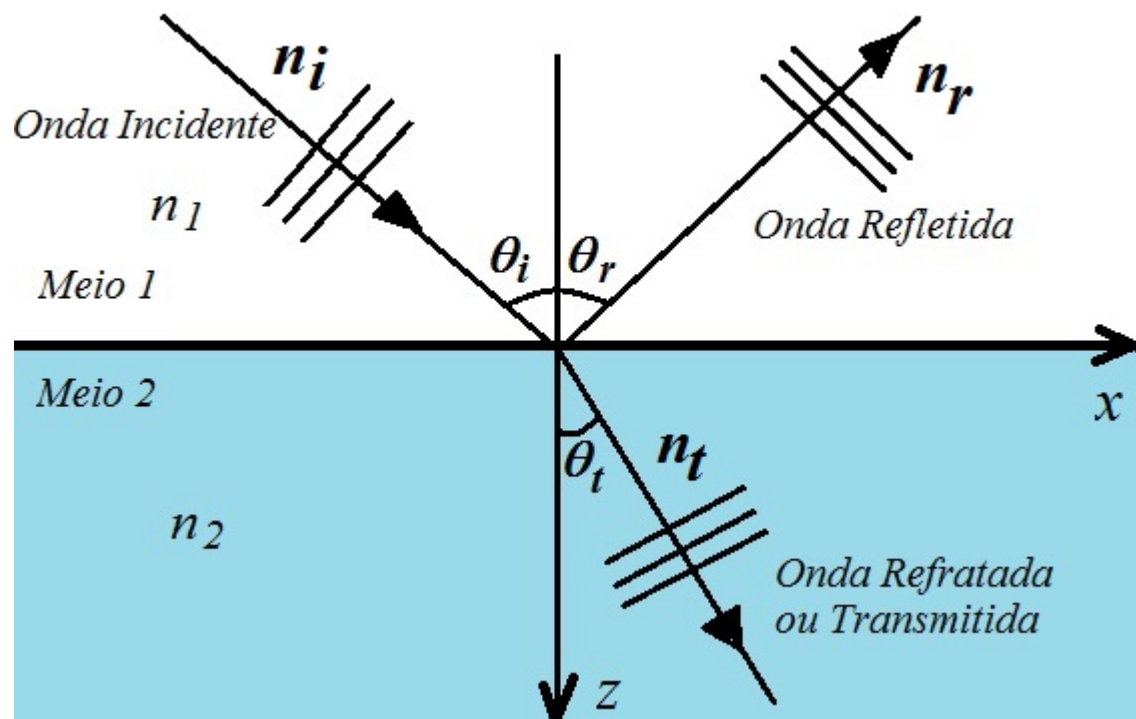


Figure 1: Interface plana em  $z = 0$ .

onde  $\mu$  e  $\varepsilon$  podem ser complexos.

# Incidência Oblíqua em Interfaces Planas: Lei de Snell, Refração e Reflexão, ângulo de Brewster

↪ Na incidência oblíqua, os efeitos de reflexão e refração são dependentes do caráter vetorial da onda, ou seja, da sua polarização, conforme veremos.

Definição: **Plano de Incidência** é o plano formado pelo vetor unitário normal à interface  $\hat{\mathbf{n}}_1$  e o vetor de onda incidente  $\mathbf{k}_i = k_1 \hat{\mathbf{n}}_i$ . No nosso caso, ilustrado na figura anterior, é o plano  $(x, z)$ .

↪ Para o caso da incidência oblíqua, se a onda tiver polarização arbitrária podemos decompor em dois estados:

*Caso1*  $\Rightarrow$  Campo  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano de incidência ( ou  $\mathbf{H}$  perpendicular ao plano de incidência)

*Caso2*  $\Rightarrow$  Campo  $\mathbf{E}$  perpendicular ao plano de incidência (ou  $\mathbf{H}$  paralelo ao plano de incidência)

## Caso 1: *Campo $\mathbf{E}$ paralelo ao plano de incidência*

O campo  $\mathbf{E}$  é paralelo ao plano  $(x, z)$  e tem componente normal à interface. Veja figura abaixo.

