UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR
Setor de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica

2^a LISTA DE EXERCÍCIOS

Disciplina: TE338 - Ondas Eletromagnéticas

Professor: César Augusto Dartora[1]

Nesta Lista de Exercícios a Parte 1 refere-se aos Fundamentos da Ondulatória e à Teoria de Linhas de Transmissão e a Parte 2 às Equações de Maxwell, seu significado físico e Leis de Conservação.

PARTE 1

1) Explique de maneira simples (diga quais estão associados à característica espacial da onda e quais à característica temporal), com as observações que achar pertinentes os seguintes fenômenos que ocorrem com uma onda eletromagnética:
a) Difração;
b) Dispersão;
c) Atenuação e absorção.

2) A lei do gás ideal relaciona a temperatura absoluta T do gás, a sua densidade volumétrica de partículas n e a pressão p, na forma abaixo:

$$p = nk_BT \ , \tag{1}$$

onde $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$J/K é a constante de Boltzmann. Em princípio p, T e n são funções da posição e do tempo. Adicionalmente, a densidade de momento linear em um gás é dada por $\vec{\mathcal{P}} = nm\mathbf{v}$ (medido em kg/(m^2.s) no SI), m é a massa média das partículas e $\mathbf{v}$ é o campo de velocidades com que se deslocam localmente no gás. No regime linear o gás satisfaz a segunda lei de Newton na forma abaixo:

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{P}}}{\partial t} = -\nabla p + \mathbf{f} \ , \tag{2}$$

sendo $\mathbf{f}$ o conjunto de outras densidades de força atuantes localmente. O gás ainda deve satisfazer a equação da continuidade de massa, que toma a forma abaixo:

$$\nabla \cdot (n\mathbf{v}) + \frac{\partial n}{\partial t} = 0 \ . \tag{3}$$

Admita por simplicidade que $\mathbf{f} = 0$ e T é uma constante (não depende da posição nem do tempo) no gás.

(a) Tomando a divergência da equação (2) e utilizando a equação da continuidade do gás (3), encontre uma equação que governe as ondas de pressão no gás.

(b) Uma vez que você tenha a equação geral para a pressão no gás, por análise dimensional encontre a velocidade de propagação das ondas no gás e a relacione com a temperatura T, a constante de Boltzmann k_B e a massa média das partículas m.

(c) Encontre a velocidade de propagação de ondas de som no ar, para $T = 300$K, admitindo-se que a massa média das partículas do ar vale $m = 3,5 \times 10^{-26}$kg, supondo válido o modelo acima.

[1] cadartora@eletrica.ufpr.br

3) Assunto: **Solução Harmônica da Equação de Ondas.**

Considere a solução da equação de ondas acústicas (escalar) em um material qualquer na sua representação complexa dada na forma a seguir:

$$\psi(x,t) = 10e^{i(50000t-34x)} \ ,$$

sendo t medido em segundos e x em metros e $\psi(x,t)$ em unidades de pressão acústica. Nesse caso, a velocidade e o comprimento de onda dessa onda valem:

$$\begin{array}{lll}
(A) & v = 2530m/s & \lambda = 50m \\
(B) & v = 340m/s & \lambda = 12,57m \\
(C) & v = 1470m/s & \lambda = 18,48cm \\
(D) & v = 340m/s & \lambda = 12,57m \\
(E) & v = 1000m/s & \lambda = 12,57cm
\end{array}$$

4) Assunto: **Ainda a Solução Harmônica da Equação de Ondas.**

No domínio óptico é possível em muitas situações negligenciar o caráter vetorial do campo eletromagnético, assumindo que o vetor de polarização não depende do espaço-tempo. Assuma que o campo eletromagnético é representado aproximadamente em certa região do vácuo por um escalar $\psi(x,z,t)$ cuja forma real é dada abaixo:

$$\psi(x,z,t) = 6\cos(2000x)\ \mathrm{sen}(10^{15}t - k_0 z) \ ,$$

sendo t medido em segundos e (x,z) em metros, $\psi(x,z,t)$ é medida em $\mathrm{W}^{-1/2}/\mathrm{m}$. Essa função $\psi(x,z,t)$ pode corresponder a uma componente mais significativa do campo elétrico(medido em unidades apropriadas), por exemplo. A densidade de potência óptica instantânea é dada por $S(x,z,t) = \psi^2$, em unidades de $\mathrm{W/m^2}$. Nesse caso, o valor médio de $S(x,z,t)$ sobre um período temporal vale (em $\mathrm{W/m^2}$):

$$\begin{array}{lc}
(A) & S_{med}(x,z) = 50\cos^2(2000x) \\
(B) & S_{med}(x,z) = 36\ \mathrm{sen}^2(4000x + k_0 z) \\
(C) & S_{med}(x,z) = 36\cos^2(2000x)\ \mathrm{sen}^2(10^{15}t - k_0 z) \\
(D) & S_{med}(x,z) = 18\cos^2(2000x)\mathrm{sen}^2(k_0 z) \\
(E) & S_{med}(x,z) = 18\cos^2(2000x)
\end{array}$$

