

TE053-Ondas Eletromagnéticas

## A RADIAÇÃO DO DIPOLO ELÉTRICO

PROF. CÉSAR AUGUSTO DARTORA - UFPR

E-MAIL: CADARTORA@ELETRICA.UFPR.BR

CURITIBA-PR

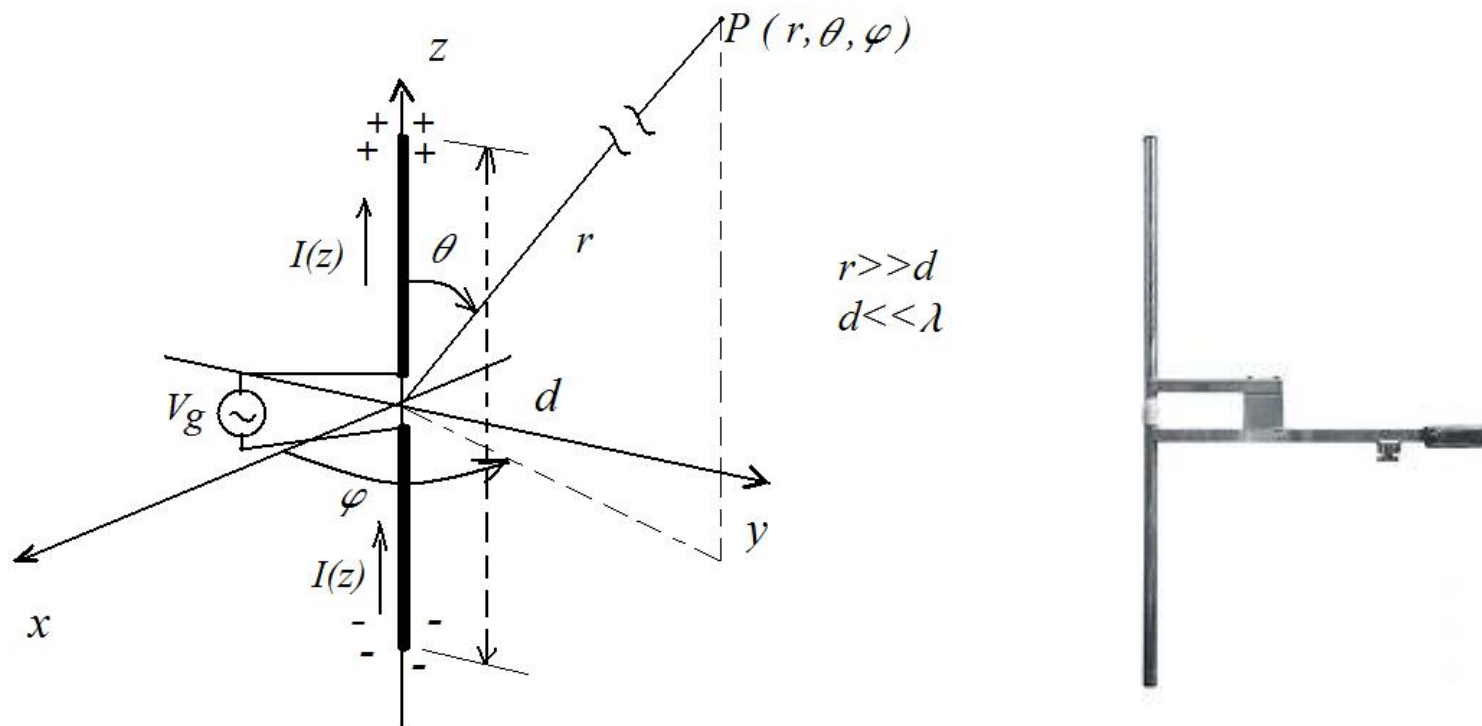
## Roteiro da Aula:

- A antena dipolo elétrico e a aproximação do dipolo curto
- Cálculo dos potenciais e dos campos
- Campo Próximo e Campo de Radiação
- Potência e Densidade de Potência Eletromagnética Radiada
- Teoria Básica da Radiação Eletromagnética

## O Dipolo Elétrico

↪ Antenas são elementos capazes de radiar energia na forma eletromagnética de forma eficiente.