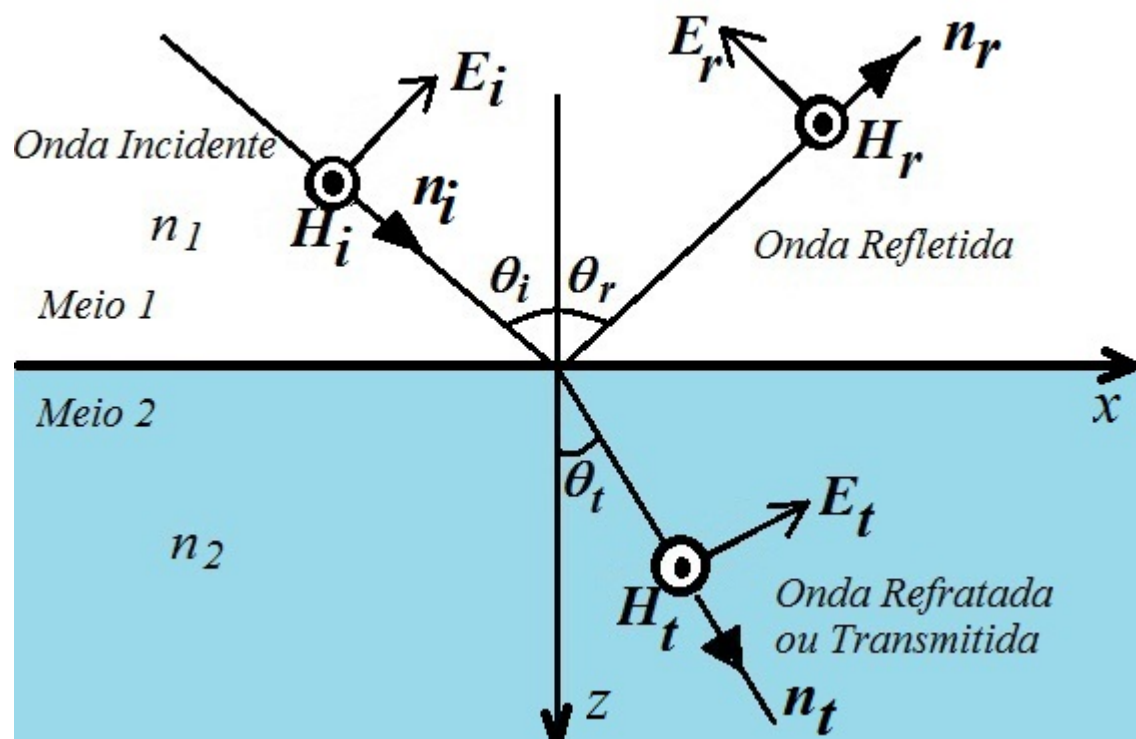


Figure 2: Interface plana em  $z = 0$ .  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano  $(x, z)$ .

~> Podemos escrever para os vetores unitários de incidência, reflexão e transmissão:

$$\hat{\mathbf{n}}_i = \sin \theta_i \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \theta_i \hat{\mathbf{a}}_z \quad (13)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_r = \sin \theta_r \hat{\mathbf{a}}_x - \cos \theta_r \hat{\mathbf{a}}_z \quad (14)$$

$$\hat{\mathbf{n}}_t = \sin \theta_t \hat{\mathbf{a}}_x + \cos \theta_t \hat{\mathbf{a}}_z \quad (15)$$

e determinar os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , uma vez que são ortogonais a  $\mathbf{n}$  e das equações de Maxwell temos:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} &= \mathbf{H} \end{aligned}$$

Podemos escrever para os campos

$$\mathbf{E}_i = E_0 (\cos \theta_i \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_i \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_1(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)} \quad (16)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{E_0}{Z_1} \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_1(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)} \quad (17)$$

$$\mathbf{E}_r = r E_0 (-\cos \theta_r \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_r \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_1(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)} \quad (18)$$

$$\mathbf{H}_r = r \frac{E_0}{Z_1} \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_1(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)} \quad (19)$$

$$\mathbf{E}_t = \tau E_0 (\cos \theta_t \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_t \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_2(\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)} \quad (20)$$

$$\mathbf{H}_t = \tau \frac{E_0}{Z_2} \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_2(\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)} \quad (21)$$

$\rightsquigarrow$   $r$  é a amplitude relativa da onda refletida, ou amplitude de reflexão e  $\tau$  é a amplitude da onda transmitida ou refratada, ou seja

$$\frac{|\mathbf{E}_r|}{|\mathbf{E}_i|} = |r| \quad \text{e} \quad \frac{|\mathbf{E}_t|}{|\mathbf{E}_i|} = |\tau|$$



A continuidade das componentes tangenciais de  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  na interface  $z = 0$  fornece as seguintes equações:

$$E_{ix}(z = 0) + E_{rx}(z = 0) = E_{tx}(z = 0)$$

$$H_{iy}(z = 0) + H_{ry}(z = 0) = H_{ty}(z = 0)$$

ou explicitamente:

$$\begin{aligned} \cos \theta_i e^{-ik_1 \sin \theta_i x} - r \cos \theta_r e^{-ik_1 \sin \theta_r x} &= \tau \cos \theta_t e^{-ik_2 \sin \theta_t x} \\ \frac{1}{Z_1} (e^{-ik_1 \sin \theta_i x} + r e^{-ik_1 \sin \theta_r x}) &= \frac{1}{Z_2} \tau e^{-ik_2 \sin \theta_t x} \end{aligned}$$

↷ A interface é plana e perfeita, ou seja, homogênea e isotrópica e independente do tempo. Queremos então que  $r$  e  $\tau$  sejam independentes da posição na interface, bem como do tempo. Para eliminar a dependência em  $x$ , faz-se necessário que:

$$k_1 \sin \theta_i = k_1 \sin \theta_r = k_2 \sin \theta_t \quad (22)$$

e esta é a forma geral da **Lei de Snell**.

Fazendo uma análise da Lei de Snell resulta ainda que:

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r \leftrightarrow \theta_i = \theta_r \quad (23)$$

↪ o ângulo de reflexão é igual ao ângulo de incidência, conforme já era sabido empiricamente da óptica geométrica.

