UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR
Setor de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica

3^a LISTA DE EXERCÍCIOS

Disciplina: TE053 - Ondas Eletromagnéticas

Professor: César Augusto Dartora[1]

1) Resolver os seguintes Problemas do Capítulo 10 - Equações de Maxwell, do livro-texto Matthew N.O. Sadiku, Elementos do Eletromagnetismo, 3a. Edição: 10.1, 10.3, 10.4, 10.7, 10.8, 10.9, 10.10, 10.11, 10.13, 10.14, 10.15, 10.16, 10.17, 10.18, 10.19, 10.44, 10.45.

2) A partir das Equações de Maxwell na forma diferencial, escreva as equações de Maxwell no vácuo e obtenha a equação de ondas no espaço livre(vácuo). A resposta deverá ser:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E} = 0$$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{H} = 0$$

lembrando que $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$.

****3)** São dadas as equações de Maxwell macroscópicas abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Considerando a solução geral de onda plana uniforme $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$, onde $\mathbf{E}_0$ é um vetor complexo constante, ω é a frequência angular da onda e $\mathbf{k}$ é o vetor de onda na direção de propagação da onda:
a) Demonstre que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}$ satisfaz a equação de ondas homogênea

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{E}(x,y,z,t) = 0$$

desde que $v^2k^2 = \omega^2$, $k^2 = \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}$.
b) Demonstre que para as ondas planas uniformes no vácuo as equações de Maxwell reduzem-se a um conjunto algébrico:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0 \;\; , \;\; \mathbf{k}\cdot\mathbf{H} = 0 \;\; , \;\; \mathbf{k}\times\mathbf{E} = \omega\mu_0\mathbf{H} \;\; , \;\; \mathbf{k}\times\mathbf{H} = -\omega\varepsilon_0\mathbf{H}$$

c) Discuta as relações entre $\mathbf{k}$, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ para a onda plana uniforme.

Dicas: Os seguintes resultados são úteis:

$$\nabla(e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}) = -i\mathbf{k}e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t}(e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}) = i\omega e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$$

[1] cadartora@eletrica.ufpr.br

$$\nabla \cdot (f\mathbf{a}) = \nabla(f) \cdot \mathbf{a} + f\nabla \cdot \mathbf{a} \quad , \quad \nabla \times (f\mathbf{a}) = \nabla(f) \times \mathbf{a} + f\nabla \times \mathbf{a}$$

onde f é uma função escalar e $\mathbf{a}$ uma função vetorial. Além disso, para três vetores quaisquer temos:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

4) Seja uma onda eletromagnética plana e uniforme no vácuo cujo vetor campo elétrico seja dado por:

$$\mathbf{E} = E_0 \left(\sqrt{3}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} - \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}\right) \exp\left\{ i \left[\omega t - 6283 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} z + \frac{1}{2} x \right) \right] \right\}$$

sendo $E_0 = 100\text{mV/m}$, t dado em segundos e (x, y, z) em metros . Determine:
a) o comprimento de ondas λ_0 e a frequência $f = \omega/(2\pi)$.
b) a direção de propagação desta onda, $\hat{\mathbf{n}}$. Qual o ângulo formado entre vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$ e o eixo z?;
c) o campo magnético $\mathbf{H}$ e o seu valor em módulo, H_0.
d) o valor médio do vetor de Poynting dessa onda.

****5)** Superposição de ondas e Interferência: Duas ondas monocromáticas de frequência ω se propagam no vácuo, com campo elétrico $\mathbf{E}_1$ e $\mathbf{E}_2$ de mesma amplitude E_0 e polarizados em $+y$ conforme ilustra a Figura 1. Os vetores de onda $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$ formam um ângulo $\theta = 30^o$ com o eixo z e obviamente tem