↪ A antena mais simples é o chamado dipolo elétrico, ilustrado na figura abaixo (à direita imagem de um dipolo real):



↪ quando  $d \ll \lambda$  há duas formas de aproximação da corrente  $I(z)$ :

↪ Aproximação do Dipolo Ideal

$$I(z) = \begin{cases} I_0 & \text{para } -d/2 \leq z \leq d/2 \\ 0 & \text{para } |z| > d/2 \end{cases} \quad (1)$$

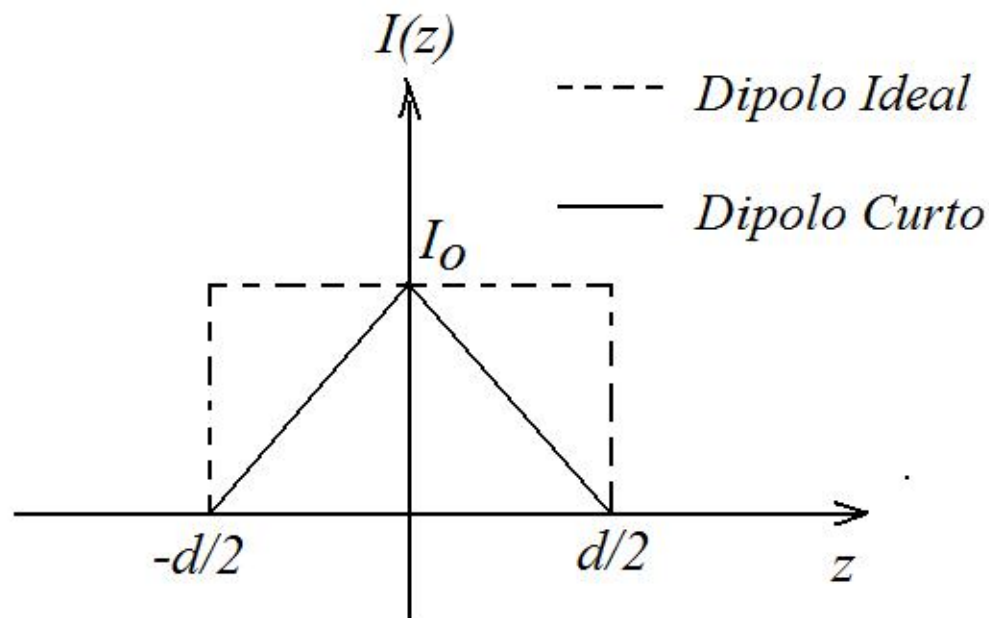
↪ Aproximação do Dipolo Curto (a que usaremos aqui): Como os extremos são abertos, a corrente elétrica neles deve ser nula de tal modo que a distribuição de corrente no dipolo curto é aproximada por:

$$I(z) = \begin{cases} I_0 (1 - 2z/d) & \text{para } z > 0 \\ I_0 (1 + 2z/d) & \text{para } z < 0 \end{cases} \quad (2)$$

sendo o vetor densidade de corrente da forma:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = I(z)\delta(x)\delta(y)\hat{\mathbf{a}}_z \quad (3)$$

onde  $\delta(\cdot)$  são as funções delta de Dirac.



