

TE053-Ondas Eletromagnéticas

ONDAS GUIADAS

PROF. CÉSAR AUGUSTO DARTORA - UFPR

E-MAIL: CADARTORA@ELETRICA.UFPR.BR

CURITIBA-PR

Roteiro da Aula:

- Conceitos Fundamentais sobre Guias de Ondas e Linhas de Transmissão
- Decomposição Transversal-Longitudinal
- Análise das Linhas de Transmissão
- Análise dos Guias de Ondas Metálicos

1 Conceitos Fundamentais

⇒ Propagação de Ondas Eletromagnéticas é descrita de forma completa pelas Equações de Maxwell. A energia pode se propagar de duas formas principais:

- ↪ Ondas Guiadas (Guided Waves);
- ↪ Ondas Não-Guiadas (Wireless);

⇒ Excluindo-se as situações em que o uso de ondas guiadas não é possível (Radar, Telemetria, Telefonia Móvel, Broadcasting, etc) as comunicações por ondas guiadas usualmente apresentam maior confiabilidade, com a contrapartida de maior custo de implementação e manutenção.

↪ Na **Propagação Não-Guiada** predominam dois fenômenos ondulatórios denominados **Atenuação e Difração** em espaço livre.

↪ A **Propagação Guiada** é capaz de compensar a difração (no sentido mais amplo da palavra), todavia introduz o fenômeno de **Dispersão temporal**.

Sistemas Não-Guiados

Propagação se dá em espaço "livre". Densidade de Potência varia na forma $S_r \propto 1/r^2$. Requer um sistema radiante (antenas). Apresenta inúmeras aplicações:

- Broadcasting de rádio e TV;
- Internet via rádio
- Telefonia Móvel Celular;
- Sistemas de Radar Civil e Militar, Sensoreamento remoto;
- Teleguiamento de objetos, aplicações militares;
- Comunicação via satélite, links de visada direta;
- Conexões locais wireless, etc;

Sistemas Guiados

A onda é guiada através de um guia de ondas (linha de transmissão, cabo coaxial, fibra óptica).

- TV a cabo
- Internet banda larga via cabo;
- Telefonia e Transmissão de Dados;
- Comunicações Transoceânicas de altas taxas de transmissão por fibra óptica;
- Transmissão de Potência em 60Hz;
- Redes locais, Redes de longas distâncias;

Difração

Em um senso bastante geral é todo e qualquer desvio e encurvamento da propagação de uma onda em relação às previsões da Óptica Geométrica.

Sempre ocorre em sistemas não-guiados, onde a densidade de potência decai na forma $1/r^2$ pelo menos, para a região de campo distante (Fraunhofer).

É um fenômeno espacial e ocorre mesmo com uma onda monocromática (única frequência). Existem soluções não difrativas como por exemplo: onda plana uniforme, feixes de Bessel, feixes de Mathieu, etc... (na prática apenas aproximações são realizáveis).

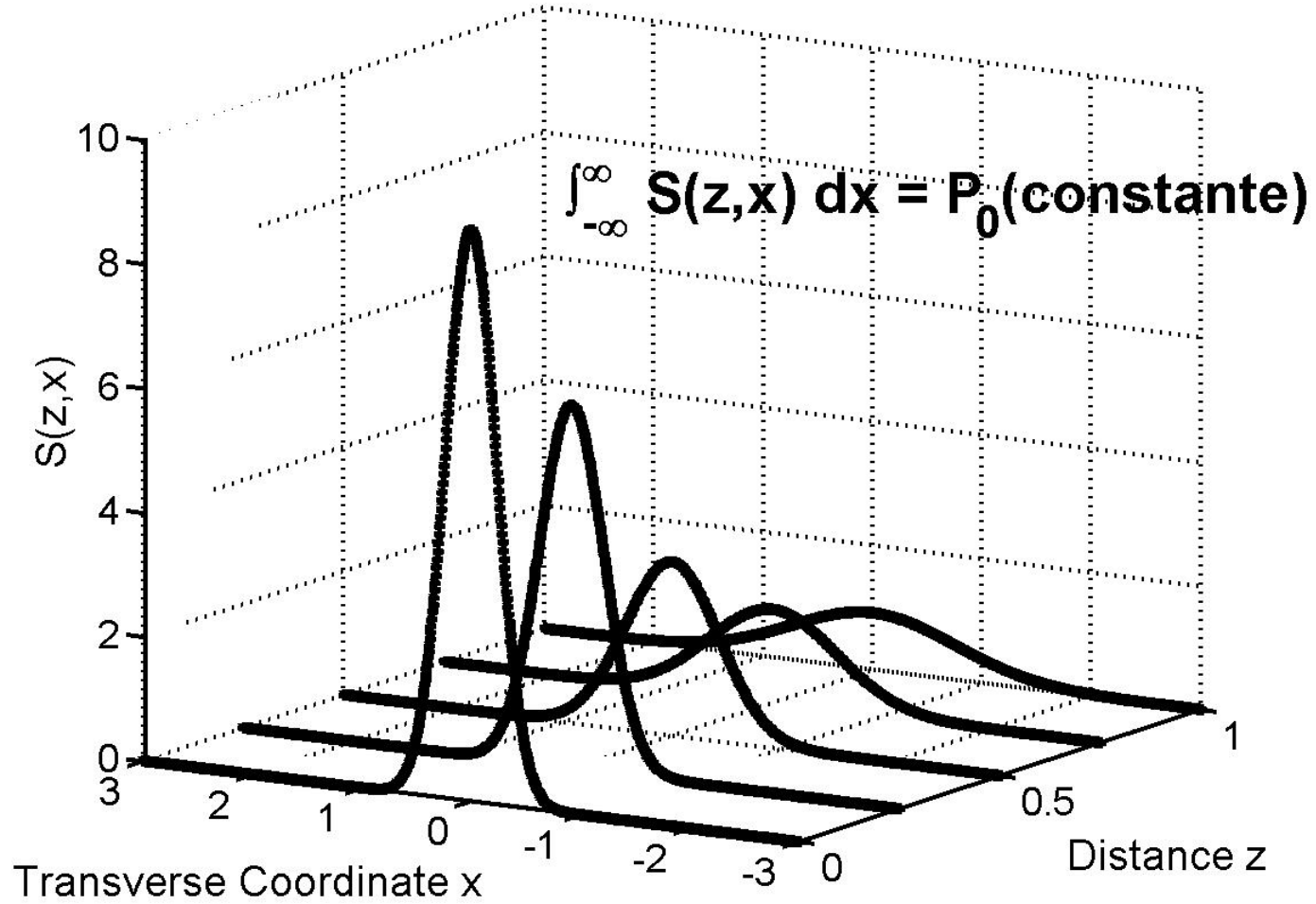


Figure 1: Fenômeno de difração em uma gaussiana.

Dispersão

É um fenômeno que ocorre no domínio do tempo, caracterizado pelo alargamento e degradação temporal de um sinal qualquer. À medida que um pulso de largura inicial τ_0 se propaga, a largura temporal τ vai aumentando (pode diminuir em algumas circunstâncias), quando o meio é dispersivo. Velocidade de propagação da onda depende da frequência.

Sempre ocorre em sistemas guiados, onde a densidade de potência é constante ao longo da seção transversal do guia, desde que este não tenha perdas por atenuação. Pode ocorrer também em sistemas não-guiados quando o meio de transmissão apresenta características dependentes da frequência.

Somente ocorre com um grupo de ondas de frequências diferentes. Requer portanto que o sinal tenha uma largura de banda de frequências.

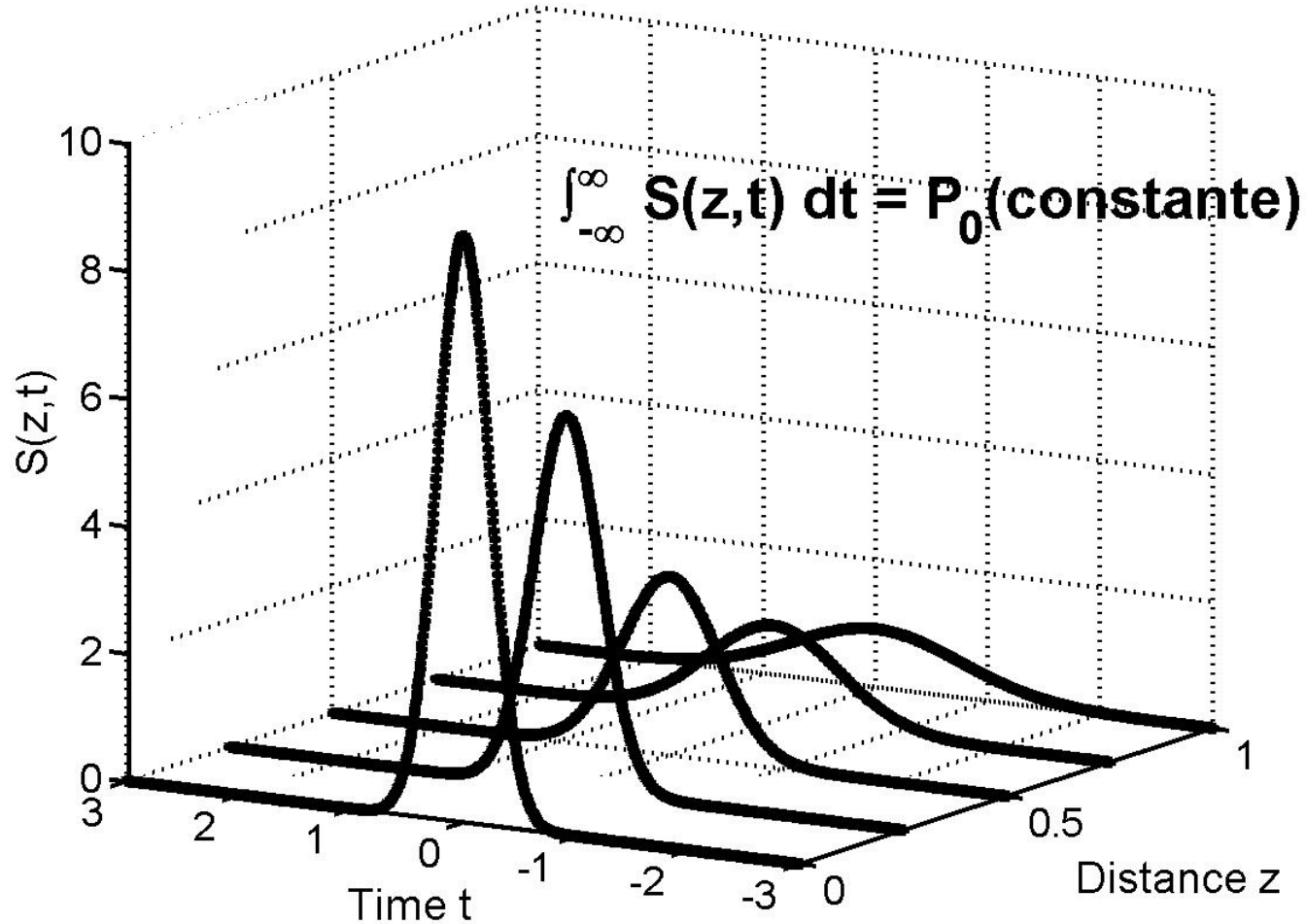
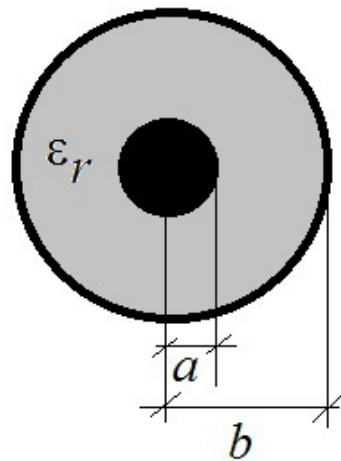
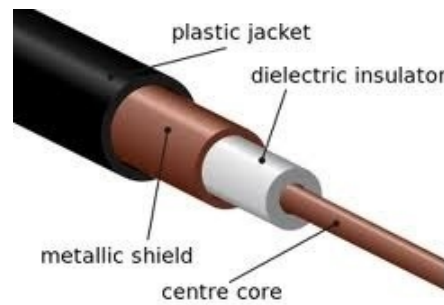


Figure 2: Fenômeno de dispersão em uma gaussiana temporal. A portadora não está sendo mostrada, apenas a envoltória.

