

4ª LISTA DE EXERCÍCIOS

**Disciplina:** TE053 - Ondas Eletromagnéticas

**Professor:** César Augusto Dartora<sup>1</sup>

---

\*1) Mostre que os campos definidos em termos dos potenciais escalar e vetor,  $\phi$  e  $\mathbf{A}$ , na forma abaixo:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t},$$
$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A},$$

satizfazem automaticamente as duas equações de Maxwell sem fontes  $\rho$  e  $\mathbf{J}$ . Encontre as equações de ondas para os potenciais no calibre de Lorenz,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial\phi}{\partial t} = 0,$$

a partir das equações de Maxwell com fontes.

2) Dada a densidade de corrente abaixo, para antena conhecida como dipolo elétrico ideal:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}') = I_0\delta(x')\delta(y')\hat{\mathbf{a}}_z, \quad -\frac{d}{2} \leq z \leq \frac{d}{2}$$

sendo  $\delta(x')$  e  $\delta(y')$  as funções impulso ou delta de Dirac determine  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ . Analise as componentes de campo e extraia os campos de radiação (considerar somente as componentes de campo que variam com  $1/r$ ), a densidade de potência radiada e a potência radiada.

3) Descreva as principais características do campo próximo e do campo distante gerado por uma antena. Em que escala de distâncias o campo próximo é dominante e em que escala estaremos na região de campo distante. Qual o significado físico do campo distante? Discuta o vetor de Poynting de radiação para propagação não guiada, ou em outras palavras, por qual motivo  $S_{rad} \propto 1/r^2$ .

\*4) É sabido que o campo distante (ou de radiação) de uma antena depende essencialmente do potencial vetor transverso:

$$\mathbf{A}_\perp = \mathbf{A} - A_r\hat{\mathbf{a}}_r = (0, A_\theta, A_\varphi), \quad (1)$$

onde  $A_r$  é a componente radial do potencial vetor  $\mathbf{A}$ , calculado através da expressão:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r} \vec{\mathcal{I}}(k, \theta, \varphi), \quad (2)$$

sendo  $k$  o número de onda e  $\mathcal{I}(k, \theta, \varphi)$  a transformada de Fourier da distribuição de densidade corrente na região fonte, que leva do espaço  $\mathbf{r}' = (x', y', z')$  (coordenadas na região fonte) para o espaço recíproco de vetor de onda  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = k(\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$ , ou seja:

$$\vec{\mathcal{I}}(k, \theta, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{J}(x', y', z') e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'} dx' dy' dz'. \quad (3)$$

---

<sup>1</sup>cadartora@eletrica.ufpr.br

Para uma antena filamental orientada ao longo do eixo  $z$  temos:

$$\mathbf{J}(x, y, z) = I(z)\delta(x)\delta(y)\hat{\mathbf{a}}_z. \quad (4)$$

Pede-se:

(a) Demonstre, utilizando a distribuição (4), que para uma antena filamental a equação (3) reduz-se a :

$$\vec{\mathcal{I}}(k \cos \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} I(z')e^{i(k \cos \theta)z'} dz' \hat{\mathbf{a}}_z = \mathcal{F}(k \cos \theta)\hat{\mathbf{a}}_z. \quad (5)$$

(b) Suponha uma distribuição de corrente uniforme ao longo de um fio que se estende sobre o eixo  $z$  desde  $-d/2$  até  $d/2$ , ou seja,  $I(z) = I_0$  para  $|z| \leq d/2$  e  $I(z) = 0$  se  $|z| > d/2$ . Encontre a transformada de Fourier  $\mathcal{F}(k \cos \theta)$  dessa distribuição de corrente .

(c) Converta então  $\hat{\mathbf{a}}_z$  para coordenadas esféricas conforme realizado em aula e determine o campo elétrico e magnético de radiação:

$$\mathbf{E}_{rad} = -i\omega[\mathbf{A} - A_r\hat{\mathbf{a}}_r]$$

$$\mathbf{H}_{rad} = \frac{1}{Z}\hat{\mathbf{a}}_r \times \mathbf{E}_{rad}$$

(d) Encontre a densidade de potência radiada por essa antena e esboce o diagrama de radiação (ou o ganho) em função de  $\theta$  para  $d = 2\lambda$ . Quantos lóbulos se podem perceber no plano  $(x, z)$ ?