Note que a "área" correspondente à integral  $\int_{-d/2}^{d/2} I(z') dz'$  será  $I_0 d$  para a aproximação Dipolo Ideal e no nosso caso, para o Dipolo Curto:

$$\int_{-d/2}^{d/2} I(z') dz' = \frac{I_0 d}{2}$$

## Determinação do Potencial A

Na aproximação em que  $r' \ll r$  temos:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{r}') e^{ik\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'} dV' \quad (4)$$

Substituindo  $\mathbf{J}(\mathbf{r}')$  na equação acima tem-se

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int_{V'} I(z') \delta(x') \delta(y') \hat{\mathbf{a}}_z e^{ik\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}'} dV' \quad (5)$$

Lembrando que  $dV' = dx' dy' dz'$  e  $\hat{\mathbf{a}}_z(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{a}}_z(\mathbf{r}')$  podemos sacá-lo da integral, e ainda das propriedades de funções delta de Dirac:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - \beta) d\alpha = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - \beta) f(\alpha) d\alpha = f(\beta)$$

obtem-se uma expressão válida para qualquer antena filamentar:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{i(\omega t - kr)}}{r} \int_{-d/2}^{d/2} I(z') e^{ik \cos \theta z'} dz' \hat{\mathbf{a}}_z \quad (6)$$

↪ Assumindo que  $d \ll \lambda$ , podemos aproximar a exponencial na integral:

$$e^{ik \cos \theta z'} \approx 1 + ik \cos \theta z'$$

Lembrando que:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

na primeira aproximação podemos negligenciar o fator  $kz'$  uma vez que  $\max(|z'|) = d/2$  e  $d \ll \lambda$ , portanto

$$\max(k \cos \theta z') = \frac{kd}{2} = \frac{\pi d}{\lambda} \ll 1$$

$$e^{ik \cos \theta z'} \approx 1$$

↪ No caso do dipolo curto esta é uma boa aproximação. Há casos em que aproximar a exponencial pela unidade dá resultados nulos, devendo-se então ir para o termo seguinte da série. (Vide o caso do dipolo magnético).

Fazendo a aproximação mencionada anteriormente tem-se:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r} \int_{-d/2}^{d/2} I(z') dz' \hat{\mathbf{a}}_z \quad (7)$$

Resolvendo a integral, basta lembrar que tem-se a "área" da figura de distribuição de corrente, conforme comentado anteriormente, ou seja

$$\int_{-d/2}^{d/2} I(z') dz' = \frac{I_0 d}{2},$$

ficamos com:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \hat{\mathbf{a}}_z \quad (8)$$



É convencional trabalhar o potencial vetor e os campos em coordenadas esféricas. Lembre que:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} [(\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_r)\hat{\mathbf{a}}_r + (\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\theta)\hat{\mathbf{a}}_\theta + (\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\phi)\hat{\mathbf{a}}_\phi] \quad (9)$$

Do cálculo vetorial:

$$\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_r = \cos \theta$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\theta = -\sin \theta$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_\phi = 0$$

(Coordenadas esféricas são mais convenientes para tratar a radiação de uma antena).

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} [\cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r - \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta] \quad (10)$$

## Cálculo dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$

Lembremos que:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (11)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - i\omega\mathbf{A} = \frac{c^2}{i\omega}\nabla \times \mathbf{B} \quad (12)$$

Para não ser necessário o cálculo de  $\phi$  devemos determinar primeiramente o campo  $\mathbf{B}$  e depois  $\mathbf{E}$ . Calculando o campo magnético:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{a}}_r + \\ & + \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right) \hat{\mathbf{a}}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{a}}_\phi \end{aligned}$$

sendo as componentes de  $\mathbf{A}$  em coordenadas esféricas:

$$A_r = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \cos \theta \quad , \quad A_\theta = -\frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \quad , \quad A_\phi = 0 \quad .$$

Uma vez que  $A_\varphi = 0$  e todas as derivadas em relação a  $\varphi$  também são nulas (observe que nesse caso  $\mathbf{A}$  não varia com  $\varphi$ ):

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (13)$$

Agora calculando as derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) = \frac{ik\mu_0 I_0 d}{8\pi} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta$$

$$\frac{\partial A_r}{\partial \theta} = -\frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta$$

e substituindo em (13) nos dá:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi} \left( \frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\varphi \quad (14)$$