5) Assunto: **Efeito Doppler e Relatividade**

O Efeito Doppler é um fenômeno ondulatório que corresponde a um desvio na frequência emitida por uma fonte em seu referencial de repouso e a frequência percebida por um observador em movimento relativo à fonte. Esse efeito ocorre com todos os tipos de onda. Considerando-se as ondas eletromagnéticas, esse efeito é utiizando em radares, para determinar a velocidade de alvos em movimento e também foi utilizado na determinação da taxa de expansão do universo e da constante de Hubble. É um efeito indesejável na construção de fontes de luz monocromáticas, principalmente em lasers gasosos.

O desvio Doppler pode ser determinado a partir do conceito de invariância e transformações de Lorentz. A fase de uma onda plana é um escalar e portanto invariante por uma transformação de coordenadas, o que significa que em dois sistemas de referência inerciais $S(z,t)$ e $S'(z',t')$ o valor de fase de uma frente de onda, vista em qualquer dos referenciais é a mesma, ou seja:

$$\phi_{\pm}(z,t) = \omega t \pm kz = \phi_{\pm}(z',t') = \omega' t' \pm k' z' \ , \tag{4}$$

onde o sinal $-$ refere-se à onda propagante, e $+$ à onda contra-propagante em z.

Considere então que uma fonte luminosa situada a uma distância $z = z_0 > 0$ da origem e em repouso no referencial S, emitindo luz propagando-se no sentido negativo de z, é medida em outro referencial S', que se move com velocidade relativa v para a direita de S. (Suponha que em $t = t' = 0$ as origens desses dois sistemas sejam coincidentes). Note que a fonte de luz aproxima-se de um observador na origem em S' que mede a luz chegando até seu detector. Nesse caso a relação entre a frequência angular da luz ω medida em S e a frequência ω' medida em S', bem como entre os comprimentos de onda λ e λ' são dadas pelas seguintes expressões:

$$
\begin{array}{lcl}
(A) & \omega' = \gamma\omega(1 + v/c_0) & \text{e } \lambda' = \gamma\lambda(1 - v/c_0) \\
(B) & \omega' = \gamma\omega(1 + v/c_0) & \text{e } \lambda' = \gamma\lambda(1 + v/c_0) \\
(C) & \omega' = \gamma\omega(1 - v/c_0) & \text{e } \lambda' = \gamma\lambda(1 - v/c_0) \\
(D) & \omega' = \gamma\omega & \text{e } \lambda' = \gamma\lambda \\
(E) & \omega' = \gamma\omega(1 - v/c_0) & \text{e } \lambda' = \gamma\lambda(1 + v/c_0)
\end{array}
$$

Lembre que $\omega/k = \omega'/k' = c_0 \approx 3 \times 10^8$m/s é a velocidade da luz no vácuo e $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c_0^2}$.

Q6) Em um cabo coaxial idealmente sem perdas com impedância característica $Z_0 = 50\Omega$ e fator de velocidade de 66,67%, o comprimento de onda na frequência de operação é $f = 5,8$ GHz vale aproximadamente:

$$
\begin{array}{ll}
(A) & \lambda = 3,45 \text{ m} \\
(B) & \lambda = 5,17 \text{ cm} \\
(C) & \lambda = 3,45 \text{ cm} \\
(D) & \lambda = 30 \text{ mm} \\
(E) & \lambda = 0,1 \text{ m}
\end{array}
$$

Q7) Considere as formas de onda de tensão e corrente na forma real, $V_R(z,t)$ e $I_R(z,t)$, respectivamente, medidas na entrada de um cabo coaxial carregado na terminação com uma carga Z_L, conectada em $z = 7\lambda/4$. O cabo coaxial tem impedância característica $Z_0 = 50\Omega$ e fator de velocidade de 66,67% na frequência de operação é $f = 2,45$ GHz, podendo ser considerado sem perdas, por simplicidade. A forma real da tensão e da corrente na entrada da linha $z = 0$ está dada abaixo:

$$V_R(z,t) = 100\cos(\omega t) + 30\sin(\omega t) \quad [V] \ , \tag{5}$$

$$I_R(z,t) = 2,0\cos(\omega t) - 0,6\sin(\omega t) \quad [A] \ . \tag{6}$$

Dica: converta para a forma complexa. Agora responda às seguintes questões.