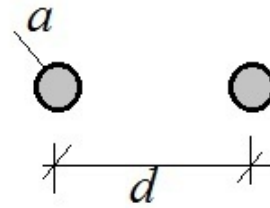
Principais Tipos de Guias de Onda

Linha de Transmissão

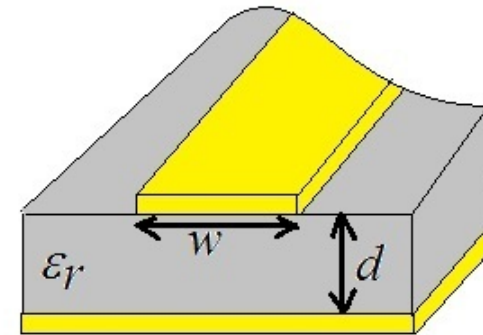
- Muitos autores consideram as estruturas de LT como guias de ondas e outros preferem tratá-las em separado.
- A Linha de Transmissão deve ser constituída de pelo menos duas superfícies condutoras mantidas a uma diferença de potencial.
- Admite soluções TEM, o que a diferencia dos demais tipos de guias.
- Não apresentam frequência de corte. Idealmente poderiam operar deste o regime DC até frequência $f \rightarrow \infty$. Na prática as perdas em altas frequências limitam seu uso até o espectro de microondas.
- São exemplos típicos de LT as seguintes estruturas: i) par de condutores, ii) guia coaxial, iii) microstrip lines.



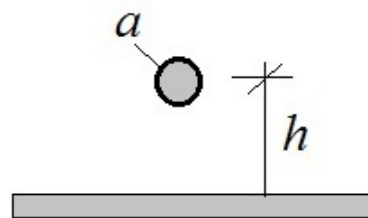
Guia Coaxial



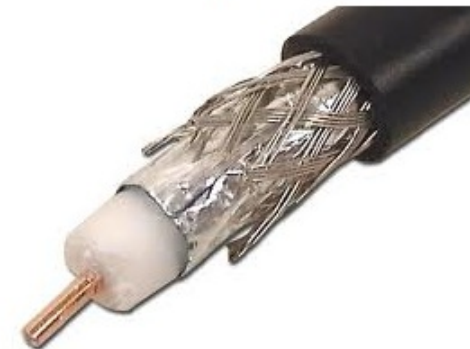
Par de Condutores



Microstrip Line



Condutor sobre Plano Terra



Cabo Coaxial RG

Figure 3: Linhas de Transmissão Típicas.

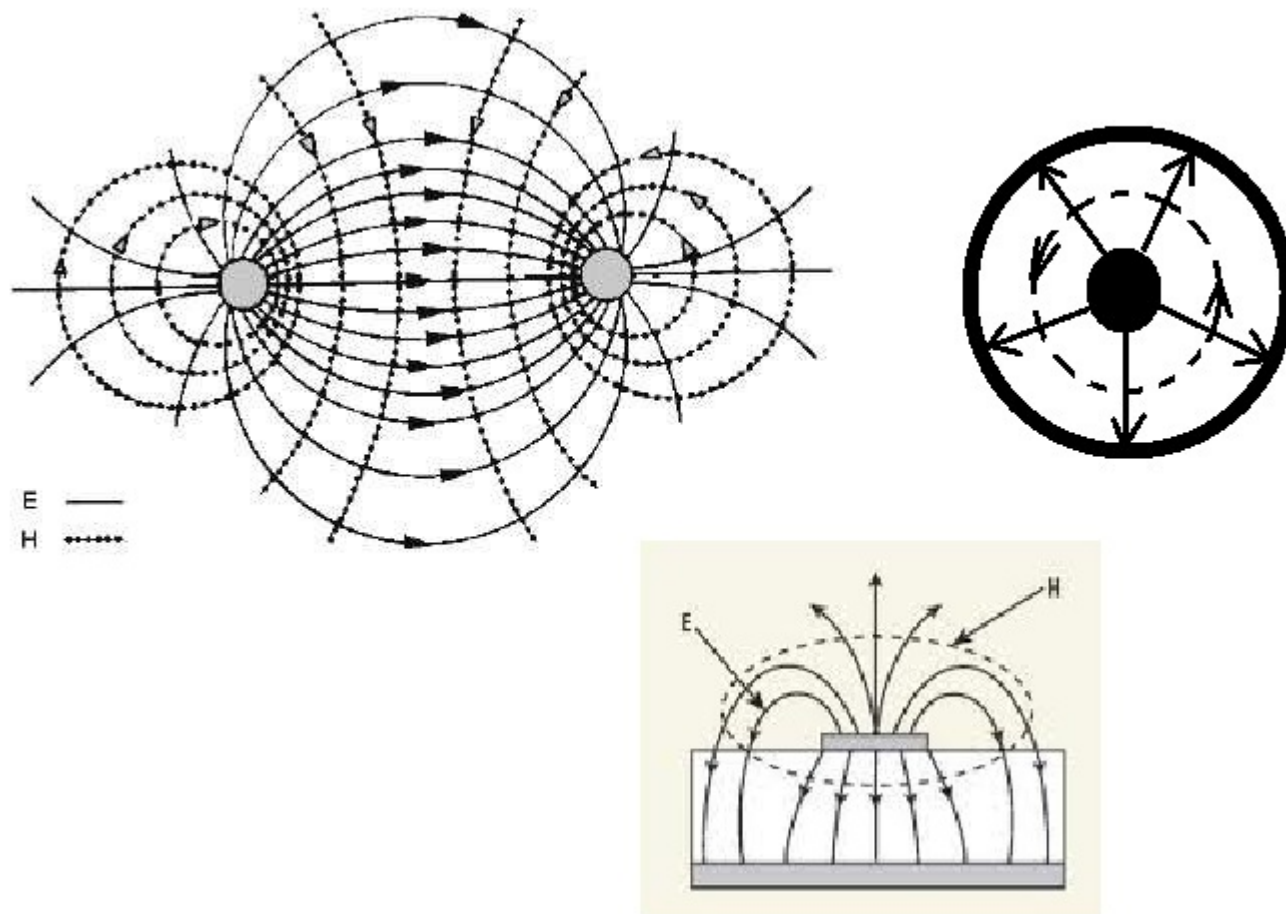


Figure 4: Formas do Campo nas Linhas de Transmissão Típicas.

Guias de Ondas Metálicos

- São muito utilizados na faixa das microondas, pois as dimensões em frequências menores os tornam inviáveis.
- Não possuem modos TEM e apresentam frequência de corte f_c , abaixo da qual não operam. Essa frequência de corte depende essencialmente da geometria e das dimensões do guia, bem como do material dielétrico no interior do guia.
- As geometrias mais utilizadas são a retangular e a circular.
- Em geral são preenchidos de ar (ou vácuo, como primeira aproximação).

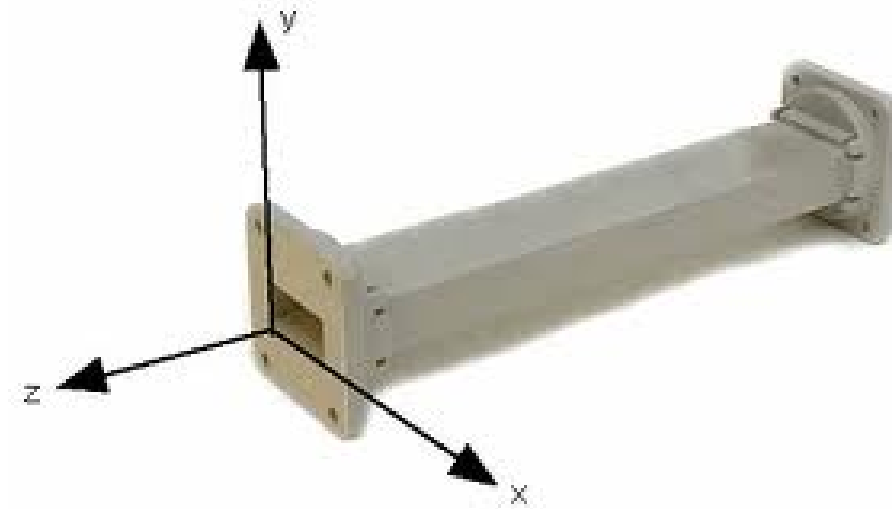


Figure 5: Guias de Onda Metálicos

Guias de Ondas Dielétricos e a Fibra Óptica

São estruturas capazes de confinar e guiar ondas eletromagnéticas através das condições de contorno impostas entre meios de natureza dielétrica. A Fibra Óptica é um caso particular de guia de ondas dielétricos.

