Potenciais Eletromagnéticos e Teoria da Radiação Eletromagnética

Prof. César Augusto Dartora - UFPR

E-mail: cadartora@eletrica.ufpr.br

Curitiba-PR

Roteiro da Aula:

- Potenciais Eletromagnéticos ϕ e $\mathbf{A}$
- Equação de Ondas para os Potenciais
- Solução da Equação de Ondas e Interpretação Física
- Discussão sobre a densidade de potência
- Teoria Básica da Radiação Eletromagnética

Os Potenciais ϕ e $\mathbf{A}$

$\rightsquigarrow$ Podemos resolver as equações de Maxwell através de funções matemáticas auxiliares.

$\rightsquigarrow$ Tais funções auxiliares são denominadas Potenciais Eletromagnéticos ϕ e $\mathbf{A}$.

ϕ é também conhecido como potencial escalar elétrico [V].

$\mathbf{A}$ é comumente chamado de potencial vetor magnético [V·s/m = Wb/m]

$\rightsquigarrow$ A teoria de antenas e da radiação eletromagnética faz uso extensivo dos mesmos. Algumas das características básicas podem ser extraídas diretamente dos potenciais, sem a necessidade de calcular os campos.

Sejam os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ definidos abaixo:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{2}$$

Note que as equações de Maxwell sem fontes ρ e $\mathbf{J}$ são automaticamente satisfeitas:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Para esta última resulta a lei de Faraday:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

ou seja, a lei de Gauss magnética e a lei de Faraday são automaticamente satisfeitas através das definições (1) e (2).

Liberdade de Calibre

$\leadsto$ Vamos mostrar agora que ϕ e $\mathbf{A}$ são multiplamente definidos, i.e., existem inúmeros potenciais distintos que levam ao mesmo resultado para os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

$\leadsto$ Em outras palavras, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são as grandezas físicas relevantes, enquanto ϕ e $\mathbf{A}$ não passam de artifícios matemáticos para determinar $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Consideremos

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

e façamos agora a seguinte transformação:

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda$$

onde $\Lambda(\mathbf{x}, t)$ é uma função escalar qualquer.

Calculando o campo $\mathbf{B}'$ resultante de $\mathbf{A}'$ temos:

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla\Lambda = \mathbf{B}$$

ou seja $\mathbf{B}' = \mathbf{B}$.

$\rightsquigarrow$ Fica como exercício demonstrar que $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$.

$\rightsquigarrow$ Mostramos portanto que existem uma infinidade de potenciais $(\phi, \mathbf{A})$ que levam aos mesmos campos $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$.

$\rightsquigarrow$ É conveniente então impor uma condição adicional para fixar $(\phi, \mathbf{A})$. Essa escolha é chamada calibre dos potenciais.

$\Rightarrow$ Utilizaremos aqui calibre conhecido como **calibre de Lorentz-Lorenz**, na qual a condição a ser satisfeita é:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

$\Rightarrow$ Existe um outro caso, chamado calibre de Coulomb

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$$

que não utilizaremos.

Exercício: Demonstre que para satisfazer as equações de Maxwell com fontes,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

os potenciais devem satisfazer as equações de ondas abaixo

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4}$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \tag{5}$$

Dica: substitua as definições abaixo

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

nas equações de Maxwell com fontes, e depois utilize o Calibre de Lorenz:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

Solução Formal das Equações de Ondas

A solução formal para as equações de ondas dos potenciais é dada por:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}',t'=t-R/c)}{R} d^3\mathbf{r}' \tag{6}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}',t'=t-R/c)}{R} d^3\mathbf{r}' \tag{7}$$