Para a relação entre o ângulo de incidência e de transmissão (ou refração), temos:

$$k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t \quad (24)$$

ou em termos de índices de refração  $n = k/k_0$  onde  $k$  é a constante de propagação em um meio qualquer, dada por

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

e  $k_0$  é a constante no vácuo:

$$k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$$

teremos:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (25)$$

que é a lei de Snell relacionando o ângulo de refração e de incidência com os índices de refração dos meios, também obtida empiricamente.

A constante de propagação em um dado meio, pode, portanto ser escrita como:

$$k = k_0 n \quad (26)$$

sendo

$$n = \sqrt{\mu_R \epsilon_R} \quad (27)$$

e  $\mu_R$  e  $\epsilon_R$  são a permeabilidade magnética e a permissividade dielétrica relativa do meio em questão.

Torna-se claro aqui, que todas as leis da óptica geométrica aparecem naturalmente na teoria de Maxwell, e além disso o índice de refração é totalmente caracterizado conhecendo-se os parâmetros eletromagnéticos do meio.

Para  $r$  e  $\tau$  o conjunto de equações, utilizando-se a lei de Snell, agora reduz-se a:

$$\begin{aligned}\cos \theta_i(1 - r) &= \tau \cos \theta_t \\ \frac{1}{Z_1}(1 + r) &= \frac{1}{Z_2}\tau\end{aligned}$$

e resolvendo para  $r$  e  $\tau$  temos, no caso de  $\mathbf{E}$  no plano  $(x, z)$ , dito plano de incidência, e somente  $\mathbf{H}$  totalmente tangencial à interface, o seguinte resultado:

$$r = \frac{Z_1 \cos \theta_i - Z_2 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}} \quad (28)$$

$$\tau = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}} \quad (29)$$

Estas expressões são válidas para o campo elétrico  $\mathbf{E}$  contido no plano de incidência, ou seja, paralelo ao plano  $(x, z)$ . Para o caso em que o campo elétrico é perpendicular ao plano  $(x, z)$  a situação se modifica, conforme veremos a seguir.

## Caso 2: Campo $\mathbf{E}$ perpendicular ao plano de incidência

Agora é o campo magnético que não é totalmente tangencial à interface:

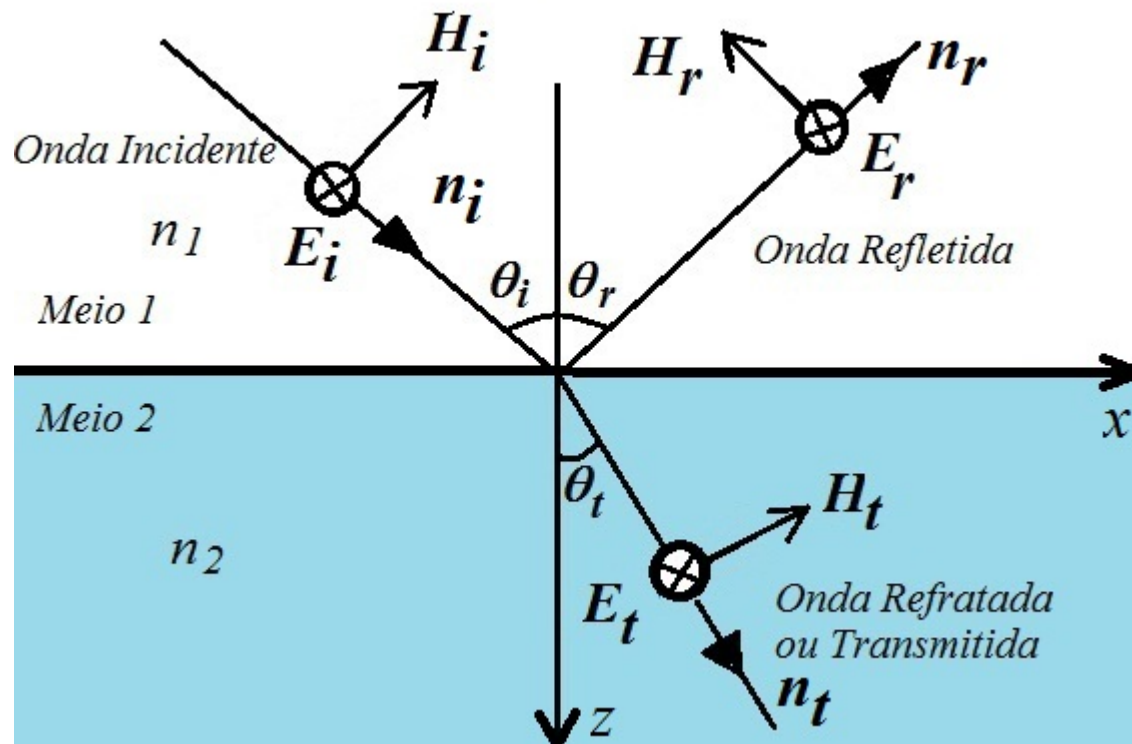


Figure 3: Interface plana em  $z = 0$ .  $\mathbf{E}$  perpendicular ao plano  $(x, z)$ .