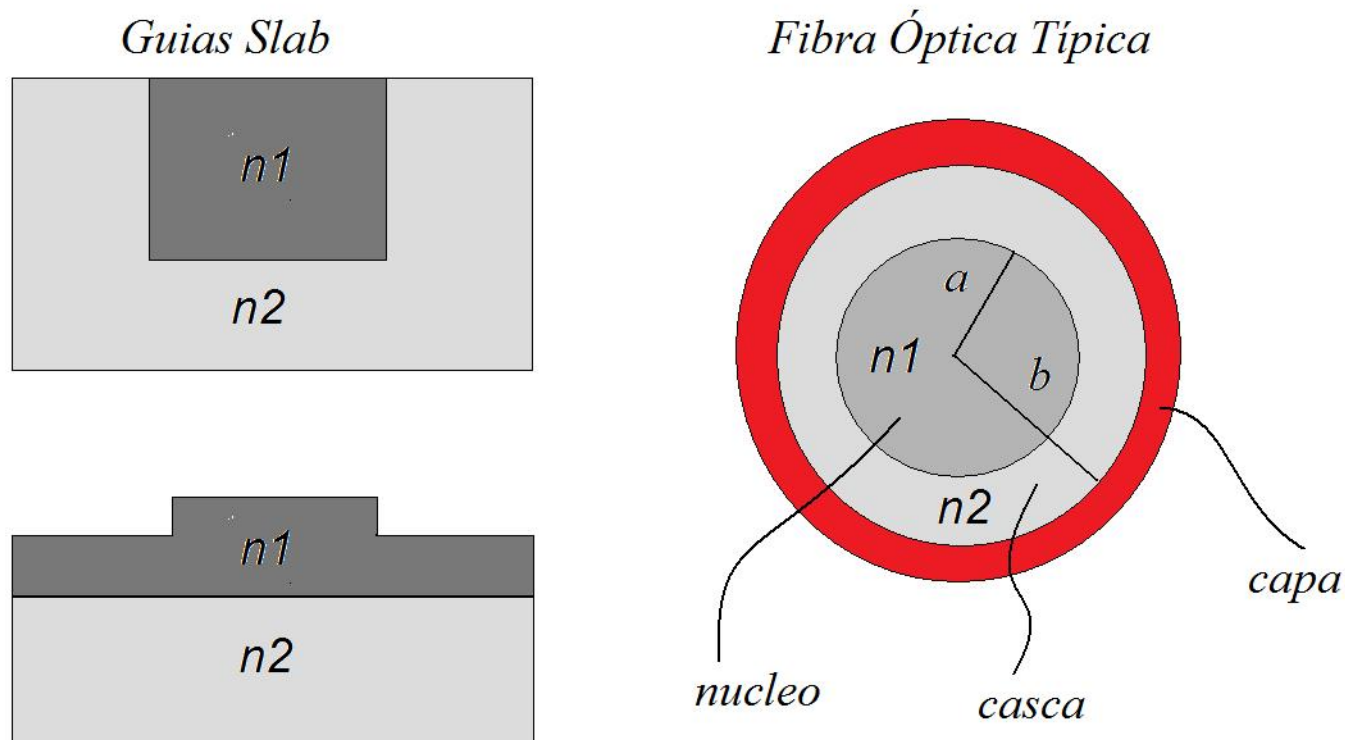


Figure 6: Guias Dielétricos Típicos.

Formas de Abordagem para o estudo de Propagação de Ondas:

↪ Óptica Geométrica: negligencia os efeitos difrativos e as ondas são representadas por raios. Aplica-se bem em algumas situações em que $d \gg \lambda$ e distâncias propagadas relativamente pequenas.

↪ Óptica Física/Teoria da Difração Escalar: onde negligencia-se o caráter vetorial das ondas eletromagnéticas. Muito útil no domínio óptico.

↪ Equações de Maxwell: leva em conta tanto o aspecto ondulatório quanto o caráter vetorial das ondas eletromagnéticas.

↪ No estudo de Ondas Guiadas podemos separar a análise em dois aspectos:

1) **Análise Modal:** preocupa-se apenas com a forma de distribuição e polarização dos campos, aplicação das condições de contorno impostas pelo guia de ondas, no domínio da frequência.

2) **Análise de Dispersão/Atenuação na Propagação de Sinais:** geralmente assume-se que o modo é conhecido, a preocupação é com aspectos dispersivos de sinais compostos por muitas frequências.

A Decomposição Transversal-Longitudinal

↪ Todo o guia de ondas produz o confinamento da densidade de potência da onda eletromagnética a uma certa região do espaço, dando um caminho (eixo) preferencial para a propagação da mesma.

↪ Vamos denotar este eixo por z , (longitudinal). São propriedades essenciais dos guias de onda recíprocos (nos quais a onda propagante e contra-propagante tem as mesmas características):

- Simetria de inversão espacial: as propriedades físicas não se alteram se fizermos a transformação de inversão $z \rightarrow -z$. A onda propagante torna-se contra-propagante e vice-versa.

- Simetria de inversão temporal: as propriedades físicas não se alteram se fizermos a transformação de inversão $t \rightarrow -t$.

- Simetria de translação longitudinal: fazendo uma translação $z' = z + z_0$ onde z_0 é uma constante qualquer a seção transversal do guia e portanto suas propriedades devem permanecer inalteradas \rightarrow invariância da seção transversal do guia em relação a z .

⇒ As simetrias do guia de onda sugerem fazer uma separação das variáveis e dos vetores em componentes longitudinais (ao longo de z) e transversais (perpendiculares ao eixo z).

⇒ Denotaremos as coordenadas transversais por $\mathbf{x}_\perp = (x_1, x_2)$. Existem muitos sistemas ditos cilíndricos, sendo os mais conhecidos o retangular $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$ e o circular $\mathbf{x}_\perp = (\rho, \varphi)$.

↪ Fazendo uso da simetria, qualquer vetor e também o operador ∇ podem ser decompostos na forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_z \hat{\mathbf{a}}_z$$

$$\nabla = \nabla_\perp + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z$$

⇒ Agora vamos aplicar essa decomposição às equações de Maxwell.

↪ Consideremos as equações de Maxwell em meios dielétricos não-magnéticos, na forma abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4)$$

onde \mathbf{E} é o vetor campo elétrico em [V/m] e \mathbf{H} é o vetor campo magnético em [A/m].

⇒ Veja que estamos fazendo $\mathbf{J} = 0$, ou então incluindo os efeitos da lei de Ohm vetorial em ε , considerando a permissividade complexa nesse caso.

Pela decomposição transversal-longitudinal devemos fazer:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E_z \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (5)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + H_z \hat{\mathbf{a}}_z. \quad (6)$$

⇒ São propriedades dos produtos transverso-longitudinais:

- Para o produto escalar:

$$\mathbf{A}_\perp \cdot B_z \hat{\mathbf{a}}_z = 0, \quad (7)$$

$$\mathbf{A}_\perp \cdot \mathbf{B}_\perp = A_x B_x + A_y B_y, \quad (8)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = 1, \quad (9)$$

- Para o produto vetorial:

$$\mathbf{A}_\perp \times B_z \hat{\mathbf{a}}_z = \mathbf{C}_\perp, \quad (10)$$

$$\mathbf{A}_\perp \times \mathbf{B}_\perp = C_z \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (11)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \hat{\mathbf{a}}_z = 0, \quad (12)$$

Exemplo: Consideremos a decomposição da Lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

Fazendo a seguinte substituição:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_\perp + E_z \hat{\mathbf{a}}_z, \\ \mathbf{H} &= \mathbf{H}_\perp + H_z \hat{\mathbf{a}}_z, \\ \nabla &= \nabla_\perp + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z.\end{aligned}$$

na Lei de Faraday tem-se:

$$\left(\nabla_\perp + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_z \right) \times (\mathbf{E}_\perp + E_z \hat{\mathbf{a}}_z) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H}_\perp + H_z \hat{\mathbf{a}}_z).$$

Coletando os termos longitudinais e transversais, obtemos:

$$\begin{aligned}\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp &= -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \hat{\mathbf{a}}_z, \\ \hat{\mathbf{a}}_z \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z} - \nabla_\perp E_z \right) &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_\perp}{\partial t},\end{aligned}$$

⇒ Fazendo o mesmo procedimento para as outras equações de Maxwell, encontramos as seguintes equações, já na sua forma transversal-longitudinal.

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{H}_{\perp} = -\frac{\partial H_z}{\partial z}, \quad (14)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (15)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} - \nabla_{\perp} E_z \right) = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial t}, \quad (16)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (17)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \left(\frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial z} - \nabla_{\perp} H_z \right) = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t}. \quad (18)$$

⇒ Observe que agora temos 6 equações, pois as duas equações em divergência são escalares mas as duas equações de Maxwell em rotacional se descobram nas suas componentes transversais e longitudinais.

↪ Os campos transversos \mathbf{E}_\perp e \mathbf{H}_\perp são responsáveis pelo transporte da energia ao longo do eixo z uma vez que a componente z do vetor de Poynting é dada por:

$$S_z = \mathbf{S}_{med} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = \frac{1}{2} \text{Re} (\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H}_\perp^*) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z , \quad (19)$$

↪ É interessante expressar os operadores transversos nos dois principais sistemas de coordenadas:

Coordenadas cartesianas:

$$\nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{a}}_x + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{a}}_y .$$

$$\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} .$$

Coordenadas cilíndricas circulares:

$$\nabla_\perp = \hat{\mathbf{a}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{a}}_\phi \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} .$$

$$\nabla_\perp^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} .$$

Conceitos Fundamentais sobre Análise Modal

Antes de prosseguirmos com as demonstrações matemáticas, é importante definir alguns conceitos fundamentais:

Modos: os modos são todas as possíveis soluções das equações de Maxwell sujeitas às condições de contorno impostas pelo guia de ondas. Do ponto de vista físico, correspondem às possíveis distribuições do campo eletromagnético e respectiva polarização no interior do guia. Em geral, existem modos contínuos e modos discretos, correspondendo às possíveis soluções.

↪ Qualquer campo eletromagnético no interior de um guia de ondas pode ser expresso como superposição de modos, assim como qualquer sinal periódico pode ser escrito na forma de uma série de Fourier. Nesse sentido os modos eletromagnéticos de um guia de ondas são as funções de base num espaço vetorial abstrato, permitindo expandir qualquer função nessa base de funções:

$$\mathbf{E} = \sum_m A_m \vec{E}_m(\mathbf{x}_\perp) e^{i(\omega t - \beta_m z)}$$

Tipos de Modos

A) Quanto ao caráter vetorial:

Modos TEM (Transversal EletroMagnético)

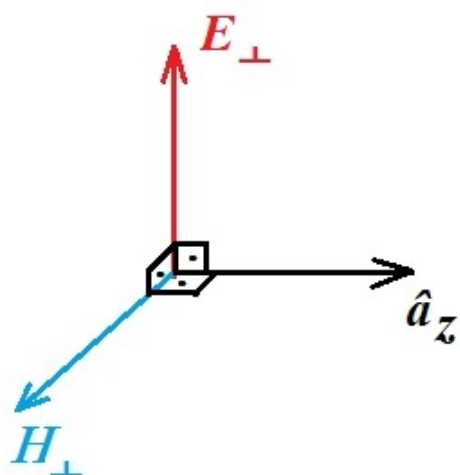
Modos TE (Transversal Elétrico)

Modos TM (Transversal Magnético)

Modos EH e HE ou Híbridos

Modos LP (Linearmente Polarizados)

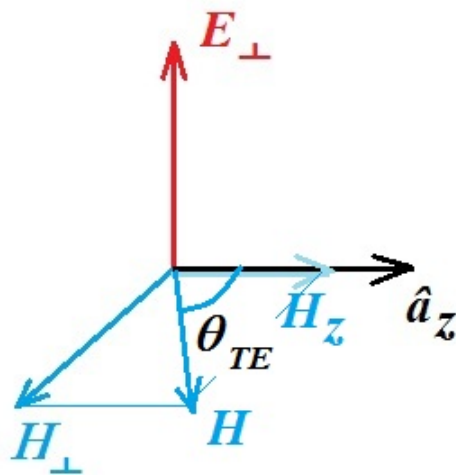
Representação gráfica dos Modos TEM, TE e TM:



a) Modo TEM

$$E_z = 0$$

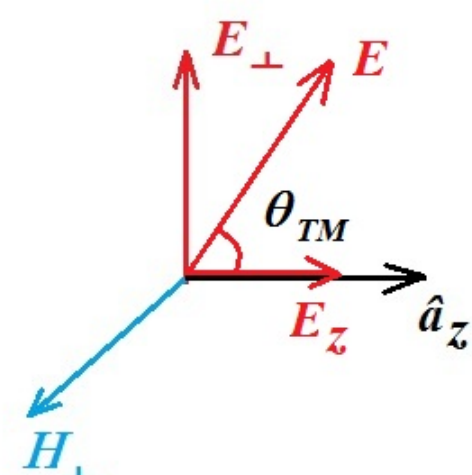
$$H_z = 0$$



b) Modo TE

$$E_z = 0$$

$$H_z \neq 0$$



c) Modo TM

$$E_z \neq 0$$

$$H_z = 0$$

B) Quanto à constante β : (considerando-se meios sem perdas!!)