5) Demonstre que para o dipolo elétrico curto temos:

$$S_{rad} = \frac{ZI_0^2}{32} \frac{d^2}{\lambda^2} \frac{1}{r^2} \sin^2 \theta$$

Demonstre que:

$$\int_{\Omega} \sin^2 \theta d\Omega = \frac{8\pi}{3}$$

e ainda que a diretividade angular de um dipolos é dada por:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \quad (6)$$

\*6) Consideremos uma antena do tipo dipolo magnético constituído de uma espira circular de raio  $a \ll \lambda$  e módulo do momento magnético dado por  $m = \pi a^2 I_0$ , onde  $I_0$  é a amplitude da corrente que circula pela espira. Essa espira produz um potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$ , na condição  $r \gg a$  e  $a \ll \lambda$  mostrado abaixo:

$$\mathbf{A} = \frac{ik\mu_0 m e^{i(\omega t - kr)}}{4\pi r} \sin \theta \hat{\mathbf{a}}_\varphi.$$

a) Encontre os campos de radiação  $\mathbf{E}_{rad}$  e  $\mathbf{H}_{rad}$ , a partir do potencial vetor  $\mathbf{A}$  dado. Se o plano de terra é o plano  $(x, y)$  essa antena tem polarização vertical ou horizontal?

b) Mostre que o vetor de Poynting de radiação dessa antena é dado por

$$S_{rad} = \frac{\pi^4 Z_0 I_0^2}{2r^2} \left( \frac{a^2}{\lambda^2} \right)^2 \sin^2 \theta.$$

Determine então a potência total radiada  $P_{rad} = \int_{\Omega} r^2 S_{rad} d\Omega$ .

c) Determine a diretividade do dipolo magnético. Aponte as dualidades/simetrias em relação ao dipolo elétrico.

- 7) Descreva o significado físico do ganho de uma antena. Em outras palavras, o que é ganho de antena?
- 8) Deduza a fórmula de Friis,

$$P_r = P_t \frac{G_t G_r \lambda^2}{(4\pi r)^2},$$

para um link de comunicação em visada direta.

- \*9) Demonstre que o valor de pico do campo elétrico radiado por uma antena na direção de máximo ganho da antena é dado por

$$E_0 = \frac{\sqrt{60 G_t P_{rad}}}{r} \text{ [V/m]},$$

onde  $G_t$  é o ganho da antena transmissora e  $P_{rad}$  a potência radiada por essa antena.

- 10) Qual a potência total radiada por um dipolo curto de comprimento 30 cm, carregando uma corrente de 500 mA, na frequência de 1MHz?
- 11) A fórmula de Friis relaciona potência transmitida e recebida na forma abaixo:

$$P_r = P_t \frac{G_t G_r \lambda^2}{(4\pi r)^2}$$

sendo  $G_t$  e  $G_r$  o ganho das antenas de transmissão e recepção, no seu valor máximo,  $\lambda$  o comprimento de onda e  $r$  a distância entre transmissor e receptor. É claro que a potência recebida depende da orientação relativa das antenas. Considere a fórmula de Friis para um link de comunicação sendo que as duas antenas são iguais e tem ganho  $G$ . A frequência utilizada no link é de  $f = 3$  GHz. Se o receptor tem sensibilidade para receber até  $-100$ dBW (converta para Watts), e estando localizado a 50km de distância do transmissor cuja potência transmitida é de 30 Watts:

- calcule o ganho das antenas  $G$ , em um dia normal, onde a fórmula de Friis acima é aplicável;
- calcule o coeficiente de atenuação  $\alpha$  e o coeficiente de fase  $\beta$  em um dia de chuva, onde os parâmetros do meio mudam. Num dia seco estamos considerando  $\alpha = 0$ , mas com a umidade crescente considere a aproximação para meios dielétricos com poucas perdas e considere a condutividade do ar nesse caso como sendo  $\sigma = 5 \times 10^{-8} \Omega^{-1} m^{-1}$ . A permissividade dielétrica relativa é  $\epsilon_r \approx 1$ ;
- A fórmula de Friis modifica-se por efeito da atenuação, considere simplesmente:

$$P_r = P_t \frac{G^2 \lambda^2}{(4\pi r)^2} T$$

onde  $T$  é o coeficiente de transmissão do meio:

$$T = \exp(-2\alpha r).$$

Devido à atenuação (interferência das condições do meio na propagação) haverá problemas na recepção do sinal? Se sim, aponte uma solução.

- 12) Um sistema de broadcasting de TV via satélite opera a uma frequência de 12 GHz. A potência transmitida pelo satélite é 120W enquanto que o receptor é capaz de detectar sinais de  $2 \times 10^{-12}$  W (veja que a potência recebida é da ordem de pico-Watts!!!). Se a distância entre o satélite e o receptor é  $r = 36.000$ km e se a antena transmissora é igual à antena receptora, calcule o ganho  $G$  (em dB) de modo a que o sistema funcione adequadamente.