sendo $d^3\mathbf{r}' = dV'$ o diferencial de volume e

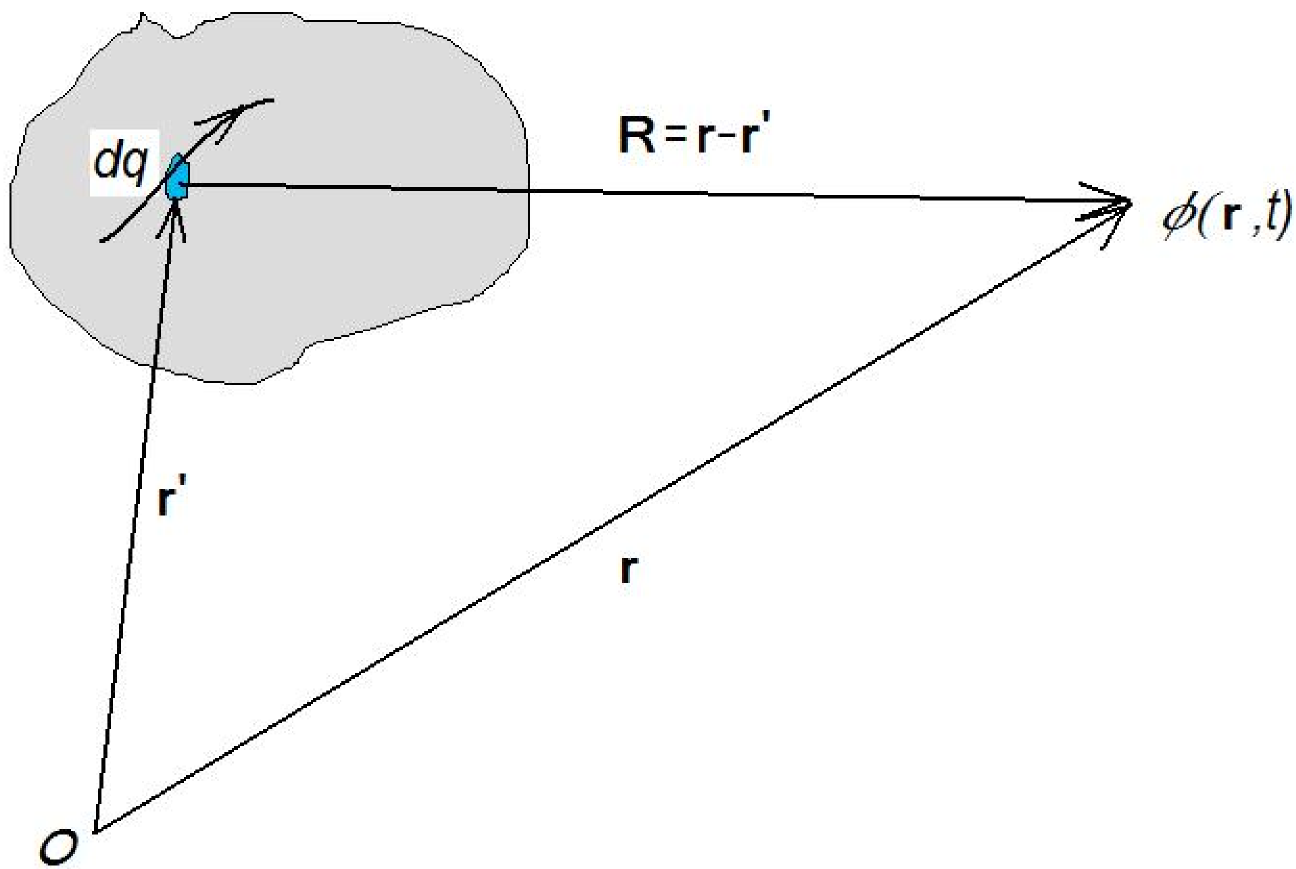
$$R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

Esta última equação também pode ser escrita na forma

$$R = |\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{r^2+r'^2-2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}$$

Interpretação Física da Solução

Para este fim, vamos analisar o potencial escalar elétrico $\phi(\mathbf{r},t)$. Considere a figura abaixo:



$\rightsquigarrow$ O potencial é gerado por uma distribuição de cargas $\rho(\mathbf{r}', t')$. Uma carga infinitesimal $dq = \rho dV'$ no volume V' da fonte está localizada na posição $\mathbf{r}'$ no instante de tempo local t'.