↪ Considerando apenas as soluções de onda propagantes em guias ideais sem perdas (dielétricos de condutividade nula e condutores ideais $\sigma \rightarrow \infty$):

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + E_z \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_{\perp}) e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (20)$$

sendo β uma função de ω em geral e a mesma forma para $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\perp} + H_z \hat{\mathbf{z}}$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -i\beta, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega.$$

Observe que:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\perp} &= \mathbf{E}_{\perp 0}(\mathbf{x}_{\perp}) e^{i(\omega t - \beta z)}, \\ E_z &= E_{0z}(\mathbf{x}_{\perp}) e^{i(\omega t - \beta z)}. \end{aligned}$$

- **Modo Propagante:** $\beta = \beta^*$, ou seja, β é real, com soluções discretas.
- **Modo Evanesciente:** $\beta = -\beta^*$, ou seja, β é imaginário puro.
- **Modos de Radiação:** Para $\beta = \beta^*$ existe ainda um contínuum de soluções que não são guiadas, mas propagam-se para fora do guia.

Para β complexo existem ainda soluções denominadas **Modos de Vazamento** (LEAKY MODES).

Em uma fibra óptica os MODOS PROPAGANTES são ainda separados em MODOS DO NÚCLEO e MODOS DE CASCA.

- Guias metálicos ideais admitem apenas modos propagantes e evanescentes.

Podemos fazer para os modos com β real em guias dielétricos o seguinte diagrama:

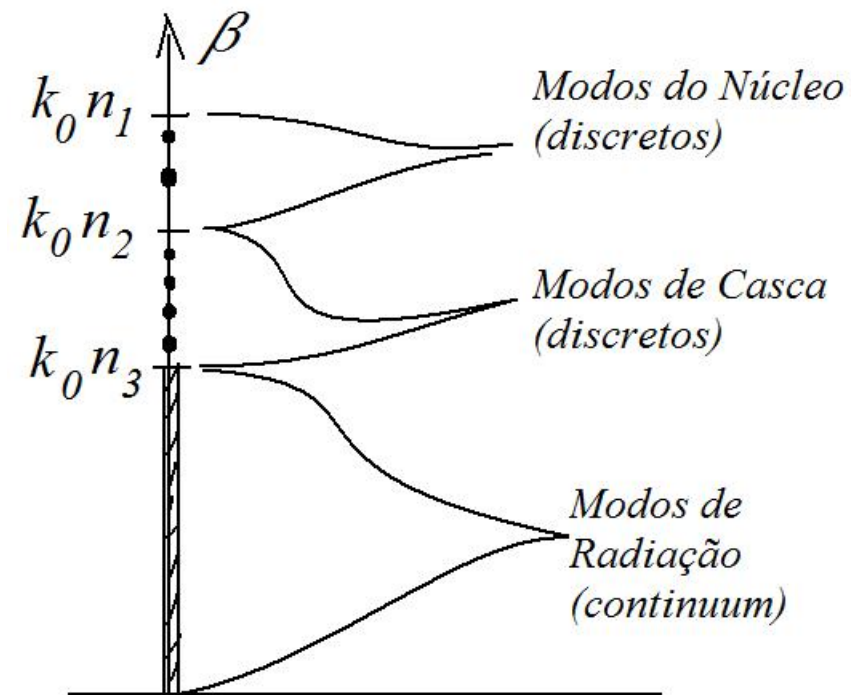


Figure 7: Diagrama de Modos Propagantes: Constante β real.

Def.: **Frequência de Corte** $\omega_c = 2\pi f_c$: é a frequência mínima para a qual um modo passa a ser propagante, ou é aquela na qual $\beta = 0$ e acima da qual ocorre propagação.

\Rightarrow É convencional agrupar as frequências de corte para os modos ditos propagantes em uma sequência crescente:

$$f_0 < f_1 < f_2 < f_3 < \dots$$

\rightsquigarrow **Modo Fundamental ou Modo Dominante** é aquele que possui a **menor frequência de corte dentre todos**. Nesse caso f_0 .

\rightsquigarrow Modos Superiores são os outros modos capazes de se propagar.

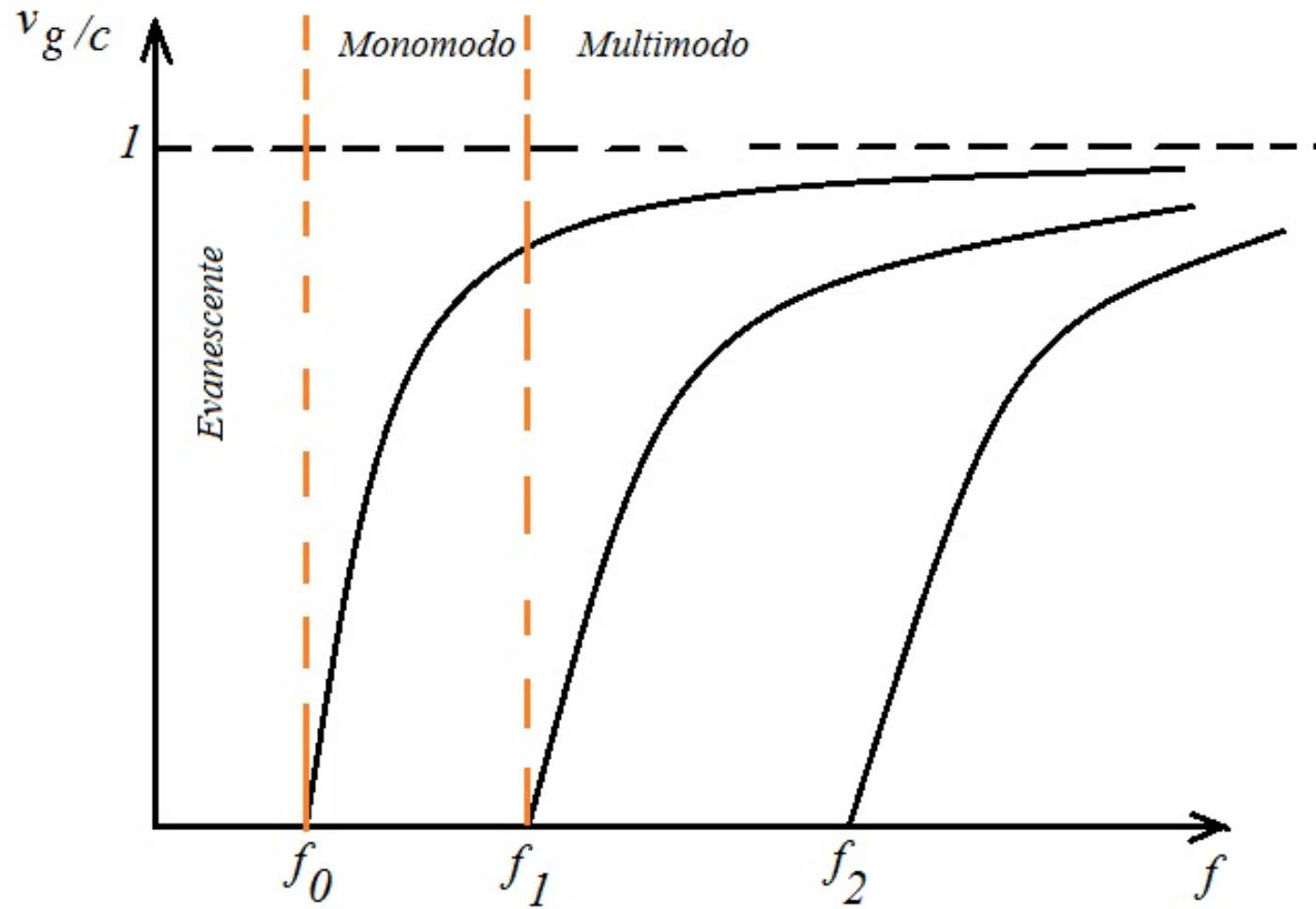
• **Propagação Monomodal**: somente o modo fundamental se propaga na frequência de operação f , ou seja, ocorre na condição

$$f_0 < f < f_1 .$$

• **Propagação Multimodal**: além do modo fundamental pelo menos mais um modo é capaz de propagar-se na frequência de operação f , ou seja,

$$f > f_1 .$$

Diagrama Modal Típico

Figure 8: Velocidade de grupo $v_g = c\beta/\omega = \beta/k$.

Análise dos Modos TEM na Linha de Transmissão

- Para modos TEM não pode haver componentes longitudinais, e portanto:

$$E_z = 0 \quad , \quad H_z = 0 . \quad (21)$$

⇒ Nesse caso o conjunto das equações de Maxwell reduz-se a:

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = 0 , \quad (22)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{H}_{\perp} = 0 , \quad (23)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} = 0 , \quad (24)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} = 0 , \quad (25)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial t} , \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \frac{\partial \mathbf{H}_{\perp}}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t} . \quad (27)$$

Multiplicando a equação (26) vetorialmente na forma:

$$\hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z} \times \left(\hat{\mathbf{a}}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z} \right) = \hat{\mathbf{a}}_z \frac{\partial}{\partial z} \times \left(-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_\perp}{\partial t} \right) ,$$

utilizando (27) e fazendo algumas manipulações algébricas temos a equação de ondas:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}_\perp = 0 . \quad (28)$$

⇒ A solução dessa equação prova que as ondas de modos TEM propagam-se com velocidade v dada por

$$\mu_0 \epsilon = \frac{1}{v^2} . \quad (29)$$

- Para um modo TEM de linha de transmissão o campo propaga-se na direção z , mas pode depender das variáveis (x, y) , desde que satisfaça as demais equações de Maxwell.

- Vamos utilizar um método de separação de variáveis para resolver esse sistema:

$$\mathbf{E}_{\perp}(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{E}}(x, y)V(z, t) , \quad (30)$$

$$\mathbf{H}_{\perp}(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{H}}(x, y)I(z, t) , \quad (31)$$

⇒ Queremos associar $V(z, t)$ e $I(z, t)$ a ondas de tensão e corrente na linha, conforme veremos.