Calculando o campo elétrico, também devemos avaliar um rotacional, de modo que

$$\mathbf{E} = -i \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\omega \mu_0 \epsilon} = \frac{c^2}{i\omega} \nabla \times \mathbf{B}$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\phi \sin \theta) - \frac{\partial B_\theta}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{a}}_r + \\ &+ \frac{1}{r} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial B_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \right) \hat{\mathbf{a}}_\theta + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r B_\theta) - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{a}}_\phi \end{aligned}$$

Nesse caso só temos componente do campo  $\mathbf{B}$  na direção  $\phi$  simplificando o rotacional para:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\phi \sin \theta) \hat{\mathbf{a}}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \hat{\mathbf{a}}_\theta$$

Temos então:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{i\omega \mu_0 \epsilon} \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B_\phi \sin \theta) \hat{\mathbf{a}}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\phi) \hat{\mathbf{a}}_\theta \right)$$

Exercício: Demonstre, calculando as derivadas e utilizando as relações:

$$\omega = ck$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = c\mu_0$$

que o campo elétrico resultante será dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \frac{Z_0 I_0 d}{8\pi} e^{i(\omega t - kr)} \left[ 2 \cos \theta \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{ikr^3} \right) \hat{\mathbf{a}}_r + \right. \\ & \left. + \sin \theta \left( \frac{ik}{r} + \frac{1}{r^2} + \frac{1}{ikr^3} \right) \hat{\mathbf{a}}_\theta \right] \end{aligned} \quad (15)$$

↪ Vemos que o campo elétrico possui componentes  $E_r$  e  $E_\theta$ . Somente  $E_\theta$  possui dependência do tipo  $1/r$ , e que irá contribuir para o campo distante, conforme veremos adiante.

↪ É possível perceber também que os campos possuem termos variando com  $1/r$ ,  $1/r^2$  e  $1/r^3$ . Em cada região do espaço algum desses termos é predominante, permitindo definir regiões de campo.

↪ Tomemos como referência a componente do campo elétrico  $E_\theta$ , que possui as três dependências:

$$E_\theta(1/r) = \frac{Z_0 I_0 d}{8\pi} e^{i(\omega t - kr)} \frac{ik}{r} \sin \theta$$

$$E_\theta(1/r^2) = \frac{Z_0 I_0 d}{8\pi} e^{i(\omega t - kr)} \frac{1}{r^2} \sin \theta$$

$$E_\theta(1/r^3) = \frac{Z_0 I_0 d}{8\pi} e^{i(\omega t - kr)} \frac{1}{ikr^3} \sin \theta$$

Em módulo temos as seguintes relações entre as componentes:

$$\left| \frac{E_\theta(1/r^2)}{E_\theta(1/r)} \right| = \frac{1}{kr} \quad , \quad \left| \frac{E_\theta(1/r^3)}{E_\theta(1/r)} \right| = \frac{1}{(kr)^2} \quad , \quad \left| \frac{E_\theta(1/r^2)}{E_\theta(1/r^3)} \right| = \frac{1}{kr} \quad (16)$$

## Regiões do Campo

⇒ De acordo com a distância  $r$  em relação à fonte a dominância de algumas componentes dos campos sobre as outras varia.

⇒ Por esta razão é conveniente classificar as regiões de campo e estudar suas características particulares. Temos essencialmente três regiões distintas:

### Região do Campo Próximo:

É a região mais próxima da fonte e os termos dominantes são aqueles na forma  $1/r^n$  com o maior  $n$  encontrado nas soluções.

→ Para o dipolo elétrico o termo  $1/r^3$  é dominante no campo elétrico, enquanto o termo  $1/r^2$  domina para o campo magnético.

→ Para que isso aconteça devemos ter  $1/(kr) \gg 1$  de tal forma que a condição obtida, fazendo uso de  $k = 2\pi/\lambda$ , onde  $\lambda$  é o comprimento de onda, é:

$$r \ll \lambda$$

ou seja, a região de campo próximo é aquela em que o ponto de observação está a uma distância da fonte muito menor que o comprimento de onda.

⇒ O cálculo dos campos na região  $r \ll \lambda$  pode ser aproximado por soluções quase estáticas.