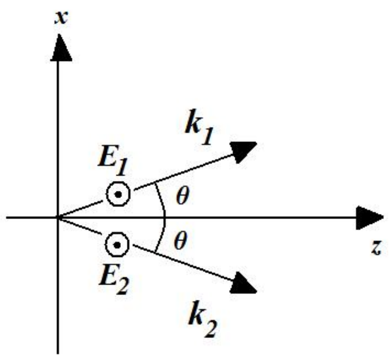

Figura 1: Duas ondas planas uniformes de mesma frequência propagando-se no vácuo nas direções de $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$.

mesmo módulo $|\mathbf{k_1}| = |\mathbf{k}_2| = k$. Determine:
a) Os vetores unitários $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{1}$ e $\hat{\mathbf{n}}_\mathbf{2}$ que indicam a direção de propagação de cada uma das ondas;
b) O campo elétrico restultante da superposição das duas ondas, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$.
c) O campo magnético $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$ resultante da superposição.
d) O valor médio do vetor de Poynting.

6) Dado o campo magnético no vácuo $H_x = H_0 \cos(\omega t - kz)$, $H_y = H_0 \sin(\omega t - kz)$, $H_z = 0$, encontre a partir das equações de Maxwell o campo elétrico $\mathbf{E}$, e calcule o fluxo de potência dado por $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$. Encontre a média do vetor de Poynting em um período de oscilação temporal, ou seja:

$$\mathbf{S}_{med} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

onde $T = 1/f = 2\pi/\omega$.

7) a) Para uma onda eletromagnética no vácuo a velocidade de propagação é $c = 3 \times 10^8$m/s. Dadas as frequência $f = 60$ Hz, 1 kHz, 1 MHz, 1 GHz, 10^{14} Hz encontre os comprimentos de onda respectivos. Dado $\lambda = 632$ nm (laser vermelho), encontre o valor de k, ω e f.
b) Sabendo que em óptica define-se índice de refração de um meio como a razão entre a velocidade da luz no vácuo c_0 e a velocidade da luz naquele meio c, ou seja $n = c_0/c$, encontre a velocidade da onda nos meios com índice de refração $n = 2.2$, $n = 1.5$, $n = 9$, e sabendo-se que a frequência não deve mudar de um meio para outro, encontre os comprimentos de onda nesses meios, para uma frequência $f = 10^{11}$ Hz. O que acontece com o comprimento de ondas?

***8)** Discuta de forma clara o que é um meio linear, isotrópico e homogêneo, dando exemplos e contra-exemplos em cada caso. Mostre que para um meio macroscopicamente neutro, linear, isotrópico, não-magnético $\mu = \mu_0$ porém não-homogêneo na permissividade dielétrica temos

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\frac{1}{\varepsilon}\nabla(\varepsilon) \cdot \mathbf{E}$$

Obtenha a equação de ondas para o campo elétrico nesse caso. Cite exemplos práticos para um meio de permissividade dielétrica não-homogênea.

9) Obtenha uma onda cujo vetor de Poynting se propaga formando um ângulo de 30^o com o eixo z, sendo contido no plano (x, z) para todo o espaço, e propaga-se no sentido positivo dos eixos x e z. Sabe-se que o campo elétrico tem polarização linear na direção $\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}$. A frequência desta onda é de 10^8 Hz (faixa de FM), o módulo do campo elétrico vale 10 mV/m e o meio em questão é não magnético, ou seja $\mu_r = 1$, dielétrico cujas perdas podem ser desprezadas, $\varepsilon_r = 2.145$ e $\sigma \approx 0$. Calcule o comprimento de ondas no meio em questão. Encontre o vetor campo magnético e a intensidade do vetor de Poynting.