⇒ Substituindo (30) e (30) em (24) e (25) obtemos:

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} = 0 \Rightarrow \nabla_{\perp} \times \vec{\mathcal{E}}(x, y) = 0 ,$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} = 0 \Rightarrow \nabla_{\perp} \times \vec{\mathcal{H}}(x, y) = 0 ,$$

uma vez que $V(z, t) \neq 0$ e $I(z, t) \neq 0$ e o operador ∇_{\perp} somente atua nas coordenadas transversais, e não em (z, t) .

- Agora podemos utilizar uma versão bidimensional da propriedade $\nabla \times \nabla \phi$, na forma:

$$\nabla_{\perp} \times \nabla_{\perp} \phi(x, y) = 0 .$$

⇒ Desse modo fazemos:

$$\vec{E}(x, y) = -\nabla_{\perp} \phi_e(x, y) , \quad (32)$$

$$\vec{H}(x, y) = -\nabla_{\perp} \phi_m(x, y) , \quad (33)$$

onde $\phi_e(x, y)$ e $\phi_m(x, y)$ são os potenciais escalares elétrico e magnético, respectivamente. Só dependem das variáveis transversas e dizem como os campos se distribuem no plano transversal.

• Utilizando as definições acima e substituindo nas equações em divergência, obtém-se:

$$\nabla_{\perp}^2 \phi_e = 0 , \quad (34)$$

$$\nabla_{\perp}^2 \phi_m = 0 , \quad (35)$$

⇒ A solução da dependência transversa dos **modos TEM de uma linha de transmissão equivale a resolver a equação de Laplace em duas dimensões**, com condições de contorno impostas pelos condutores!!

⇒ Agora lembremos do vetor de Poynting (estamos aqui considerando o valor instantâneo e não a média):

$$S_z = \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = (\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H}_\perp) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z = (\vec{\mathcal{E}}_\perp \times \vec{\mathcal{H}}_\perp) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z [V(z,t)I(z,t)] ,$$

⇒ A potência total transportada P_z pelo guia pode ser obtida integrando-se S_z sobre a superfície transversa, cujo diferencial vale $da = dx dy$:

$$P_z = \int_a S_z da = [V(z,t)I(z,t)] \int_a (\vec{\mathcal{E}}_\perp \times \vec{\mathcal{H}}_\perp) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z da .$$

⇒ Note que o produto VI pode ser sacado para fora do símbolo de integração uma vez que só dependem de (z,t) e a integral é sobre as outras duas dimensões.

⇒ Se queremos interpretar V e I como tensão e corrente tal que $P_z = VI$, surge uma **condição de normalização**:

$$P_z(z,t) = V(z,t)I(z,t) \quad , \quad \int_a (\vec{\mathcal{E}}_\perp \times \vec{\mathcal{H}}_\perp) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z da = 1 . \quad (36)$$

Equações de Linhas de Transmissão

⇒ Conhecidas como equações do telegrafista, pois os fenômenos ondulatórios em transmissões de telégrafo já eram conhecidas mesmo antes da teoria eletromagnética de Maxwell.

⇒ São equações diferenciais parciais que relacionam as ondas V e I , ao invés de trabalhar com os campos.

• Vamos aqui obtê-las primeiramente a partir das equações de Maxwell. Considere as equações a seguir:

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_\perp}{\partial t}, \quad (26)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \frac{\partial \mathbf{H}_\perp}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}_\perp}{\partial t}, \quad (27)$$

$$\mathbf{E}_\perp(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{E}}(x, y) V(z, t), \quad (30)$$

$$\mathbf{H}_\perp(x, y, z, t) = \vec{\mathcal{H}}(x, y) I(z, t), \quad (31)$$

⇒ Substituindo (30) e (31) em (26) e ((26)) obtemos:

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \vec{\mathcal{E}}(x, y) \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \vec{\mathcal{H}}(x, y) , \quad (37)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times \vec{\mathcal{H}}(x, y) \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}(x, y) , \quad (38)$$

⇒ Para eliminar o caráter vetorial dessas duas equações devemos fazer o produto escalar da primeira com $\vec{\mathcal{H}}(x, y)$ e da segunda com $\vec{\mathcal{E}}(x, y)$, e depois integrar sobre a superfície transversal a do guia:

$$\int_a (\hat{\mathbf{a}}_z \times \vec{\mathcal{E}}(x, y)) \cdot \vec{\mathcal{H}}(x, y) da \frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -\mu_0 \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \int_a \vec{\mathcal{H}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{H}}(x, y) da ,$$

$$\int_a (\hat{\mathbf{a}}_z \times \vec{\mathcal{H}}(x, y)) \cdot \vec{\mathcal{E}}(x, y) da \frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial V(z, t)}{\partial t} \int_a \vec{\mathcal{E}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{E}}(x, y) da ,$$

⇒ Podemos utilizar a condição de normalização dos campos (36) e definir alguns parâmetros característicos da linha.

- **Capacitância por unidade de comprimento** C (medida em F/m):

$$C = \varepsilon \frac{\int_a \vec{\mathcal{E}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{E}}(x, y) da}{\int_a (\vec{\mathcal{E}}_{\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z da} = \varepsilon \int_a \vec{\mathcal{E}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{E}}(x, y) da \quad (39)$$

- **Indutância por unidade de comprimento** L (medida em H/m):

$$L = \mu_0 \frac{\int_a \vec{\mathcal{H}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{H}}(x, y) da}{\int_a (\vec{\mathcal{E}}_{\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z da} = \mu_0 \int_a \vec{\mathcal{H}}(x, y) \cdot \vec{\mathcal{H}}(x, y) da \quad (40)$$

- As quantidades L e C somente dependem do comportamento dos campos com as variáveis transversais e portanto da geometria da linha de transmissão.

⇒ Tendo as definições de L e C em conta, podemos escrever as equações de linhas de transmissão sem perdas:

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I(z,t)}{\partial t}, \quad (41)$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -C \frac{\partial V(z,t)}{\partial t}, \quad (42)$$

que podem ser prontamente resolvidas.

- Muitos livros-texto obtém as equações acima (já incluindo perdas) através de um modelo da linha de transmissão que é denominada **modelo de parâmetros distribuídos** onde requer-se o conhecimento apenas de Circuitos Elétricos.

- Todavia, é gratificante notar que as equações de Maxwell reproduzem todos esses resultados conhecidos empiricamente.

Dedução Alternativa: Modelo de Parâmetros Distribuídos

Para modelar a linha de transmissão considera-se um trecho de linha $\Delta z \ll \lambda$ no qual as leis de circuitos são válidas ainda:

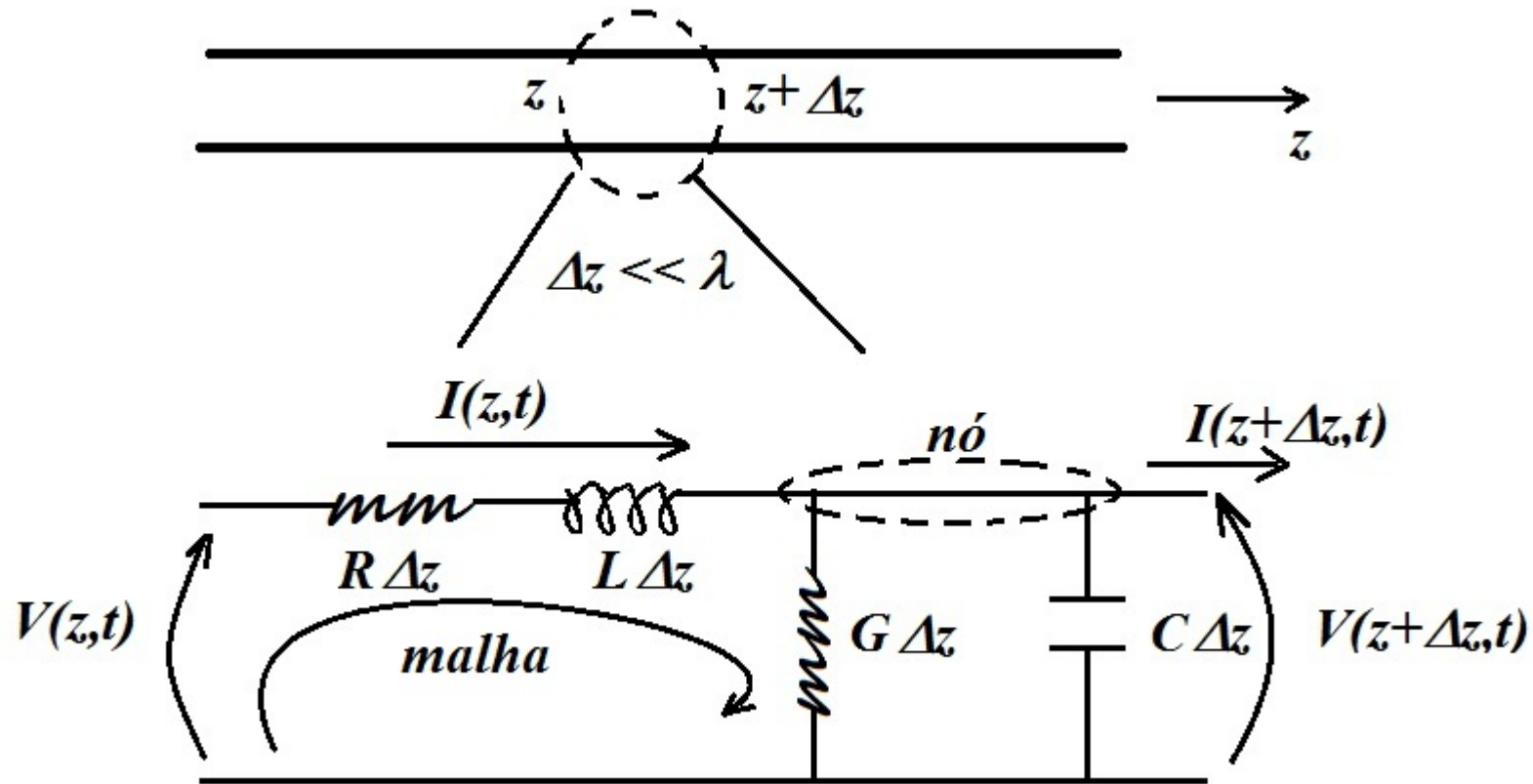


Figure 9: Modelo de Parâmetros Distribuídos da Linha de Transmissão.