Outro ponto importante é que não há uma relação fixa entre campo elétrico e magnético nessa região.

O campo gerado na região próxima por um dipolo elétrico é predominantemente elétrico, ou seja, predominam os efeitos elétricos:

$$\mathbf{E} \approx \frac{I_0 d}{8\pi(i\omega\epsilon)r^3} e^{i(\omega t - kr)} [2 \cos \theta \hat{\mathbf{a}}_r + \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\theta] \quad (17)$$

$$\mathbf{B} \approx \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi r^2} e^{i(\omega t - kr)} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\phi \quad (18)$$

⇒ Verifique em livros de Teoria Eletromagnética, que definindo o momento de dipolo elétrico na forma

$$p = \frac{I_0 d}{2i\omega}$$

obtemos um dipolo oscilante no tempo onde as cargas oscilam entre os dois extremos dos fios.



Consideremos o Vetor de Poynting para os Campos Próximos, calculado a partir da expressão:

$$\mathbf{S}_{rms} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \}$$

Substituindo (17) e (18) vemos que não há parte real.

⇒ Significa que o campo próximo tem contribuição apenas reativa (energia armazenada) e dá contribuição nula para a radiação eletromagnética.

⇒ Além disso o vetor de Poynting tem dependência em  $r$  na forma  $1/r^n$  e  $n > 2$ .

No caso dos campos próximos sem levar em conta termos de  $1/r^2$  no campo elétrico a dependência em  $r$  é  $1/r^5$  e levando o termo  $1/r^2$  em conta resulta numa dependência  $1/r^4$ .

A potência radiada total obtida para o campo próximo:

$$P = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_a \mathbf{S}_{rms} \cdot d\mathbf{a} \propto \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r^3} \rightarrow 0$$

## Zona Intermediária

⇒ Vale a relação  $1/(kr) \approx 1$ , ou seja as distâncias são da ordem do comprimento de onda  $\lambda$ .

$$r \sim \lambda$$

Nessa região todas as componentes tem uma contribuição importante para o campo total e há grande interferência entre as componentes de campo.

## Região do Campo Distante ou Campo de Radiação

Correspondeo à região:

$$r \gg \lambda$$

As componentes de campo predominantes na região distante são as que contribuem para radiação eletromagnética. Nessa região predominam os termos com dependência  $1/r$ :

$$\mathbf{E} = \frac{I_0 d}{8\pi} \left( \frac{i\omega\mu_0}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} \sin\theta \hat{\mathbf{a}}_\theta \quad (19)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi} \left( \frac{ik}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} \sin\theta \hat{\mathbf{a}}_\phi \quad (20)$$

⇒ Os campos (19) e (20) ortogonais entre si e apresentam uma relação de proporção constante, sendo o campo elétrico na direção  $\theta$  e o campo magnético na direção  $\varphi$ :

$$\frac{E_\theta}{B_\varphi} = \frac{\frac{I_0 d}{8\pi} \left(\frac{i\omega\mu_0}{r}\right) \sin\theta}{\frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi} \left(\frac{ik}{r}\right) \sin\theta} = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon}} = c \quad (21)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no meio com permissividade  $\epsilon$ . (Estamos considerando meios não magnéticos, por isso  $\mu = \mu_0$ ).

A relação entre  $E_\theta$  e  $H_\varphi$  é a impedância do meio, e podemos concluir da própria relação (21):

$$\frac{E_\theta}{H_\varphi} = \mu_0 \frac{E_\theta}{B_\varphi} = \frac{\mu_0}{\sqrt{\mu_0\epsilon}} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon}} = Z, \quad (22)$$