10) Sejam dados a intensidade e direção do campo elétrico $\mathbf{E_0} = (50mV/m)\ \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x}$ em $z = 0$ e a direção de propagação de uma onda eletromagnética de frequência angular $\omega = 600 \times 10^6$ rad/s, $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}$, para um meio material não magnético com condutividade $\sigma = 10^{-6}\Omega^{-1}m^{-1}$ e o índice de refração $n = \sqrt{\varepsilon_r} = 1.125$ (ar com poluição, humidade por exemplo) encontre a frequência temporal f da onda, o comprimento de ondas λ (no vácuo e no meio) e a impedância do meio. É aplicável a aproximação de baixas perdas nesse caso. Determine o valor da constante de atenuação. Encontre o valor de intensidade do vetor de Poynting em $z = 0$ e a uma distância $z = 10$ km. Agora supondo uma superfície perfeitamente absorvedora e orientada $\mathbf{A} = (0.25m^2)(\cos(30^o)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + \sin(30^o)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z})$, qual é a potência média absorvida por essa superfície em $z = 10$ km?

11) Encontre a razão entre o módulo da corrente de condução σE e da corrente de deslocamento $\omega\varepsilon E$ para as frequências 60 Hz, 10 MHz, 10 GHz, para um campo elétrico de intensidade E nos seguintes meios:
a) Vidro dielétrico de poucas perdas $\varepsilon = 4.1\varepsilon_0$ e $\sigma = 10^{-12}\Omega^{-1}m^{-1}$;
b) Bom condutor, Cobre $\varepsilon = \varepsilon_0$ e $\sigma = 5.80 \times 10^7\Omega^{-1}m^{-1}$.
O que você nota de diferença básica entre condutores e dielétricos?

12) Dadas as equações de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \qquad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

deduza a equação de ondas para o campo elétrico $\mathbf{E}$ em um meio dielétrico macroscopicamente neutro($\rho = 0$) e com condutividade nula, ou seja $\mathbf{J} = 0$. Assuma que o meio é não-magnético, $\mathbf{B} = \mu_0\mathbf{H}$ mas $\mathbf{D} = \varepsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, onde $\mathbf{P}$ é a polarização dielétrica do meio.

***13)** Uma onda plana em um meio não-magnético sem perdas tem campo elétrico dado por:

$$\mathbf{E} = 77\cos(10^9 t - 3x + 4z)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}\ \text{mV/m}\ ,$$

onde t é dado em segundos e z é dado em metros. Encontre:
a) a representação complexa de $\mathbf{E}$, a polarização e a direção de propagação da onda;
b) a frequência f, o comprimento de ondas no vácuo(λ_0) e no meio em questão(λ), bem como a permissividade dielétrica relativa, ε_r;
c) o campo $\mathbf{H}$, tanto na forma complexa quanto no domínio temporal.
d) o vetor de Poynting médio, $\mathbf{S}_{med}$.

14) A realização mais simplista de um guia de ondas consiste de dois planos metálicos paralelos colocados em $x = 0$ e $x = a$. As ondas eletromagnéticas ficam então confinadas na região contida entre esses planos, $0 \leq x \leq a$. Uma forma de entender o comportamento do mesmo é supor que a onda resultante é a superposição de duas ondas planas uniformes, na forma abaixo:

$$\mathbf{E}_1 = Ae^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}$$

$$\mathbf{E}_2 = Be^{i(\omega t + k_x x - k_z z)}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}$$

Pelas condições de contorno, sabemos que as componentes tangenciais do campo elétrico total $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$(nesse caso a componente E_y total) nas superfícies metálicas colocadas em $x = 0$ e $x = a$ deve se anular.

a) Determine a relação entre as constantes A e B para que $E_y(x = 0) = 0$ em $\forall(t, z)$. Escreva o campo elétrico resultante $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ e diga se esse campo resultante é também uma onda plana uniforme. Justifique.
b) Tendo em mãos o resultado anterior, faça $E_y(x = a) = 0$ e obtenha os possíveis valores de k_x. O que se observa para k_x?
c) Determine o campo magnético resultante da superposição das ondas, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$.
d) Determine a densidade de potência média transportada por essa onda, $\mathbf{S}_{med}$.