Podemos escrever para os campos:

$$\mathbf{E}_i = -E_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_1(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)} \quad (30)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{E_0}{Z_1} (\cos \theta_i \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_i \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_1(\sin \theta_i x + \cos \theta_i z)} \quad (31)$$

$$\mathbf{E}_r = -r E_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_1(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)} \quad (32)$$

$$\mathbf{H}_r = r \frac{E_0}{Z_1} (-\cos \theta_r \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_r \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_1(\sin \theta_r x - \cos \theta_r z)} \quad (33)$$

$$\mathbf{E}_t = -\tau E_0 \hat{\mathbf{a}}_y e^{-ik_2(\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)} \quad (34)$$

$$\mathbf{H}_t = \tau \frac{E_0}{Z_2} (\cos \theta_t \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_t \hat{\mathbf{a}}_z) e^{-ik_2(\sin \theta_t x + \cos \theta_t z)} \quad (35)$$

Dadas as simetrias entre  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$ , a situação do campo  $\mathbf{H}$  com componente perpendicular à interface corresponde a fazer as modificações:  $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$  e  $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$ ,  $\mu \rightarrow \varepsilon$  e  $\varepsilon \rightarrow \mu$ . Fica como exercício demonstrar que:

$$r = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}} \quad (36)$$

$$\tau = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \sqrt{1 - \left(\frac{k_1}{k_2} \sin \theta_i\right)^2}} \quad (37)$$

Para encontrar os resultados acima, novamente é uma condição física que as leis de Snell, (22)-(25) sejam satisfeitas.

## Análise do Vetor de Poynting

Enquanto  $r$  e  $\tau$  são amplitudes de reflexão e transmissão dos campos é mais conveniente tratar da potência refletida e transmitida. Escrevendo o vetor de Poynting da onda incidente, refletida e transmitida, em módulo, temos:

$$S_i = \frac{1}{Z_1} |E_0|^2$$

$$S_r = \frac{1}{Z_1} |r|^2 |E_0|^2$$

$$S_t = \frac{1}{Z_2} |\tau|^2 |E_0|^2$$

Definimos então o coeficiente de reflexão  $R$  e o coeficiente de transmissão  $T$ :

$$R = \frac{S_r}{S_i} = |r|^2 \quad (38)$$

$$T = \frac{S_t}{S_i} = \frac{Z_1}{Z_2} |\tau|^2 \quad (39)$$

Pode-se mostrar que:

$$R + T = 1 \quad (40)$$

o que reflete apenas a conservação da potência na interface.



## Ângulo de Brewster $\theta_B$

↪ O caráter vetorial das ondas mostra-se claramente uma vez que  $r$  e  $\tau$  são dependentes da polarização.

↪ É fácil ver esse fenômeno definindo o ângulo de Brewster: É o ângulo de incidência para o qual a onda eletromagnética é totalmente transmitida, ou seja,  $r = 0$  ou  $R = 0$ .

↪ Para meios dielétricos, somente é possível no caso da polarização paralela. Fazendo  $r = 0$  no caso da polarização paralela obtemos

$$\tan \theta_B = \left( \frac{n_2}{n_1} \right) \quad (41)$$

onde  $n_1$  e  $n_2$  são os índices de refração dos meios 1 e 2, respectivamente.

↪ Ao incidir uma onda com mistura de polarizações, aquela que tiver polarização com campo  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano de incidência será totalmente transmitida, restando uma onda refletida totalmente polarizada.

↪ Não existe ângulo de Brewster para polarização perpendicular, para interface entre meios dielétricos.

Nas fórmulas obtidas anteriormente, para meios dielétricos, é conveniente expressar  $r$  e  $\tau$  em função dos índices de refração dos meios:

$$k_1 = k_0 n_1 \quad k_2 = k_0 n_2$$

$$Z_1 = \frac{Z_0}{n_1} \quad Z_2 = \frac{Z_0}{n_2}$$

Nesse caso, fazendo  $\theta_i = \theta$  o ângulo de incidência:

$$r_{\parallel}(\theta) = \frac{n_2 \cos \theta - n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right)^2}}{n_2 \cos \theta + n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right)^2}} \quad (42)$$

$$r_{\perp}(\theta) = \frac{n_1 \cos \theta - n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right)^2}}{n_1 \cos \theta + n_2 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \sin \theta\right)^2}} \quad (43)$$

## Ângulo Crítico $\theta_i = \theta_c$

↪ O ângulo crítico é aquele para o qual ocorre reflexão interna total.

↪ Nesse caso o coeficiente de reflexão  $R = |r|^2$  tende para a unidade.

Observando a lei de Snell:

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$$

o ângulo crítico ocorre quando o ângulo da onda refratada tende para  $90^\circ$ .  
Nesse caso  $\sin \theta_t = 1$  e tem-se,  $\theta$ :

$$n_1 \sin \theta_c = n_2 \Rightarrow \sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

↪ Somente ocorre se  $n_2 < n_1$ .