$\rightsquigarrow$ Um observador na posição $\mathbf{r}$ irá observar o potencial ϕ gerado por esta carga em um tempo t. Qualquer alteração na fonte irá aparecer somente depois de um retardo $\Delta t = t - t'$

Como a informação eletromagnética se propaga na velocidade c e a distância entre observador e fonte é R:

$$\Delta t = \frac{R}{c}$$

de onde concluímos que:

$$t' = t - \frac{R}{c}$$

ou seja, o potencial ϕ gerado na posição $\mathbf{r}$ no instante de tempo t foi gerado por uma configuração de cargas ρ que existia na posição $\mathbf{r}'$ em um tempo anterior $t' = t - \frac{R}{c}$. A solução da equação de ondas leva em conta o tempo de retardo da informação!!!

Potenciais no Regime Harmônico

Em regime harmônico temos variações do tipo $e^{i\omega t}$, e nesse caso

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - i\omega\mathbf{A} \tag{8}$$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \tag{9}$$

As equações de ondas tornam-se as equações de Helmholtz:

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{10}$$

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)\mathbf{A} = -\mu\mathbf{J} \tag{11}$$

onde

$$k = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

A solução é dada por:

$$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{e^{i\omega t}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{V'}\rho(\mathbf{x}')\frac{e^{-ikR}}{R}dV' \tag{12}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0 e^{i\omega t}}{4\pi}\int_{V'}\mathbf{J}(\mathbf{x}')\frac{e^{-ikR}}{R}dV' \tag{13}$$

$\rightsquigarrow$ Embora possa não parecer, sem nenhum tipo de aproximação fica muito complicado obter a integração das equações para os potenciais.

$\rightsquigarrow$ Vamos considerar então as situações nas quais a região fonte (antena) esteja centrada na origem do sistema de coordenadas, e a observação será realizada a distâncias grandes em relação à dimensão máxima da fonte, ou seja:

$$d = \max(|\mathbf{r}'|) << r$$

tal que:

$$R = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'} = r\sqrt{1 + \frac{r'^2}{r^2} - 2\frac{\mathbf{r}}{r^2}\cdot\mathbf{r}'}$$

Note que se $r' << r$ então

$$\frac{r'}{r} >> \frac{r'^2}{r^2}$$

e para o outro termo, observemos que

$$\frac{\mathbf{r}}{r} = \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{n}}$$

e portanto

$$2\frac{\mathbf{r}}{r^2}\cdot\mathbf{r}' = 2\mathbf{n}\cdot\frac{\mathbf{r}'}{r} \propto \frac{r'}{r}$$

Podemos então desprezar o termo quadrático

$$\frac{r'^2}{r^2}$$

e utilizar a seguinte aproximação:

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{a}{2} \quad , \quad \text{se} \quad a << 1$$

para obter a seguinte expressão para R:

$$R = r - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}' \tag{14}$$

Nas equações de $\mathbf{A}$ e ϕ aparecem os seguintes termos:

$$e^{-ikR} \approx e^{-ikr} e^{ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}'}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'} \approx \left(\frac{1}{r} + \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) \approx \frac{1}{r}$$

$\rightsquigarrow$ Justifica-se a eliminação de $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'$ em $1/R$ mas não em e^{-ikR} pois a exponencial, além de ser oscilatória, contem o fator multiplicativo k. Mesmo $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'$ sendo pequeno, o produto com k pode resultar um número grande. Tem-se então:

$$\frac{e^{-ikR}}{R} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} e^{ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}'}$$

Nesta aproximação, o cálculo dos potenciais resume-se às seguintes integrais:

$$\phi(\mathbf{x},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}\int_{V'} \rho(\mathbf{r}')e^{ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}'}dV' \tag{15}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}\int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}'}dV' \tag{16}$$

$\rightsquigarrow$ Observe que:

$$\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}$$

corresponde à uma onda esférica que se propaga na direção $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{r}$ com velocidade $c = \omega/k$. O fator $1/r$, como veremos adiante significa que a dens. de potência decai com $1/r^2$, conservando a potência total.

