UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR
Setor de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica

1^a LISTA DE EXERCÍCIOS

Disciplina: TE338 - Ondas Eletromagnéticas

Professor: César Augusto Dartora[1]

Esta lista refere-se à parte de Introdução e Revisão de Cálculo Vetorial e Números Complexos.

1) Resolver seguintes exercícios na seção Problemas do livro-texto Elementos de Eletromagnetismo, Matthew N.O. Sadiku, 3a Edição:
a) Capítulo 1: 1.1, 1.3, 1.7, 1.9, 1.11, 1.13, 1.22.
b) Capítulo 2: 2.1, 2.3, 2.8, 2.11.
c) Capítulo 3: 3.7, 3.11, 3.16, 3.18, 3.19, 3.27, 3.37, 3.39, 3.44.

*__2)__ 2.1) O potencial eletrostático ϕ criado por um momento de dipolo elétrico de módulo $p_e = qd$ e orientado ao longo do eixo z é dado por:

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta \ .$$

a) Determine o campo eletrostático $\mathbf{E} = -\nabla\phi$.
b) Encontre a equação das linhas de campo e faça um esboço gráfico.
c) Determine $\nabla \times \mathbf{E}$.

2.2) O potencial vetor magnético $\mathbf{A}$ criado por um momento de dipolo magnético de módulo $m = IA$, onde I é a corrente que circula pelo circuito fechado e A a área encerrada pelo circuito, e orientado ao longo do eixo z, tal que $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}}$, é dado por:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 \mathbf{m} \times \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}}{4\pi r^2} \ .$$

a) Faça o produto vetorial $\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{r}}$ e encontre as componentes de $\mathbf{A}$ em coordenadas esféricas.
b)Determine o campo magnetostático $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.
c) Determine $\nabla \cdot \mathbf{B}$.

3) Seja $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ o vetor que une os pontos de medida de um campo $\mathbf{x} = (x, y, z)$ e um ponto na região fonte $\mathbf{x}' = (x', y', z')$.
a) Represente $\mathbf{R}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}'$ graficamente.
b) Calcule a divergência e o rotacional de $\mathbf{R}$.
c) Seja R o módulo de $\mathbf{R}$, determine:

$$\nabla(R) \ \ , \nabla\left(\frac{1}{R}\right) \ \ , \ \ \nabla \times (\nabla R)$$

[1]cadartora@eletrica.ufpr.br

d) Mostre que

$$\oint_{a(R)} \mathbf{R} \cdot d\mathbf{a} = 3V \ ,$$

sendo $d\mathbf{a}$ o vetor diferencial de superfície.
e) Demonstre que

$$\oint \nabla \left(\frac{1}{R}\right) \cdot d\mathbf{a} = -4\pi = \int_{V(a)} \nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) dV \ ,$$

isso mostra que

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta^3(\mathbf{R}) = \delta(x-x')\delta(y-y')\delta(z-z')$$

sendo $\delta(a-b)$ a função impulso ou delta de Dirac.

***4)** Demonstre explicitamente, por aplicação das derivadas, ou utilizando os teoremas de Gauss e Stokes que:

$$\nabla \times (\nabla\Phi) = 0 \tag{1}$$
$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0 \tag{2}$$

Qual é a versão integral das duas identidades vetoriais acima (utilize os teoremas de Gauss e Stokes apropriadamente)?

5) Para um número complexo qualquer

$$\psi = \beta + i\alpha$$

onde $i = \sqrt{-1}$. Se preferir utilize j no lugar de i. a) represente o número no plano complexo.
b) determine o módulo desse número.
c) determine o ângulo formado pelo número com o eixo dos reais.
d) denotando conjugação complexa por $*$, o que é o conjugado ψ^*? O que significa a conjugação complexa no plano complexo?
e) demonstre que $|\psi|^2 = \psi\psi^*$.
f) demonstre que o conjugado do produto de números complexos é o produto dos complexos conjugados. Para isso você pode demonstrar para dois números ψ_1 e ψ^2 e depois generalizar o resultado.

$$(\psi_1\psi_2)^* = \psi_1^*\psi_2^*$$
$$(\psi_1\psi_2...\psi_n)^* = \psi_1^*\psi_2^*...\psi_n^*$$

Obs.: em Matemática diz-se que a álgebra dos números complexos é isomórfica à dos vetores no plano, pois os vetores em duas dimensões, R^2 tem as mesmas propriedades que um número complexo C.