Sejam os parâmetros:

- R - resistência série por unidade de comprimento [ohms/m] - representa perdas nos condutores ($\sigma < \infty$).
 - G - condutância paralela por unidade de comprimento [siemens/m] - representa perdas no dielétrico ($\sigma > 0$).
 - L - indutância por unidade de comprimento [F/m].
 - C - capacitância por unidade de comprimento [H/m]
- Podemos aplicar a lei das malhas e nós no circuito mostrado na figura:

$$V(z, t) - R\Delta z I(z, t) - L\Delta z \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} - V(z + \Delta z, t) = 0, \quad (43)$$

$$I(z, t) - G\Delta z V(z + \Delta z, t) - C\Delta z \frac{\partial V(z + \Delta z, t)}{\partial t} - I(z + \Delta z, t) = 0, \quad (44)$$

⇒ Reagrupando os fatores, dividindo tudo pelo comprimento $\Delta z \ll \lambda$ e tomando o limite $\Delta z \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{V(z + \Delta z, t) - V(z, t)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[-RI(z, t) - L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t} \right],$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{I(z + \Delta z, t) - I(z, t)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left[-GV(z + \Delta z, t) - C \frac{\partial V(z + \Delta z, t)}{\partial t} \right],$$

⇒ Uma vez que do lado esquerdo temos a própria definição de derivada, temos com resultado final:

$$\frac{\partial V(z, t)}{\partial z} = -RI(z, t) - L \frac{\partial I(z, t)}{\partial t}, \quad (45)$$

$$\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = -GV(z, t) - C \frac{\partial V(z, t)}{\partial t}, \quad (46)$$

⇒ Para linhas de transmissão sem perdas $R = 0$ e $G = 0$ e o sistema acima reduz-se ao que encontramos anteriormente.

Solução das Equações de Linha de Transmissão sem perdas

⇒ Considere as equações anteriores com $R = 0$ e $G = 0$:

$$\frac{\partial V(z,t)}{\partial z} = -L \frac{\partial I(z,t)}{\partial t}, \quad (47)$$

$$\frac{\partial I(z,t)}{\partial z} = -C \frac{\partial V(z,t)}{\partial t}, \quad (48)$$

⇒ Pode-se demonstrar facilmente a equação de ondas para $V(z,t)$ (basta tomar a derivada $\partial/\partial z$ na primeira equação e utilizar a segunda):

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - LC \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) V(z,t) = 0. \quad (49)$$

⇒ Por questão de consistência com a equação (28) temos a relação:

$$\mu_0 \epsilon = LC = \frac{1}{v^2}. \quad (50)$$

⇒ A solução das equações em regime harmônico toma a forma a seguir:

$$V(z,t) = \left[V^+ e^{-i\beta z} + V^- e^{i\beta z} \right] e^{i\omega t} \quad (51)$$

$$I(z,t) = \frac{1}{Z_0} \left[V^+ e^{-i\beta z} - V^- e^{i\beta z} \right] e^{i\omega t} \quad (52)$$

onde V^+ é a amplitude da onda propagante (do gerador para a carga) na linha e V^- a amplitude da onda refletida pela carga (propaga-se de volta ao gerador). Para linhas sem perdas temos:

$$\beta = \omega \sqrt{LC} = \frac{\omega}{v} \quad \text{e} \quad Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (53)$$

onde β [rad/m] é a constante de propagação na linha e Z_0 a impedância característica da linha (não confundir com impedância do vácuo).

- A constante β se relaciona ao comprimento de ondas λ por:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} . \quad (54)$$

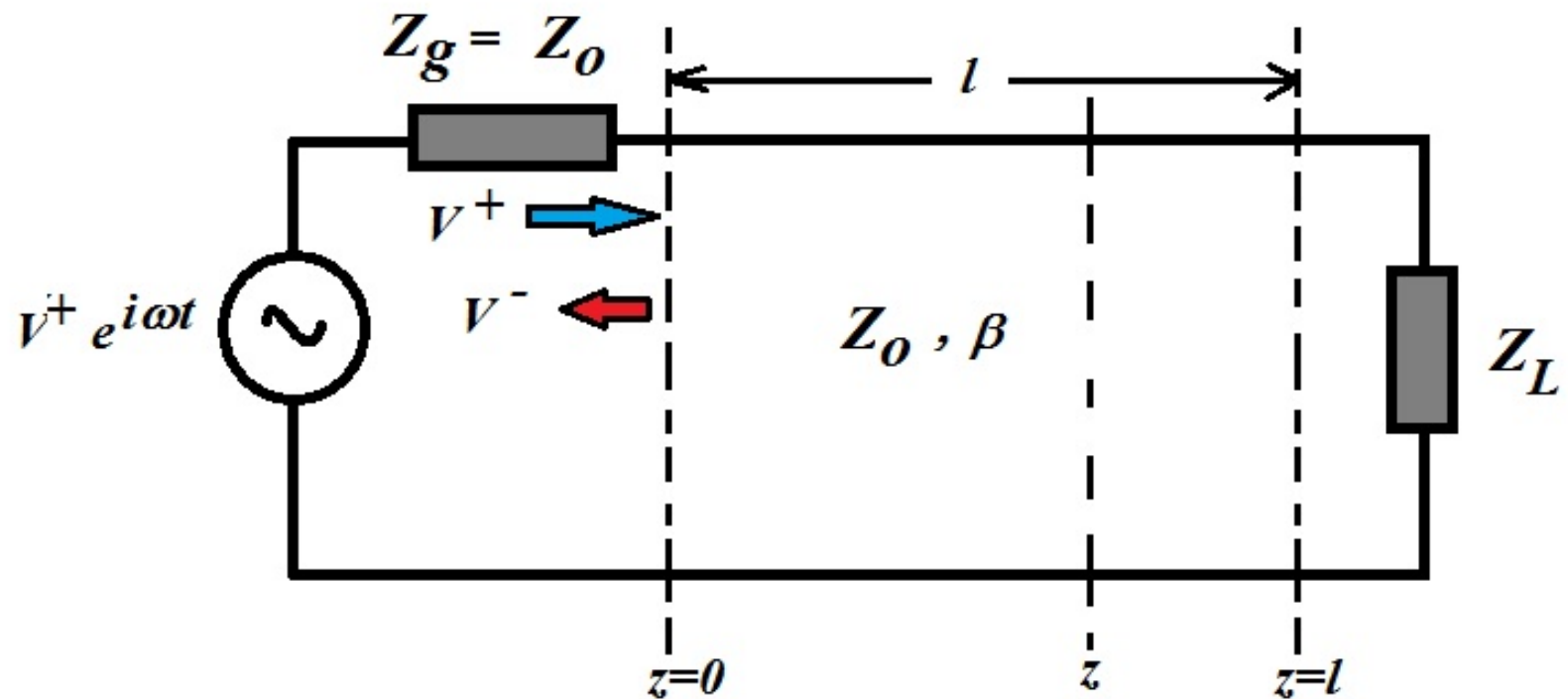


Figure 10: Linha de Transmissão Carregada com Carga Z_L . São parâmetros da linha o comprimento l , a impedância característica Z_0 e o valor de β na frequência de operação.

Coeficiente de Reflexão Γ

\Rightarrow Em microondas é a medida mais usual, sendo a razão entre a amplitude da onda refletida e da onda propagante em um ponto da linha, definida como:

$$\Gamma(z) = \frac{V^- e^{i\beta z}}{V^+ e^{-i\beta z}} = \Gamma_0 e^{2i\beta z} \quad (55)$$

onde

$$\Gamma_0 = \Gamma(z = 0) = \frac{V^-}{V^+}$$

\Rightarrow Para linhas sem perdas o módulo do coeficiente de reflexão permanece constante ao longo da linha ao passo que a sua fase varia.

\Rightarrow Podemos escrever V e I em termos de Γ , conforme segue:

$$V(z) = V^+ e^{i(\omega t - \beta z)} [1 + \Gamma(z)] \quad (56)$$

$$I(z) = \frac{1}{Z_0} V^+ e^{i(\omega t - \beta z)} [1 - \Gamma(z)] \quad (57)$$

Impedância de Entrada

⇒ É a impedância medida em algum ponto da linha e define-se como:

$$Z_{in}(z, t) = \frac{V(z, t)}{I(z, t)} .$$

Utilizando as equações (56) e (57) obtemos facilmente:

$$Z_{in}(z) = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \quad (58)$$

- Pode-se facilmente inverter a equação acima para obter:

$$\Gamma(z) = \frac{Z_{in}(z) - Z_0}{Z_{in}(z) + Z_0} \quad (59)$$

⇒ O valor de Γ_0 é dependente do valor de carga Z_L conectada em $z = l$:

$$\Gamma(l) = \Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \quad (60)$$

onde Z_0 é a impedância característica da linha.

Agora temos:

$$\Gamma_L = \Gamma_0 e^{2i\beta l} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

de onde tiramos:

$$\Gamma_0 = \Gamma_L e^{-2i\beta l} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} e^{-2i\beta l} \quad (61)$$

onde l é o comprimento da linha.

Agora podemos expressar Z_{in} em termos de Z_L e Z_0 utilizando as equações anteriores:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan[\beta(l-z)]}{Z_0 + iZ_L \tan[\beta(l-z)]} \quad (62)$$

\Rightarrow Para $z = 0$ temos:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{Z_L + iZ_0 \tan[\beta l]}{Z_0 + iZ_L \tan[\beta l]} \quad (63)$$

Relação de Onda Estacionária SWR

É uma medida de refletividade em um ponto da linha e define-se em um ponto qualquer como:

$$\text{SWR} = \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|} = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} . \quad (64)$$

Este parâmetro é facilmente mensurável por sondagem ao longo da linha.

Casos Especiais

⇒ *Linha de $l = m\lambda/2$ com $m = 1, 2, 3, \dots$ (ou Repetidor de Impedância):*

Para este caso $\tan(\beta l) = 0$ e portanto

$$Z_{in} = Z_L$$

⇒ *Linha de $l = m\lambda/4$ com $m = 1, 3, 5, \dots$ (ou Transformador de Impedância)*

Nesse caso temos $\tan(\beta l) = \tan(\pi/2) = \infty$ e por isso:

$$Z_{in} = \frac{Z_0^2}{Z_L} \quad (65)$$

⇒ O transformador de impedância é muito utilizado em casamento de impedâncias, e pode converter reatância capacitiva em indutiva e vice-versa, ou curto circuito em circuito aberto e vice-versa.

⇒ *Linhas Curto Circuito* $Z_L = 0$

Para este caso temos:

$$Z = iZ_0 \tan(\beta l)$$

⇒ *Linhas Abertas* $Z_L = \infty$

Para este caso temos:

$$Z = -iZ_0 \cot(\beta l)$$

Com linhas em curto ou aberto, variando l podemos obter qualquer reatância ou susceptância que desejarmos.

Carta de Smith

⇒ É uma ferramenta de cálculos gráfica bastante prática para uso em microondas inventada pelo Engenheiro Phillip H. Smith (1905-1987).

Primeiramente normalizamos a impedância medida em um ponto Z pela impedância característica da linha Z_0 :

$$\frac{Z_L}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma}$$

Agora expressando os números complexos na forma cartesiana $\frac{Z}{Z_0} = r + ix$ e $\Gamma = u + iv$ temos

$$r + ix = \frac{1 + u + iv}{1 - u - iv}$$

Igualando as partes real e imaginária temos:

$$r = \frac{1 - u^2 - v^2}{1 - u^2 + v^2} \quad (66)$$

$$x = \frac{2v}{1 - u^2 + v^2} \quad (67)$$

Resolve-se esta equação no plano $u - v$, dados os valores de r e x , temos:

⇒ Circunferências de resistência r constante:

$$\left(u - \frac{r}{1+r}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{1}{1+r}\right)^2. \quad (68)$$

Dado r as circunferências de resistência constante tem centro em

$$(u_0, v_0) = \left(\frac{r}{1+r}, 0\right)$$

e raio $1/(1+r)$.