Os termos de integral:

$$\int_{V'} f(\mathbf{r}')e^{ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}'}dV' = \int_{V'} f(\mathbf{r}')e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}dV' = F(\mathbf{k}) = F(k\hat{\mathbf{n}})$$

onde $f \Rightarrow \rho$ ou $f \Rightarrow \mathbf{J}$ correspondem à transf. de Fourier generalizada dos termos ρ e $\mathbf{J}$, passando do domínio $\mathbf{r}'$ para o domínio $\mathbf{k}$.

Lembrando que ϕ e $\mathbf{A}$ estão conectados pelo calibre de Lorenz, que em regime harmônico poode ser escrito como:

$$\phi = \frac{ic^2}{\omega} \nabla \cdot \mathbf{A}$$

no caso de análise de antenas, basta conhecer o potencial $\mathbf{A}$ para determinar os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu_0$.

$\rightsquigarrow$ Uma vez que $\mathbf{A}$ somente é função da densidade de correntes $\mathbf{J}$ na fonte, não é necessário conhecer a distribuição de cargas ρ.

$\rightsquigarrow$ Lembre-se que se a fonte está confinada a uma região pequena do espaço, e estamos observando os campos longe das fontes, a densidade de corrente no ponto de observação é nula, embora o potencial $\mathbf{A}$ gerado naquele ponto dependa de $\mathbf{J}$ em $\mathbf{r}'$.

Na região longe da fonte, $\mathbf{J} = 0$ e adotaremos o seguinte procedimento:
$\rightsquigarrow$ Calcularemos o potencial vetor $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r}\int_{V'}\mathbf{J}(\mathbf{r}')e^{ik\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{r}'}dV'$$

$\rightsquigarrow$ Determinaremos $\mathbf{H}$

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\mathbf{A}$$

$\rightsquigarrow$ Determinaremos $\mathbf{E}$ da lei de Ampère-Maxwell:

$$\mathbf{E} = \frac{c^2}{i\omega}\nabla\times\mathbf{B} = -i\frac{Z_0}{k}\nabla\times\mathbf{H}$$

Lembrando que:

$$Z_0 = c\mu_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

$$\omega = ck$$

Considerações sobre o vetor de Poynting

Uma vez que tenhamos calculado os campos, sabemos que o fluxo de potência pode ser medido através do vetor de Poynting:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \tag{17}$$

enquanto que pelo teorema de Poynting, a potência total que flui através de certo volume V através das suas fronteiras, i.e., através da superfície que delimita o volume $a(V)$ é dada por:

$$P_a = \oint_{a(V)} \mathbf{S}_{med} \cdot d\mathbf{a} \tag{18}$$

DEF.: A Radiação Eletromagnética é a densidade de potência que flui radialmente para fora da região de fonte e que se propaga para o infinito, constituindo uma potência que é perdida pela fonte para o campo eletromagnético.

$\rightsquigarrow$ O campo radiado pela fonte torna-se independente da mesma, podendo à medida que se propaga ao infinito ser absorvido, refletido, refratado, etc...

$\rightsquigarrow$ Para um observador distante, fazendo medidas em um volume pequeno ($V_{obs} << r^3$), o campo eletromagnético radiado terá todas as características das ondas planas uniformes.

$\rightsquigarrow$ Portanto, para saber quanta potência se transferiu da fonte para o infinito, podemos considerar os limites de um volume infinitamente grande, cuja fronteira $a(V)$ é uma superfície esférica de raio $r \to \infty$.