***6)** Demonstre através da expansão em séries de Taylor que:

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta \ ,$$

e verifique que para o módulo temos:

$$|e^{i\pm\theta}| = 1 \ ,$$

sendo $\theta = \theta^*$, ou seja, θ é real. Que figura geométrica descreve o resultado acima no plano complexo? Mostre que qualquer número complexo pode ser expresso na forma:

$$\psi = \beta + i\alpha = |\psi|e^{i\theta_\psi}$$

onde

$$|\psi| = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2}$$

$$\tan\theta_\psi = \frac{\alpha}{\beta} \ .$$

7) Verifique que:

$$\mathrm{Re}(\psi) = \beta = \frac{\psi + \psi^*}{2}$$

$$\mathrm{Im}(\psi) = \alpha = \frac{\psi - \psi^*}{2i}$$

$$\mathrm{Re}(-i\psi) = \mathrm{Im}(\psi)$$

$$\mathrm{Im}(-i\psi) = -\mathrm{Re}(\psi)$$

***8)** Escreva $\cos\theta$ e $\sin\theta$ em termos de exponenciais $e^{i\theta}$ e $e^{-i\theta}$.

9) Verifique que

$$\mathrm{Re}(\psi_1\psi_2) \neq \mathrm{Re}(\psi_1)\mathrm{Re}(\psi_2)$$

Quais as condições para que a igualdade passe a valer?

10) Dados $\psi_1 = 5+4i$ e $\psi_2 = 4-7i$, represente os números na forma polar, calculando seus módulos e ângulos com o eixo real. Determine : a) o produto $\psi_1\psi_2$.
b) o complexo conjugado do produto e o produto dos complexos conjugados.
c) a parte real do produto.
d) o produto das partes reais.

11) Demonstre que o produto de dois números complexos pode ser expresso como o produto dos módulos com fase resultante dada pela soma das fases:

$$\psi_1\psi_2 = |\psi_1||\psi_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)} \ .$$

***12)** Podemos generalizar a álgebra dos números complexos para trabalhar com vetores. Tal procedimento é muito útil no regime harmônico onde no domínio do tempo um vetor que oscila com frequência ω, pode ser escrito na forma geral:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x})\cos(\omega t) + \mathbf{A}_2(\mathbf{x})\sin(\omega t)$$

ou ainda

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathrm{Re}(\mathbf{A}_c(\mathbf{x})e^{i\omega t}) \ ,$$

sendo $\mathbf{A}_c(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1(\mathbf{x}) - i\mathbf{A}_2(\mathbf{x})$. Verifique que

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mathbf{A}_c(\mathbf{x})e^{i\omega t} + \mathbf{A}_c^*(\mathbf{x})e^{-i\omega t}}{2} \ .$$

Definido-se a média temporal de uma função qualquer sobre um período T na forma abaixo:

$$\langle F(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)dt \tag{3}$$

mostre que, para dois objetos f e g quaisquer submetidos a uma operação de multiplicação $\otimes$ qualquer: obtém-se em regime harmônico:

$$\langle f(x,y,z,t) \otimes g(x,y,z,t) \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[F(x,y,z) \otimes G^*(x,y,z)\right] \tag{4}$$

sendo F e G representações fasoriais de f e g. O resultado vale para quantidades vetoriais, como o produto escalar e vetorial, ou seja:

$$\langle \mathbf{A}(x,y,z,t) \cdot \mathbf{B}(x,y,z,t) \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{A}(x,y,z) \cdot \mathbf{B}^*(x,y,z)\right] \tag{5}$$

$$\langle \mathbf{A}(x,y,z,t) \times \mathbf{B}(x,y,z,t) \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[\mathbf{A}(x,y,z) \times \mathbf{B}^*(x,y,z)\right] \tag{6}$$

13 Dados os vetores abaixo:

$$\mathbf{E}(z,t) = 10\cos(\omega t - kz)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} - 6\sin(\omega t - kz)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}$$

$$\mathbf{H}(z,t) = \frac{1}{377}(6\sin(\omega t - kz)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + 10\cos(\omega t - kz)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y})$$

Note que os vetores não dependem de x, y, ou seja, são constantes em um planox, y definido para um dado instante (z, t).
a) Encontre representações fasoriais para $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$.
b) Determine o valor médio de $\mathbf{E}(z,t) \times \mathbf{H}(z,t)$, tanto realizando a integral de média dos vetores acima, quanto utilizando as representações fasoriais e os resultados demonstrados na questão anterior.

***14)** Dados os vetores em representação fasorial abaixo:

$$\mathbf{E} = [(5+4i)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + (3-4i)\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}]e^{i(\omega t - kz)}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{377}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} \times \mathbf{E}$$

a) Determine a parte real de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$. Tome cuidado pois tanto o termo entre colchetes quanto a exponencial são números complexos e a parte real do produto é diferente do produto das partes reais!!
b) Encontre o valor médio de $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$.

****15)** Demonstre que:

$$\nabla[e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}] = -i\mathbf{k}e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \ ,$$
$$\nabla^2[e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}] = -\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \ ,$$

sendo $\mathbf{r} = (x, y, z)$ o vetor posição e $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ denominado vetor de onda.