⇒ Circunferências de reatância x constante:

$$(u - 1)^2 + \left(v - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}. \quad (69)$$

Dado x as circunferências de reatância constante tem centro em

$$(u_0, v_0) = \left(1, \frac{1}{x}\right)$$

e raio $1/|x|$.

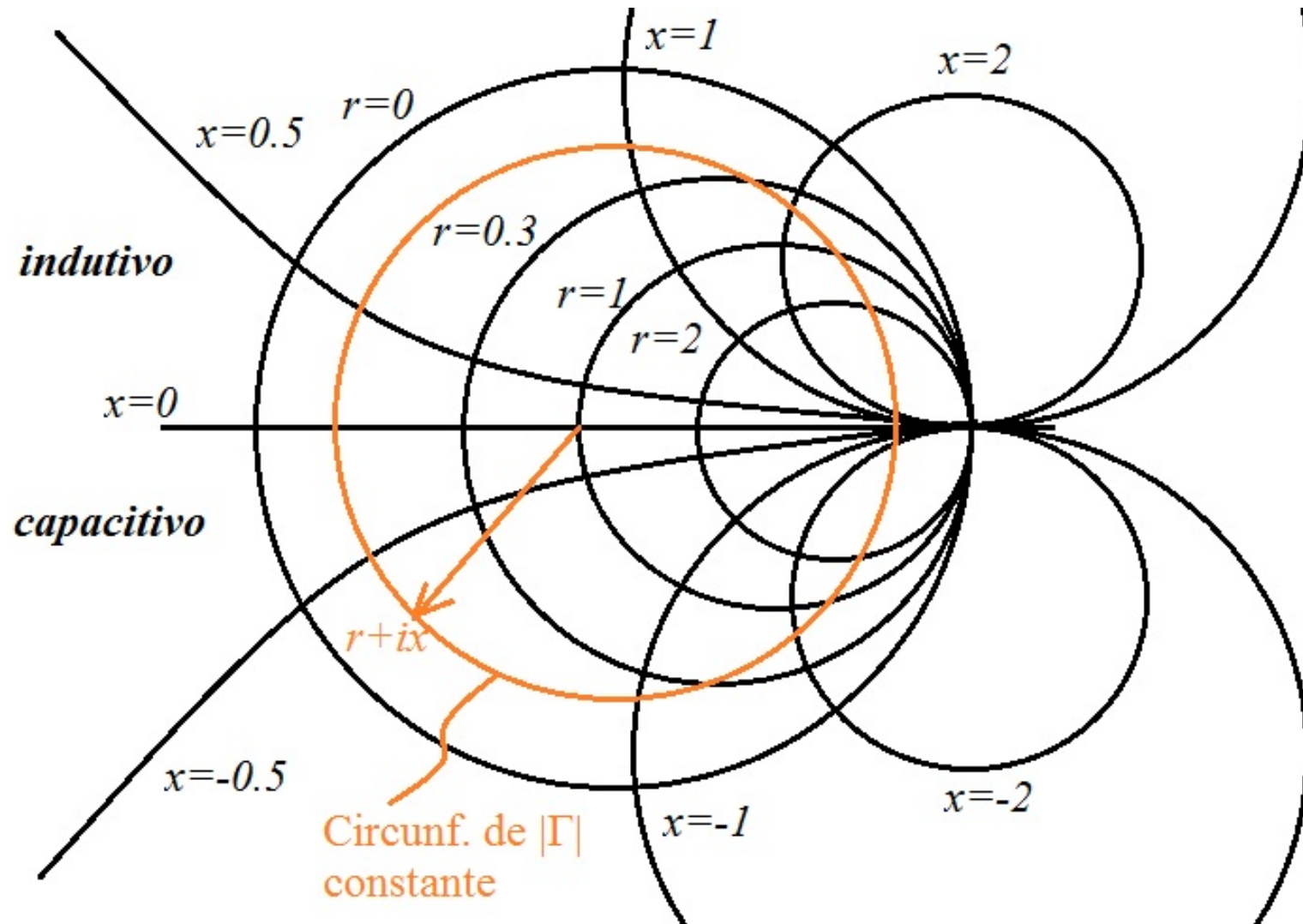


Figure 11: Carta de Smith.

2 Guias de Onda Metálicos

⇒ Estamos aqui interessados na análise de modos TE ($E_z = 0, H_z \neq 0$) e TM ($E_z \neq 0, H_z = 0$), já que nos guias metálicos não é possível a existência de modos TEM.

⇒ O procedimento a ser mostrado aqui funciona desde que uma componente longitudinal ou ambas sejam diferentes de zero.

→ Consideremos as equações de Maxwell na decomposição transversal-longitudinal para ondas propagantes com dependência do tipo $e^{i(\omega t - \beta z)}$, onde podemos substituir:

$$\mathbf{E}(x, y, z, t) = [\mathbf{E}_\perp(x, y) + E_z(x, y)\hat{\mathbf{a}}_z]e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (70)$$

$$\mathbf{H}(x, y, z, t) = [\mathbf{H}_\perp(x, y) + H_z(x, y)\hat{\mathbf{a}}_z]e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (71)$$

$$(72)$$

sendo β uma função de ω e para as derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -i\beta, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\omega.$$

⇒ Nesse caso temos:

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp} = i\beta E_z, \quad (73)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{H}_{\perp} = i\beta H_z, \quad (74)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp} = -i\omega\mu_0 H_z \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (75)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} = i\omega\varepsilon E_z \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (76)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times (i\beta \mathbf{E}_{\perp} + \nabla_{\perp} E_z) = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_{\perp}, \quad (77)$$

$$\hat{\mathbf{a}}_z \times (i\beta \mathbf{H}_{\perp} + \nabla_{\perp} H_z) = -i\omega\varepsilon \mathbf{E}_{\perp}. \quad (78)$$

⇒ Uma vez que todas as componentes devem satisfazer a equação de ondas, sujeitas às condições de contorno do problema, é fácil mostrar que

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2) E_z = 0, \quad (79)$$

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2) H_z = 0, \quad (80)$$

onde ∇_{\perp}^2 é o laplaciano transversal e a constante transversal k_{\perp} satisfaz uma relação de dispersão da forma:

$$k_{\perp}^2 = k^2 - \beta^2, \text{ onde } k^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon. \quad (81)$$

⇒ Pode-se então expressar os campos transversos em função das componentes longitudinais E_z e H_z , o que poupa muito trabalho:

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{-i\beta}{k^2 - \beta^2} \left[\nabla_\perp E_z + \frac{\omega\mu_0}{\beta} \nabla_\perp H_z \times \hat{\mathbf{a}}_z \right], \quad (82)$$

$$\mathbf{H}_\perp = \frac{-i\beta}{k^2 - \beta^2} \left[\nabla_\perp H_z - \frac{\omega\varepsilon}{\beta} \nabla_\perp E_z \times \hat{\mathbf{a}}_z \right], \quad (83)$$

→ Para guias de ondas metálicos, considerando superfícies condutoras ideais $\sigma \rightarrow \infty$, a condição de contorno que deve ser satisfeita é a seguinte:

As componentes de campo elétrico \mathbf{E} tangenciais às paredes condutoras deve se anular nas superfícies condutoras. Alternativamente as componentes do campo magnético \mathbf{H} perpendiculares às superfícies condutoras devem se anular nessas superfícies.

Guia Metálico Retangular

Um guia metálico retangular é mostrado abaixo:

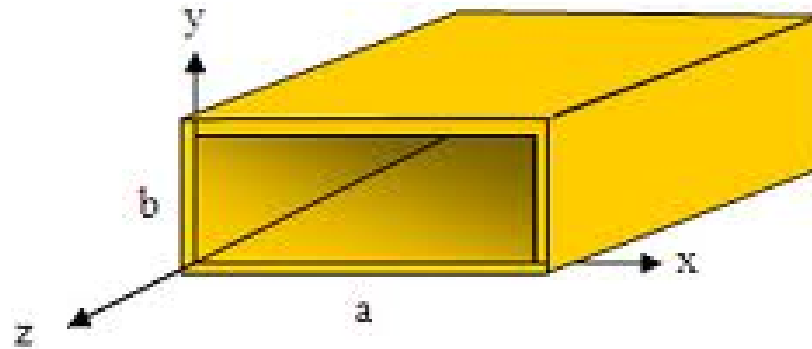


Figure 12: Guia Retangular Metálico de dimensões a e b .

As paredes do guia são condutores perfeitos ($\sigma \rightarrow \infty$) e estão definidas por:

$$y = 0 \quad 0 \leq x \leq a$$

$$y = b \quad 0 \leq x \leq a$$

$$x = 0 \quad 0 \leq y \leq b$$

$$x = a \quad 0 \leq y \leq b$$

A solução dos modos TE (TM) passa pela equação diferencial abaixo, em coordenadas retangulares:

$$(\nabla_{\perp}^2 + k_{\perp}^2) \Psi = 0$$

sujeita às condições de contorno específicas para o modo TE(TM) onde $\Psi = H_z(E_z)$.

⇒ A solução geral é da forma:

$$\Psi = f(x)g(y)e^{i(\omega t - k_z z)} \quad (84)$$

onde

$$f(x) = A \cos(k_x x) + B \sin(k_x x) \quad (85)$$

$$g(y) = A \cos(k_y y) + B \sin(k_y y) \quad (86)$$

e ainda:

$$k_{\perp}^2 = k^2 - k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 .$$

Modos TE: $\Psi = H_z$ e $E_z = 0$.

Substituindo a condição acima nas equações (82) e (82):

$$\mathbf{E}_{\perp} = \frac{-i\omega\mu_0}{k^2 - \beta^2} \nabla_{\perp} H_z \times \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (87)$$

$$\mathbf{H}_{\perp} = \frac{-i\beta}{k^2 - \beta^2} \nabla_{\perp} H_z. \quad (88)$$

O campo magnético perpendicular ao condutor deve se anular nas superfícies $(\nabla_{\perp} H_z)|_S = 0$:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad e \quad \left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=b} = 0$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad e \quad \left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = 0$$

Fazendo cumprir as condições de contorno acima obtém-se para os modos TE:

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$k_y = \frac{n\pi}{a} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

lembrando que se $m = n = 0$ a solução é trivial para os campos transversos e portanto apenas um dos dois pode ser zero, o outro sendo diferente de zero.

A solução nesse caso é:

$$\Psi_{TE} = H_z = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i(\omega t - \beta_{mn}z)}. \quad (89)$$

A relação de dispersão nesse caso vale:

$$\beta_{mn}^2 = k^2 - k_{\perp}^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2 = \omega^2 \mu \epsilon - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} \right)$$

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (90)$$

⇒ Observando a expressão para β_{mn} vemos que existe uma frequência mínima, abaixo da qual a onda é evanescente pois β_{mn} torna-se imaginário e a propagação tem a característica $e^{-|\beta_{mn}|z}$.