Nesse caso

$$d\mathbf{a} = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{r}$$

de tal forma que:

$$P_{rad} = \lim_{r\to\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (\mathbf{S}_{med} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{r}) r^2 \sin\theta d\theta d\varphi \qquad (19)$$

Definindo a densidade de potencia de radiação, S_{rad}, conforme abaixo:

$$S_{rad} = \mathbf{S}_{med} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{r} \qquad (20)$$

podemos em coordenadas esféricas separar as variáveis, na forma abaixo:

$$S_{rad}(r,\theta,\varphi) = R(r) f(\theta,\varphi)$$

para obter

$$P_{rad} = \lim_{r\to\infty} [r^2 R(r)] \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \qquad (21)$$

onde temos:

$$0 < \left(\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta,\varphi) \sin\theta d\theta d\varphi \right) < \infty$$

Portanto, uma vez que a integral de $f(\theta,\varphi)$ é limitada, na expressão de P_{rad}:

$$P_{rad} = \lim_{r\to\infty}[r^2R(r)]\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\theta,\varphi)\sin\theta d\theta d\varphi \tag{22}$$

temos várias hipóteses para $R(r)$:

$\rightsquigarrow$ Sendo

$$R(r) = S_0 r^n, \quad n > -2$$

temos

$$P_{rad} \to \infty$$

o que é impossível fisicamente!

$\rightsquigarrow$ Sendo

$$R(r) = S_0\frac{1}{r^n}, \quad n > 2$$

temos

$$P_{rad} \to 0$$

possível fisicamente, mas não corresponde à radiação!

$\leadsto$ Sendo

$$R(r) = S_0 \frac{1}{r^2},$$

temos

$$P_{rad} \propto \lim_{r \to \infty} r^2 \frac{S_0}{r^2} \to cte$$

Corresponde à radiação eletromagnética!

$\leadsto$ Significa que a densidade de potência radiada é dada por:

$$S_{rad} = \frac{S_0}{r^2} f(\theta, \varphi)$$

$\leadsto$ A potência radiada se conserva pois à medida que a onda radiada se propaga a densidade de potência cai com $1/r^2$ mas a área varrida pela frente de onda aumenta com r^2, de forma que há compensação.

Uma vez que

$$S_{rad} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{r}$$

Então

$$\mathbf{E}_{rad} \propto \frac{1}{r}$$

$$\mathbf{H}_{rad} \propto \frac{1}{r}$$

Teoria da Radiação Eletromagnética

$\rightsquigarrow$ Os campos de radiação devem ter dependência na forma $1/r$

$$\mathbf{E}_{rad} \propto \frac{1}{r}$$
$$\mathbf{H}_{rad} \propto \frac{1}{r}$$

$\rightsquigarrow$ A densidade de potência radiada no espaço livre decai na forma $1/r^2$.

$\rightsquigarrow$ É possível mostrar que para haver radiação a carga elétrica deve estar em movimento acelerado.

$\rightsquigarrow$ Esta condição é sempre satisfeita no regime harmônico, pois a velocidade das cargas oscila senoidalmente, havendo portanto aceleração.

$\rightsquigarrow$ Existem alguns modelos bem simplistas que mostram esse fato. Um deles é conhecido como Modelo de Thomson da Radiação.

Exercícios:

1) Pesquisar e Explicar: Modelo de Thomson da Radiação. Potenciais de Liènard-Wiechert e A Carga Acelerada. Fórmula de Larmor. O problema da radiação de uma carga acelerada no modelo atômico de Rutherford e o modelo atômico quântico de Bohr.

2) Dada a densidade de corrente abaixo, para antena conhecida como dipolo elétrico ideal:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') = I_0 \delta(x')\delta(y')\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} \quad , \quad -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2}$$

sendo $\delta(x')$ e $\delta(y')$ as funções impulso ou delta de Dirac determine $\mathbf{A}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Analise as componentes de campo e extraia os campos de radiação (considerar somente as componentes de campo que variam com $1/r$), a densidade de potência radiada e a potência radiada.