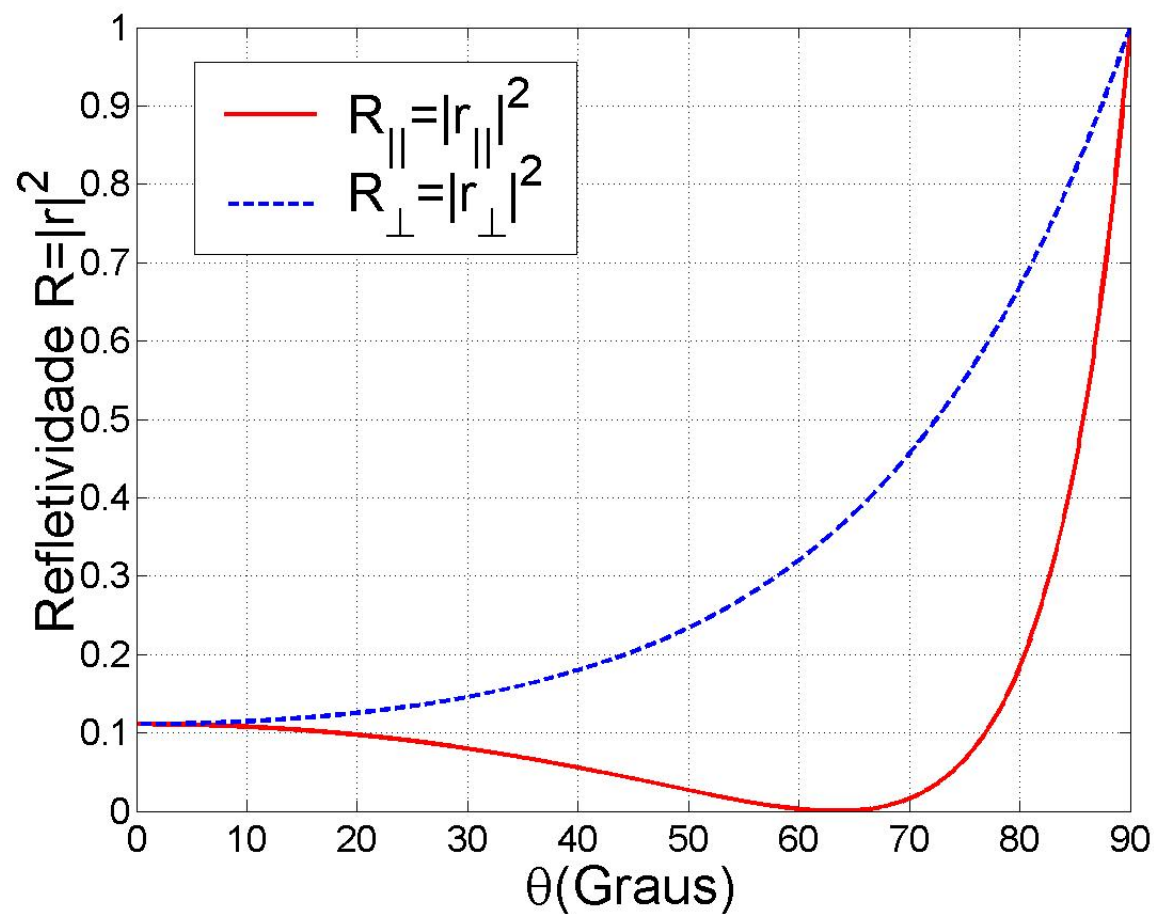


Figure 4: Curva típica de Refletividade  $R(\theta) = |r(\theta)|^2$ , para ambas as polarizações: a) Polarização  $\mathbf{E}$  paralelo ao plano de incidência,  $R_{\parallel}$  e b) Polarização  $\mathbf{E}$  Perpendicular ao plano de incidência,  $R_{\perp}$ . Note que para uma das polarizações, no caso a paralela,  $R_{\parallel} = 0$ , no ângulo de Brewster. Nesse caso foram escolhidos os valores  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 2$ .