15) Uma onda eletromagnética no espaço livre é descrita pelo campo elétrico na forma abaixo:

$$\mathbf{E} = E_0\cos(k_x x)\ \exp[i(\omega t - k_z z)]\ \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}$$

sendo $k^2 = k_x^2 + k_z^2$, E_0, k_x e k_z puramente reais.
a) Represente essa onda como superposição de duas ondas planas uniformes
b) Encontre a expressão do campo magnético $\mathbf{H}$ para essa onda
c) Determine o valor médio do vetor de Poynting, $\mathbf{S}_{med}$. Qual a direção de propagação do fluxo de potência médio para essa onda?

***16)** Considere a incidência de uma onda eletromagnética plana e uniforme em uma interface entre dois meios dielétricos ideais de índices de refração $n_1 = 1$ e $n_2 = 1.5$, com ângulo de incidência de $\theta_i = 56,31^{\text{o}}$. Se o plano de incidência é o plano (x, z) e o campo elétrico da onda incidente é dado por:

$$\mathbf{E}_{inc} = \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cos\theta_i\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} - \sin\theta_i\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}) - \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}]\exp[i(\omega t - kz\cos\theta_i - kx\sin\theta_i)]$$

determine:
a) o ângulo de Brewster, θ_B.
b) a polarização da onda refletida para o ângulo de incidência $\theta_i = 56,31^{\text{o}}$.
c) o valor da refletividade $R = |r|^2$ (veja no formulário) e o valor percentual da densidade de potência refletida relativa à densidade de potência total incidente.

17) Demonstre que na situação de reflexão total entre dois meios dielétricos ideais a amplitude de reflexão é dada na forma $r = e^{i2\phi}$, onde ϕ é uma fase que depende do ângulo de incidência e da polarização. Determine ϕ para ambas as polarizações.

18) Em uma configuração de interfaces de três camadas com índices de refração n_1, n_2 e n_3 tal que:

$$n(z) = \left\{ \begin{array}{cc} n_1 & z \leq 0 \\ n_2 & 0 \leq z \leq d \\ n_3 & z \geq d \end{array} \right\}$$

encontre a refletividade $R = |r|^2$, no caso da incidência normal $\theta = 0$, aplicando as condições de fronteira nas interfaces $z = 0$ e $z = d$, uma vez que a onda incidente vem do meio n_1 e será em geral parcialmente transmitida ao meio 3. Considere as seguintes hipóteses:

Ondas Eletromagnéticas propagando-se no meio 1, incidente e refletida:

$$\mathbf{E_i} = E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_1 z)}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H_i} = \frac{n_1}{Z_0} E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_1 z)}\hat{\mathbf{y}}$$

$$\mathbf{E_r} = -r E_0 e^{i(\omega t + k_0 n_1 z)}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H_r} = r\frac{n_1}{Z_0} E_0 e^{i(\omega t + k_0 n_1 z)}\hat{\mathbf{y}}$$

Ondas Eletromagnéticas propagando-se no meio 2, composição de uma onda propagante e uma contra-propagante:

$$\mathbf{E_2} = E_0[A e^{i(\omega t - k_0 n_2 z)} - B e^{i(\omega t + k_0 n_2 z)}]\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H_2} = \frac{n_2}{Z_0} E_0[A e^{i(\omega t - k_0 n_2 z} + B e^{i(\omega t + k_0 n_2 z}]\hat{\mathbf{y}}$$

Ondas Eletromagnéticas propagando-se no meio 3, apenas a onda transmitida de 1 para 3:

$$\mathbf{E_i} = \tau E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_3 z)}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{H_i} = \tau\frac{n_3}{Z_0} E_0 e^{i(\omega t - k_0 n_3 z)}\hat{\mathbf{y}}$$

O problema consiste em encontrar os coeficientes r, τ, A, B. Com a expressão obtida para r faça o gráfico da refletividade $R = |r|^2$ em função do comprimento de ondas no vácuo $\lambda = 2\pi/k_0$ $1\mu\text{m} < \lambda < 3\mu\text{m}$ no Matlab, para $n_1 = 1$, $n_3 = 1.5$, $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$, $d = \lambda_0/(4n_2)$, comprimento de ondas de projeto $\lambda_0 = 1.5\mu\text{m}$. O que você pode concluir?