Para uma função vetorial complexa na forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \ ,$$

onde $\mathbf{A}_0$ é independente de $\mathbf{r}$ e do tempo t mostre que:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -i\mathbf{k} \cdot \mathbf{A} \ ,$$
$$\nabla \times \mathbf{A} = -i\mathbf{k} \times \mathbf{A} \ .$$

16) Os raios X são um tipo de radiação eletromagnética com importantes aplicações na Medicina e na determinação da Estrutura da Matéria Condensada, através da chamada difração de raios X (XRD - X-ray Diffraction), dentre outras. Uma forma de gerar raios X é impactar um alvo metálico através de elétrons altamente energéticos, produzindo transições nos níveis internos dos elétrons do material, cujo retorno ao estado fundamental se dá através de emissão de fótons de raio X. Um alvo comum no uso em XRD é o cobre. A linha de emissão denominada K-α do cobre tem comprimento de onda característico do fóton emitido $\lambda_0 = 1,5406$ Å. O Angstrom Åcorresponde a 10^{-10} m. Determine a energia desse fóton de raio-X em eV.

17) A Eletrodinâmica Quântica (QED) é a teoria quântica da interação eletromagnética entre partículas carregadas, sendo considerada a teoria mais bem testada da Física. Suas técnicas experimentais envolvem muitos ramos da Engenharia, dentre esses um dos mais importantes é a Engenharia Elétrica, para conseguir atingir os níveis de precisão atuais. Para se ter uma ideia, uma quantidade denominada de momento magnético anômalo, cujo valor é conhecido como $g - 2$ em unidades adimensionais, foi determinada experimentalmente com precisão de ~ 12 casas decimais para o elétron, e concorda espetacularmente com o valor calculado teoricamente. Recentemente um experimento medindo o $g - 2$ para o múon (uma partícula elementar em tudo igual ao um elétron, exceto que possui aproximadamente 200 vezes mais massa), mostrou discrepâncias, (da ordem de partes por bilhão!), em relação ao valor previsto pela teoria (segundo os cálculos mais atuais), havendo controvérsias sobre a natureza desse minúsculo efeito. Todavia, a QED é muito bem sucedida em prever uma série de fenômenos eletromagnéticos em nível quântico e em altas energias. Um desses é a aniquilação de pares elétron-pósitron ($e^+ + e^- \to \gamma_1 + \gamma_2 + ...$), por exemplo. O pósitron e^+ é a anti-partícula do elétron, sendo em tudo igual ao elétron e^-, exceto no sinal da carga elétrica, que é positiva para o pósitron. No processo de aniquilação, um conjunto de regras de seleção devem ser satisfeitas para que o par desapareça, produzindo tipicamente radiação eletromagnética, que é observada através dos fótons da radiação gama (γ). O processo mais simples envolve a emissão de dois fótons $\gamma_1 + \gamma_2$, que carregam então uma energia mínima igual à soma das energias de repouso do par, $mc^2 + mc^2 = 2mc^2$. Se no processo de aniquilação de pares são emitidos dois fótons com a mesma energia, determine a energia de um desses fótons de raio-γ em eV, bem como o seu comprimento de ondas.

Observação: note que no processo a lei de conservação da carga elétrica é satisfeita, pois no início (antes da aniquilação) o par possuia carga total $Q = -e + e = 0$, sendo $e = 1,6 \times 10^{-19}$C o módulo da carga do elétron, enquanto o estado final possui dois fótons, cuja carga total é também nula. O fóton é o quantum de energia do campo eletromagnético e possui carga elétrica nula.

****18)** Faça um esboço do espectro eletromagnético, com as frequências indo desde zero a infinito, mostrando o comprimento de ondas de cada faixa, a frequência e a energia do fóton associado. Descreva brevemente as faixas do espectro de RF, o infravermelho, o espectro visível, Raios UV, Raios X e Radiação Gama. Quais as principais características e aplicações de cada faixa? Qual é a faixa de Micro-ondas e como ela é sub-dividida? Em que frequências operam a telefonia celular e as redes de wi-fi? E as comunicações ópticas?

***19)** Esboce um sistema de comunicação, em diagramas de blocos, desde a transdução da informação a ser transmitida, a etapa de modulação, a propagação de ondas eletromagnéticas pelo meio considerado até a fase de recepção e demodulação de sinal. O que faz a modulação com o espectro da banda base? Para quê serve uma portadora? Em linhas gerais o que acontece na fase de demodulação, em termos espectrais? Quais as diferenças entre sinais analógicos e digitais (ou discretos)? Esboce o que se espera na entrada da antena de transmissão para um sinal em AM analógico. Como seria um sinal digital OOK?