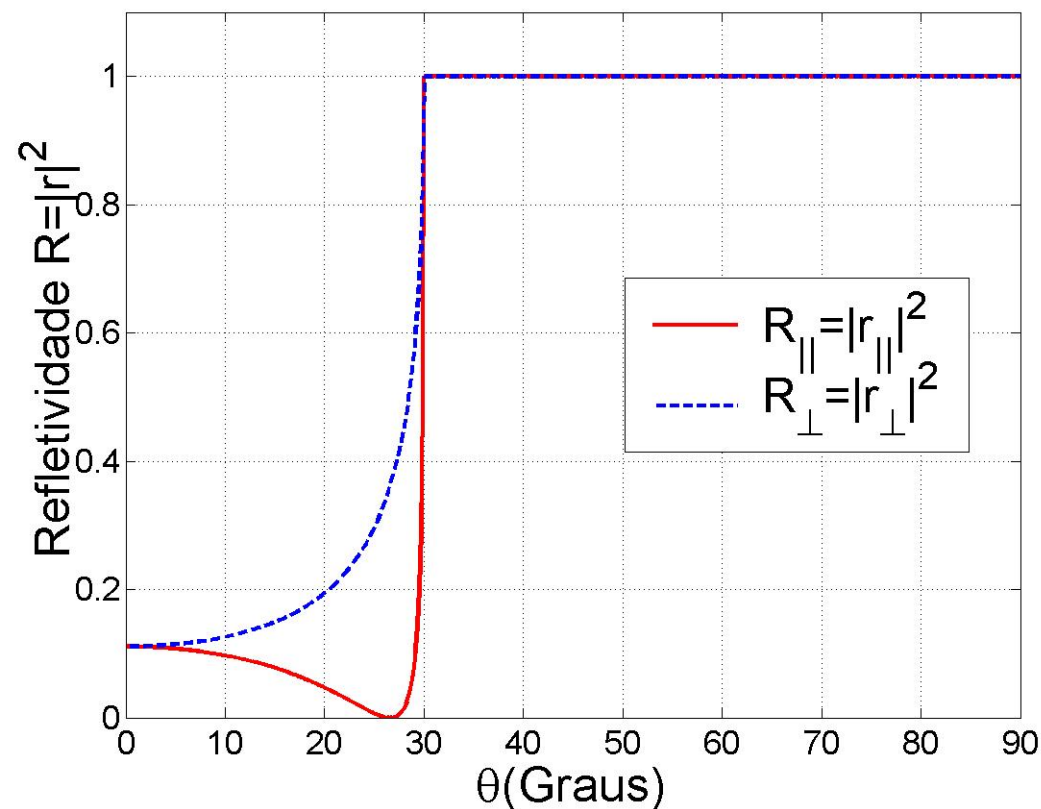


Figure 5: Curva típica de Refletividade  $R(\theta) = |r(\theta)|^2$ , para ambas as polarizações: a) Polarização **E** paralelo ao plano de incidência,  $R_{\parallel}$  e b) Polarização **E** Perpendicular ao plano de incidência,  $R_{\perp}$ . Note que para uma das polarizações, no caso a paralela,  $R_{\parallel} = 0$ , no ângulo de Brewster. Nesse caso foram escolhidos os valores  $n_1 = 2$  e  $n_2 = 1$ . Aqui ocorre ângulo crítico,  $\theta_c = 30^\circ$ .

# Incidência Normal

No caso particular em que  $\theta_i = 0$ :

$\rightsquigarrow$  Os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{H}$  da onda incidente são totalmente tangenciais à interface.

$\rightsquigarrow$  No limite  $\theta_i \rightarrow 0$ ,  $r_{\perp}$  e  $r_{\parallel}$  devem ter o mesmo valor, pelo menos em módulo. Na verdade, pela convenção adotada, quando  $\theta_i = 0$  temos  $r_{\perp} = -r_{\parallel}$ .

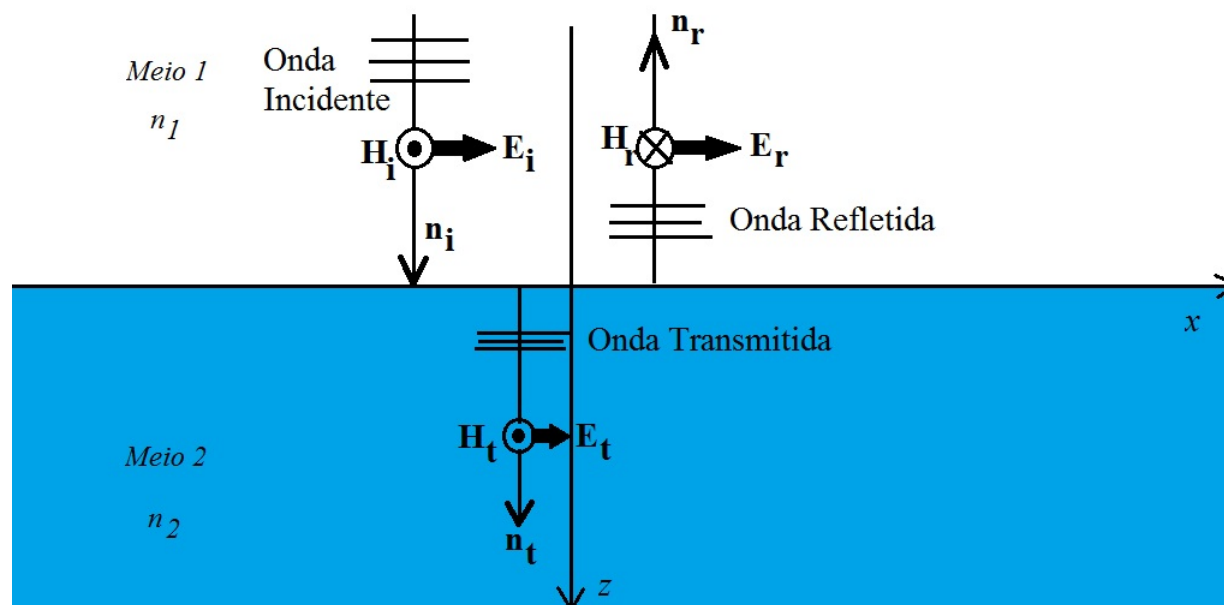


Figure 6: Interface plana em  $z = 0$ . Incidência normal.