- 13) Consideremos a fórmula de Friis aplicada a um sistema de comunicação móvel (telefonia celular por exemplo):

$$P_r = P_t \frac{G_t G_r \lambda^2}{(4\pi r)^2}$$

consistindo de uma antena na estação rádio-base (ERB) de ganho  $G = 13\text{dBi}$  e um telefone móvel utilizando um dipolo curto. Vamos desprezar os efeitos de atenuação no meio de propagação. A frequência utilizada no link é  $f = 1.85\text{ GHz}$ .

a) Qual é o raio de alcance da ERB para qua a comunicação não seja perdida em meio ao ruído se o aparelho móvel pode transmitir uma potência máxima de  $3\text{dBm}$  e o receptor da ERB tem sensibilidade mínima de  $-93\text{dBm}$ ? (converta as potências para  $\text{mW}$ !!)

A Anatel regulamenta os limites para exposição da população em geral a Campos Eletromagnéticos de RF através da Res. 303/2002, na faixa de radiofrequências entre  $9\text{ kHz}$  e  $300\text{ GHz}$ . Para a faixa de  $400\text{MHz}$  até  $2000\text{MHz}$ , a exposição máxima em termos do valor de pico do campo elétrico é dada pela fórmula

$$E_0(\text{max}) = 1.9445\sqrt{f} \text{ [V/m]},$$

enquanto que em termos de densidade de potência vale a relação:

$$S_{\text{rad}}(\text{max}) = \frac{f}{200} \text{ [W/m}^2\text{]},$$

onde  $f$  deve ser dada em  $\text{MHz}$ . Lembre ainda que, da teoria de antenas e da propagação de ondas temos  $S_{\text{rad}} = E_0^2/(2Z_0)$  onde  $E_0$  é o módulo do pico do campo elétrico e além disso  $S_{\text{rad}} = G_t P_t / (4\pi r^2)$  na direção do máximo ganho da antena.

b) Determine a densidade de potência de radiação gerada pelo aparelho móvel a uma distância de  $1\text{cm}$  da cabeça do usuário do aparelho. A partir desse valor, diga se é seguro utilizar um aparelho celular, de acordo com a norma da Anatel.

c) Se a ERB transmite uma potência de total de  $100\text{W}$  na faixa de  $1.85\text{GHz}$ , qual é a distância mínima da antena que pode ser considerada segura para a população em geral?

- 14) A densidade de potência máxima gerada por uma antena de ganho  $20$  operando na frequência  $f = 2.4\text{GHz}$  a uma distância de  $100\text{m}$  da mesma é de  $400\text{nW/m}^2$ . Determine:

a) A potência de entrada nessa antena transmissora.

b) A densidade de potência e a intensidade do campo elétrico a  $200\text{m}$  da antena.

c) A potência recebida por um aparelho receptor localizado a  $100\text{m}$  da antena transmissora e utilizando uma antena de ganho  $G = 2$ .

- \*15) O regime transiente de carga de um capacitor de placas paralelas pode ser descrito através dos potenciais eletromagnéticos  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  na região  $0 \leq z \leq d$  entre as placas, dados aproximadamente pelas expressões abaixo, em coordenadas cilíndricas:

$$\begin{aligned} \phi(\rho, \varphi, z, t) &= \phi_0 - E_0(1 - e^{-t/\tau})z \\ \mathbf{A}(\rho, \varphi, z, t) &= -\frac{E_0 \rho^2}{4c^2 \tau} e^{-t/\tau} \hat{\mathbf{a}}_z \end{aligned}$$

onde  $\phi_0$  é uma constante,  $E_0$  é o valor de pico do campo elétrico,  $c$  é a velocidade da luz no dielétrico entre as placas,  $\tau$  é a constante de tempo de carregamento,  $t$  é o tempo medido em segundos e  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a distância em relação ao eixo  $z$  em coordenadas cilíndricas.

Determine os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  entre as placas.

- \*16) Pesquise e apresente dados de fabricantes para antenas reais, com seus diagramas de radiação. Procure dados de antenas de refletor parabólico, hélice quadrifilar, etc.

\*17) Descreva os sistemas de radar, encontrando uma "fórmula de Friis" equivalente para o radar mono-estático (usa a mesma antena para transmitir e receber). Defina expressões que permitam determinar a distância e velocidade de um alvo. O que é o efeito Doppler e para que serve em radares? Cite aplicações de sistemas de radar.