⇒ Agora que vimos que  $E_\theta$  e  $B_\phi$  mantêm uma relação constante na região de campo distante, vamos determinar o vetor de Poynting:

$$\mathbf{S}_{rms} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \}$$

$$\mathbf{S}_{rms} = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left\{ \frac{I_0 d}{8\pi} \left( \frac{i\omega\mu_0}{r} \right) e^{i(\omega t - kr)} \sin\theta \hat{\mathbf{a}}_\theta \times \left( \frac{\mu_0 I_0 d}{8\pi} \left( \frac{-ik}{r} \right) e^{-i(\omega t - kr)} \sin\theta \hat{\mathbf{a}}_\phi \right) \right\}$$

$$\mathbf{S}_{rms} = \frac{1}{2} \frac{I_0^2 d^2}{(8\pi)^2} \left( \frac{k\omega\mu_0}{r^2} \right) \sin^2\theta \hat{\mathbf{a}}_r$$

Agora fazemos uso de  $k = 2\pi/\lambda$  e  $\omega = ck = 2\pi c/\lambda$  então temos  $k\omega\mu_0 = (2\pi)^2 c\mu_0/\lambda^2$ , e ainda  $\mu_0 c = Z_0$ , desse modo

$$k\omega\mu_0 = \frac{(2\pi)^2}{\lambda^2} Z_0$$

e o resultado final para o Vetor de Poynting, que representa a densidade de potência que atravessa uma superfície:

$$\mathbf{S}_{rms} = \frac{Z_0 I_0^2}{32} \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2\theta \hat{\mathbf{a}}_r \quad (23)$$

⇒ Queremos saber agora qual a potência radiada, para isso temos que integrar o vetor de Poynting:

$$P = \lim_{r \rightarrow \infty} \oint_S \mathbf{S}_{rms} \cdot d\mathbf{a} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{Z_0 I_0^2}{32} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta \hat{\mathbf{a}}_r \cdot \hat{\mathbf{a}}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

Integrando a variável  $\varphi$ :

$$P = \frac{2\pi Z_0 I_0^2}{32} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \int_0^{\pi} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta r^2 \sin \theta d\theta = \frac{2\pi Z_0 I_0^2}{32} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \int_0^{\pi} d\theta \sin^3 \theta$$

Agora temos, de uma tabela de integrais:

$$\int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$$

e obtemos o resultado final:

$$P = \frac{\pi Z_0 I_0^2}{12} \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \quad (24)$$

⇒ Observe que mesmo fazendo  $r \rightarrow \infty$ , a potência não é anulada, ou seja, esta potência deixou a fonte emissora, foi radiada.

⇒ Tendo sido radiada essa energia é perdida pela fonte e convertida em ondas eletromagnéticas que se propagam ao infinito, a menos que seja absorvida por outras cargas, meios materiais, etc.

⇒ Uma vez radiada tem independência da fonte e seus efeitos não cessam mesmo que cessada a fonte. Continuam viajando para longe da fonte e podem sofrer reflexão, refração, interferência, etc.

⇒ Os campos radiados influenciam a grandes distâncias. São estes os desejados em sistemas de comunicações.

⇒ Do ponto de vista de circuitos elétricos, podemos definir ainda uma resistência de radiação, já que a fonte perde energia na forma de ondas que se desprendem da fonte, e vão ao infinito na forma:

$$P = \frac{1}{2}RI_0^2 \Rightarrow R = \frac{2P}{I_0^2}$$

e daqui tiramos, no caso do dipolo curto:

$$R = \frac{\pi Z_0}{6} \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 \quad (25)$$

Se usarmos  $Z_0 = 120\pi \Omega$  temos:

$$R = 20\pi^2 \left( \frac{d}{\lambda} \right)^2 \Omega \quad (26)$$

onde  $d$  é o tamanho total do dipolo.

Para um dipolo com  $d = \lambda/10$  obtemos:

$$R = \frac{\pi^2}{5} \Omega$$

o que significa dizer que a resistência de perdas por radiação é de aproximadamente  $2\Omega$ .

⇒ Em geral perdas por radiação podem ser desprezadas em circuitos elétricos se o tamanho do circuito é muito pequeno comparado ao comprimento de onda do sinal eletromagnético que percorre o circuito.

⇒ Todavia é desejável que antenas tenham grande resistência de radiação. O dipolo de meia onda tem resistência de radiação de  $73\Omega$  aproximadamente.