Observando a figura, podemos escrever os campos na forma abaixo:

$$\mathbf{E}_i = E_0 \exp [i(\omega t - k_1 z)] \hat{\mathbf{a}}_x \quad (44)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{E_0}{Z_1} \exp [i(\omega t - k_1 z)] \hat{\mathbf{a}}_y \quad (45)$$

$$\mathbf{E}_r = rE_0 \exp [i(\omega t + k_1 z)] \hat{\mathbf{a}}_x \quad (46)$$

$$\mathbf{H}_r = -r \frac{E_0}{Z_1} \exp [i(\omega t + k_1 z)] \hat{\mathbf{a}}_y \quad (47)$$

$$\mathbf{E}_t = \tau E_0 \exp [i(\omega t - k_2 z)] \hat{\mathbf{a}}_x \quad (48)$$

$$\mathbf{H}_t = \tau \frac{E_0}{Z_2} \exp [i(\omega t - k_2 z)] \hat{\mathbf{a}}_y \quad (49)$$

Note que a convenção adotada aqui é a de manter o sentido do campo elétrico. Se o mesmo se inverte, o sinal deve vir através de  $r$ . Esta convenção em que admitimos inicialmente que o campo  $\mathbf{E}$  não muda de sentido é a mesma da polarização perpendicular,  $r_{\perp}$ .

Observemos que a frequência  $\omega$  não deve mudar ao passarmos de um lado a outro da interface, e

$$k_1 = \omega\sqrt{\mu_1\epsilon_1}, \quad Z_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\epsilon_1}} \quad (50)$$

$$k_2 = \omega\sqrt{\mu_2\epsilon_2}, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} \quad (51)$$

Podemos escrever para o meio 1 e 2 os campos totais:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = E_0 [e^{-ik_1z} + re^{ik_1z}] e^{i\omega t} \hat{\mathbf{a}}_x \quad (52)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r = E_0 [e^{-ik_1z} - re^{ik_1z}] e^{i\omega t} \hat{\mathbf{a}}_y \quad (53)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_t = tE_0 \exp [i(\omega t - k_2z)] \hat{\mathbf{a}}_x \quad (54)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_t = t \frac{E_0}{Z_2} \exp [i(\omega t - k_2z)] \hat{\mathbf{a}}_y \quad (55)$$

Para a interface colocada no plano  $z = 0$ , devemos impor a continuidade aos campos, que são puramente tangenciais, então:

$$E_{1x}(z = 0) = E_{2x}(z = 0)$$

$$H_{1y}(z = 0) = H_{2y}(z = 0)$$



Resolvendo o sistema de equações resultante,

$$\begin{aligned} 1 + r &= \tau \\ \frac{1}{Z_1}(1 - r) &= \frac{1}{Z_2}\tau \end{aligned}$$

obtém-se:

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad (56)$$

$$\tau = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} \quad (57)$$

Em geral, para meios ópticos ou não magnéticos, podemos escrever o índice de refração na forma  $\sqrt{\epsilon_c} = n$  e então é fácil mostrar que;

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (58)$$

$$\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (59)$$

## Interface entre um meio dielétrico e um bom condutor

~> Supomos o meio 1 dielétrico ideal e o meio 2 um condutor.

~> O condutor ideal é aquele para o qual  $\sigma \rightarrow \infty$ .

~> No caso de condutor ideal

$$Z_2 = \sqrt{\mu/\epsilon_c} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon \left(1 - i\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)}} \rightarrow 0$$

Fazendo  $Z_2 = 0$ , é fácil mostrar que, qualquer que seja o ângulo de incidência,

$$r_{\perp} = -1$$

ou seja, a onda incidente é totalmente refletida.

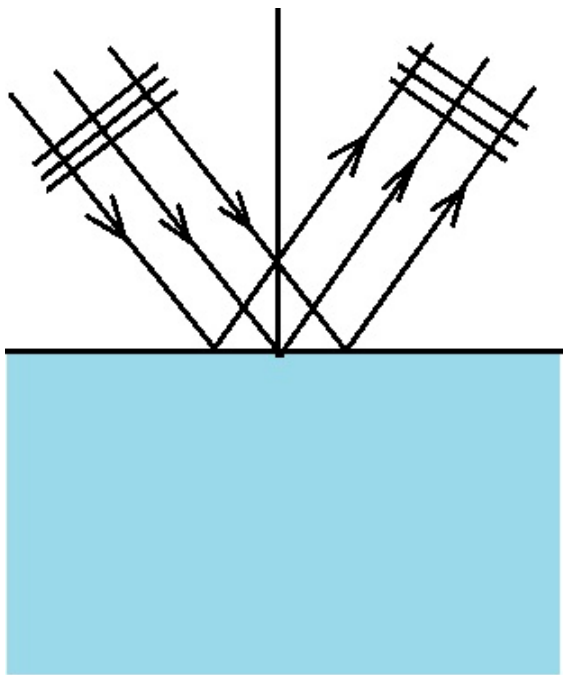
~> o campo elétrico tangencial ao condutor ideal, resultante da superposição entre a onda incidente e a onda refletida, se anula, enquanto que o campo magnético tangencial dobra de valor.