Por isso o ponto crítico é $\beta_{mn} = 0$ e nesse ponto temos a frequência de corte do modo $TE_{m,n}$:

$$\omega_{mn}^c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (91)$$

Se consideramos $a > b$ a menor frequência de corte será com $m = 1$ e $n = 0$, e é a menor frequência possível mesmo considerando os modos TM, como veremos:

$$\omega_{10}^c = \frac{\pi}{a\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (92)$$

Para $a = 0.05$ m, a frequência de corte é $f = 3$ GHz.

Modos TM: $\Psi = E_z$ e $H_z = 0$

Nesse caso temos:

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{-i\beta}{k^2 - \beta^2} \nabla_\perp E_z, \quad (93)$$

$$\mathbf{H}_\perp = \frac{i\omega\epsilon}{k^2 - \beta^2} \nabla_\perp E_z \times \hat{\mathbf{a}}_z, \quad (94)$$

onde E_z é tangencial a todas as paredes condutoras e portanto:

$$E_z \Big|_{y=0} = 0 \quad e \quad E_z \Big|_{x=0} = 0$$

$$E_z \Big|_{y=b} = 0 \quad e \quad E_z \Big|_{x=a} = 0$$

A solução final dos modos TM é:

$$\Psi_{TM} = E_z = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) e^{i(\omega t - \beta_{mn}z)} \quad (95)$$

sendo $m = 1, 2, 3, \dots$ e $n = 1, 2, 3, \dots$

⇒ Note que nem m , nem n podem ser nulos, senão temos a solução trivial.

Portanto o modo TM de ordem mais baixa é com $m = 1$ e $n = 1$.

A relação de dispersão é a mesma dos modos TE, ou seja:

$$\beta^{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (96)$$

$$\omega_{mn}^c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \quad (97)$$

Entretanto, a frequência mais baixa permitida no modo TM é:

$$\omega_{10}^c = \frac{\pi}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad (98)$$

e este valor é certamente maior do que a primeira frequência de corte dos modos TE. Para $a = b = 0.05\text{m}$ temos $f = 4.23\text{ GHz}$ no modo TM_{11} .

A figura a seguir mostra as curvas modais para um guia retangular de dimensões $a = 5$ cm, $b = 2.5$ cm. O gráfico é normalizado, ou seja, ω versus $v_g = ck_z/\omega$.

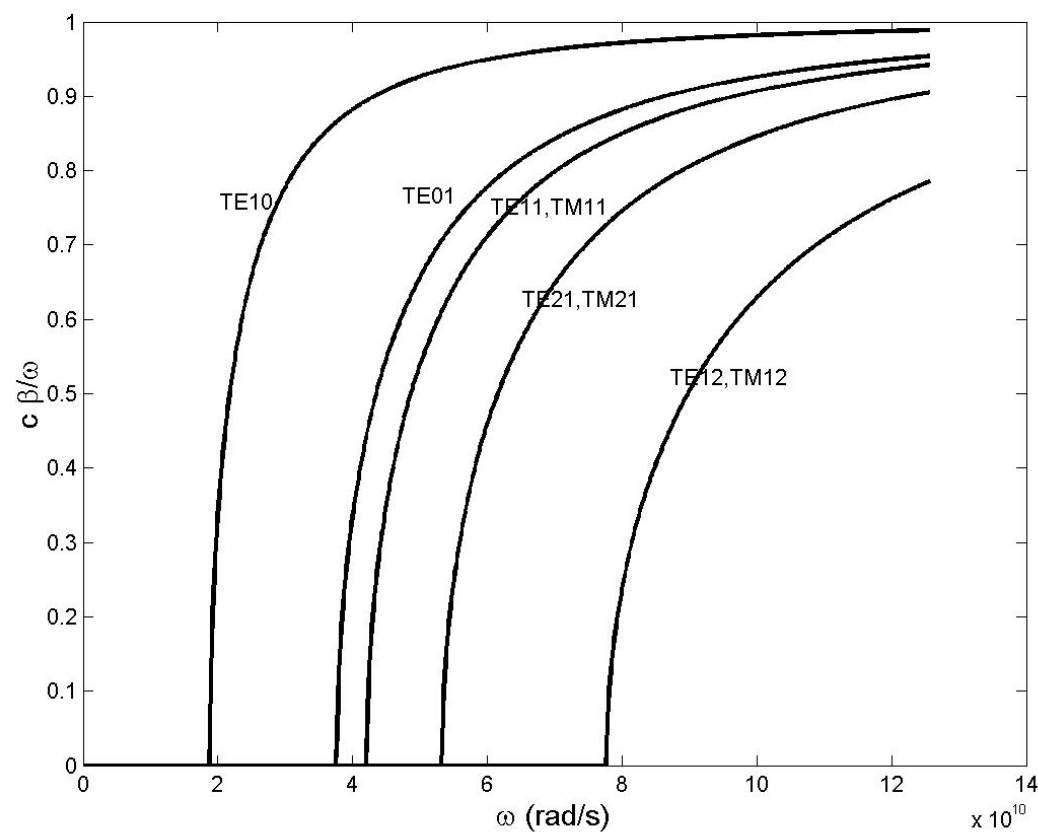


Figure 13: Modos para o Guia Retangular Metálico de dimensões a e b

O modo fundamental do guia retangular

⇒ Conforme vimos, o modo fundamental do guia retangular com $a > b$ é o TE₁₀ ou seja, $m = 1$ e $n = 0$. O campo longitudinal é dado por:

$$H_z = H_0 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i(\omega t - \beta_{10}z)} . \quad (99)$$

onde

$$\beta_{10} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_{10}^2}{\omega^2}} .$$

Calculando os campos transversais pelas fórmulas (87) e (101)

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{-i\omega\mu_0}{\pi/a} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i(\omega t - \beta_{10}z)} \hat{\mathbf{a}}_y , \quad (100)$$

$$\mathbf{H}_\perp = \frac{i\beta_{10}}{\pi/a} H_0 \sin\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{i(\omega t - \beta_{10}z)} \hat{\mathbf{a}}_x . \quad (101)$$

Perfil do campo elétrico E_y do modo TE_{10} para o Guia Retangular Metálico de dimensões a e b . O campo magnético transversal será ortogonal a E_y e tem a mesma dependência em relação a x :

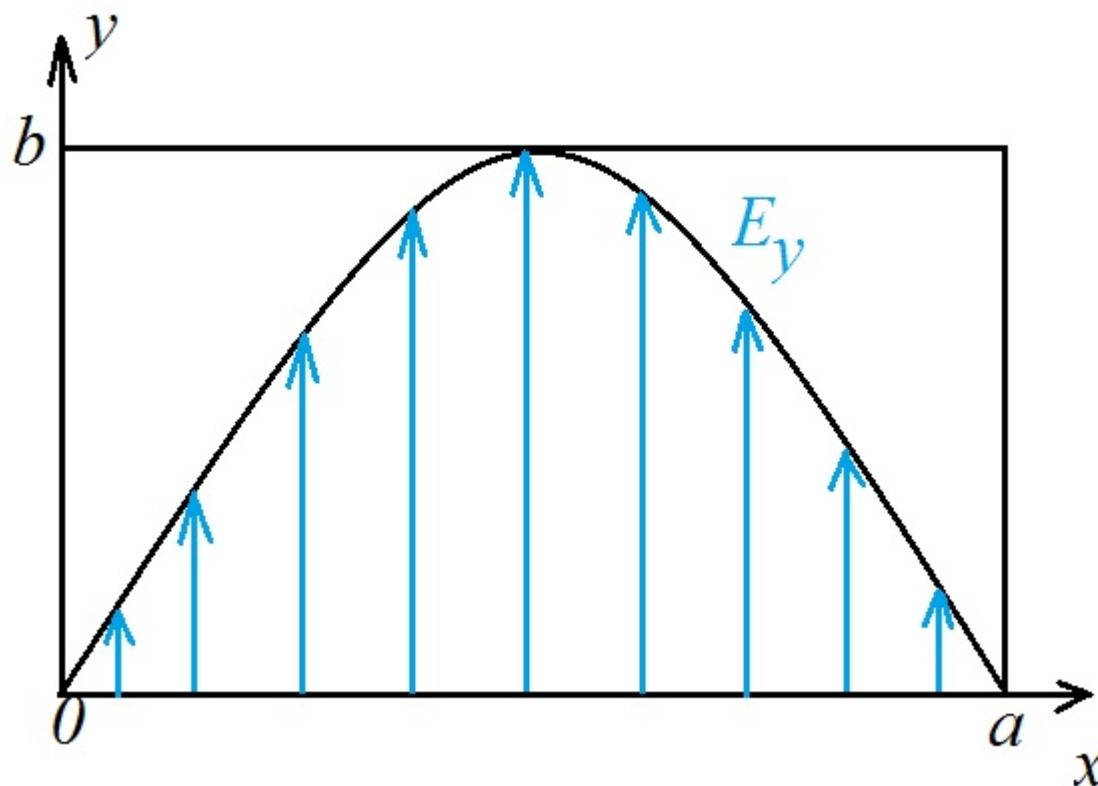


Figure 14: Observe que o campo elétrico(transversal) para o modo TE_{10} se anula nas paredes $x = 0$ e $x = a$.

Demonstração: Ausência de Modos TEM em um guia oco

⇒ Dissemos inicialmente que para suportar um modo TEM um guia deve ser composto por no mínimo dois condutores.

⇒ Vamos demonstrar a impossibilidade dos modos TEM para os guias ocos por redução ao absurdo.

⇒ Suponha possível o modo TEM. Nesse caso os campos longitudinais devem ser nulos, ou seja, $E_z = 0$ e $H_z = 0$, e o campo eletromagnético deve ser totalmente transversal à direção z .

Escolhendo agora o guia retangular sem perder generalidade e campo elétrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp = (E_x, 0, 0)$.

Esse campo elétrico é tangencial às paredes condutoras em $y = 0$ e $y = b$ e por isso deve se anular nessas paredes, ou seja:

$$E_x \Big|_{y=0} = 0$$

$$E_x \Big|_{y=b} = 0$$

⇒ Para que essa solução não seja trivial, ou seja $E_x = 0$ para todos os valores de y , o que anula o campo em toda a seção transversal do guia, o campo elétrico deve ser uma função de y , além de (z, t) .

Considerando a componente z da equação de Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}$ em coordenadas cartesianas:

$$H_z = \frac{i}{\omega\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)$$

mas como $E_x = E_x(y, z, t)$, sua derivada em relação à variável y não se anula e portanto $H_z \neq 0$ contrariando nosso pressuposto inicial!

⇒ Vemos assim a impossibilidade da onda ser TEM e cumprir com as condições de contorno impostas pelas equações de Maxwell.

O mesmo vale se tivéssemos escolhido H_x , pois aí é o campo magnético perpendicular às superfícies metálicas que deve se anular nas superfícies, e aí o campo deve ser uma função de x . Pelas equações de Maxwell demonstra-se novamente que é necessário a existência de um campo E_z para cumprir com as condições de contorno. Portanto não são possíveis modos TEM em um guia metálico oco, constituído apenas de paredes condutoras.