~> No caso de um bom condutor  $\sigma \gg \omega\epsilon$ ,  $\sigma < \infty$  e em geral

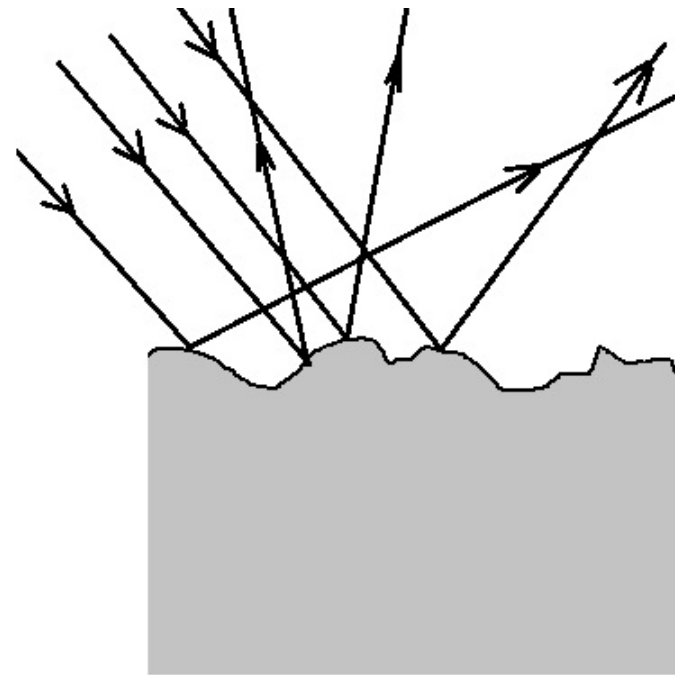
$$r \approx e^{2i\phi_p(\theta)}, \quad R = |r|^2 = 1$$

onde  $\phi_p$  depende da polarização da onda incidente e do ângulo de incidência  $\theta$ .

- A reflexão ainda pode ser classificada em
  - Especular: quando a interface é perfeitamente lisa em relação ao  $\lambda$ .
  - Difusa: para superfícies rugosas em relação ao  $\lambda$ .



**(a) Reflexão Especular**  
(superfície lisa)



**(b) Reflexão Difusa**  
(superfície rugosa)

## Exercícios:

1) Considere a incidência de uma onda eletromagnética plana e uniforme em uma interface entre dois meios dielétricos ideais de índices de refração  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 1.5$ , com ângulo de incidência de  $\theta_i = 56,31^\circ$ . Se o plano de incidência é o plano  $(x, z)$  e o campo elétrico da onda incidente é dado por:

$$\mathbf{E}_{inc} = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\cos \theta_i \hat{\mathbf{a}}_x - \sin \theta_i \hat{\mathbf{a}}_z) - \hat{\mathbf{a}}_y] \exp[i(\omega t - kz \cos \theta_i - kx \sin \theta_i)]$$

determine:

- o ângulo de Brewster,  $\theta_B$ .
- a polarização da onda refletida para o ângulo de incidência  $\theta_i = 56,31^\circ$ .
- o valor da refletividade  $R = |r|^2$  e o valor percentual da densidade de potência refletida relativa à densidade de potência total incidente.

2) Demonstre que na situação de reflexão total entre dois meios dielétricos ideais a amplitude de reflexão é dada na forma  $r = e^{i2\phi}$ , onde  $\phi$  é uma fase que depende do ângulo de incidência e da polarização. Determine  $\phi$  para ambas as polarizações.

3) Em uma configuração de interfaces de três camadas com índices de refração  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  tal que:

$$n(z) = \left\{ \begin{array}{ll} n_1 & z \leq 0 \\ n_2 & 0 \leq z \leq d \\ n_3 & z \geq d \end{array} \right\}$$

encontre a refletividade  $R = |r|^2$ , no caso da incidência normal  $\theta = 0$ , aplicando as condições de fronteira nas interfaces  $z = 0$  e  $z = d$ , uma vez que a onda incidente vem do meio  $n_1$  e será em geral parcialmente transmitida ao meio 3. Considere:

Ondas Eletromagnéticas propagando-se no meio 1, incidente e refletida:

$$\mathbf{E}_i = E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_1 z)} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{n_1}{Z_0} E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_1 z)} \hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{E}_r = -r E_0 e^{i(\omega t + k_0 n_1 z)} \hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}_r = r \frac{n_1}{Z_0} E_0 e^{i(\omega t + k_0 n_1 z)} \hat{\mathbf{y}}$$

Ondas Eletromagnéticas propagando-se no meio 2, composição de uma onda propagante e uma contra-propagante:

$$\mathbf{E}_2 = E_0[Ae^{i(\omega t - k_0 n_2 z)} - Be^{i(\omega t + k_0 n_2 z)}]\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{n_2}{Z_0}E_0[Ae^{i(\omega t - k_0 n_2 z)} + Be^{i(\omega t + k_0 n_2 z)}]\hat{\mathbf{y}}$$

Ondas Eletromagnéticas propagando-se no meio 3, apenas a onda transmitida de 1 para 3:

$$\mathbf{E}_i = \tau E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_3 z)}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H}_i = \tau \frac{n_3}{Z_0} E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_3 z)}\hat{\mathbf{y}}$$

O problema consiste em encontrar os coeficientes  $r, \tau, A, B$ . Com a expressão obtida para  $r$  faça o gráfico da refletividade  $R = |r|^2$  em função do comprimento de ondas no vácuo  $\lambda = 2\pi/k_0$   $1\mu\text{m} < \lambda < 3\mu\text{m}$  no Matlab, para  $n_1 = 1$ ,  $n_3 = 1.5$ ,  $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ ,  $d = \lambda_0/(4n_2)$ , comprimento de ondas de projeto  $\lambda_0 = 1.5\mu\text{m}$ . O que você pode concluir?