7.a) O coeficiente de reflexão da carga vale, na forma de módulo e fase:

$$
\begin{array}{ll}
(A) & \Gamma_L = 0.70e^{i\pi} \ , \\
(B) & \Gamma_L = 0.30e^{-i\pi/2} \\
(C) & \Gamma_L = 0.50e^{i\pi/2} \\
(D) & \Gamma_L = 0.25e^{-i\pi/4} \\
(E) & \Gamma_L = 0.30e^{i\pi/2}
\end{array}
$$

7.b) A impedância Z_L medida sobre a carga, e a impedância de entrada Z_{in}, medida em $z = 0$ nessa linha, valem respectivamente (em ohms):

$$(A) \quad Z_L = 44,1 - 23,5i \ , \quad Z_{in} = 44,1 + 23,5i$$

$$(B)\quad Z_L = 44,1 + 23,5i \ , \quad Z_{in} = 44,1 - 23,5i$$
$$(C)\quad Z_L = 53,2 + 30,3i \ , \quad Z_{in} = 75,1 - 10,3i$$
$$(D)\quad Z_L = 30,0 - 40,0i \ , \quad Z_{in} = 30,0 + 40,0i$$
$$(E)\quad Z_L = 41,7 + 27,5i \ , \quad Z_{in} = 41,7 - 27,5i$$

7.c) A potência ativa média consumida pela carga, ou seja, o valor médio sobre um período temporal T do produto desses sinais, ou seja, $P_L = \langle V_R(z,t) I_R(z,t) \rangle$ vale:

$$(A)\quad P_L = 90,73e^{-i\pi/2}\ \mathrm{W}\ ,$$
$$(B)\quad P_L = 100 - 25i\ \mathrm{W}$$
$$(C)\quad P_L = 93,75\ \mathrm{W}$$
$$(D)\quad P_L = 91,0\mathrm{W}$$
$$(E)\quad P_L = 87,0\ \mathrm{W}$$

8) Uma impedância de carga Z_L é conectada a um gerador de sinais de impedância interna de 50ohms, operando na frequência de $2,4$GHz, através de uma linha de transmissão de impedância característica $Z_0 = 50$ ohms e velocidade de propagação $v = 1,5 \times 10^8$m/s. A onda de tensão resultante da superposição entre a onda propagante e refletida na linha é dada abaixo:

$$V(z,t) = 10e^{i(\omega t - \beta z)} - (2+2i)e^{i(\omega t + \beta z)} \quad [volts]\ .$$

Por simplicidade vamos desprezar a atenuação na linha. Determine:
a) O valor de β e o comprimento de onda λ nesse guia coaxial.
b) A onda de corrente $I(z,t)$ no guia.
c) O coeficiente de reflexão Γ_0 em $z = 0$, na forma módulo e fase.
d) A impedância Z_{in} vista pelo gerador, na entrada da linha de transmissão
e) O comprimento físico da linha para $l = \lambda/4$. Que caso especial esse comprimento representa?
f) A impedância de carga Z_L, se a linha de transmissão tem um comprimento $l = \lambda/4$ na frequência de operação.

9) Consideremos um setup experimental consistindo de um gerador de pulsos, com impedância interna $Z_g = Z_0$, conectado a uma carga Z_L através de um cabo coaxial de impedância característica $Z_0 = 50\Omega$. O esquemático do setup montado é mostrado na Figura 1. Quanto o gerador de pulsos emite um pulso retangular de duração $\tau = 40$ns e amplitude 6 volts, é observado na tela do osciloscópio em $z = 0$ o gráfico apresentado na Figura 2. Sabendo-se que esse cabo tem um fator de velocidade $FV = 0,86$ determine:

(a) o comprimento total l desse cabo, a partir do atraso observado entre o pulso incidente e o refletido, observados em $z = 0$.

(b) o coeficiente de reflexão e a impedância de carga Z_L, sendo ela resistiva pura. Lembre que para uma carga resistiva em cabos sem dispersão o pulso refletido é dado simplesmente por $V^-(0,t) = \Gamma_L V^+(0, t - \Delta t)$, onde Δt é o atraso devido à propagação do sinal na linha de transmissão.

(c) esboce graficamente o que seria observado na tela do osciloscópio se a carga for substituida por $Z_L = 100\Omega$ e a largura do pulso incidente é aumentada para $\tau = 100$ns.

OBS.: Por simplicidade considere que a carga é um resistor ideal, ou seja, são constantes em relação à frequência. Além disso, despreze perdas no cabo (aproximação de linha de transmissão sem perdas).

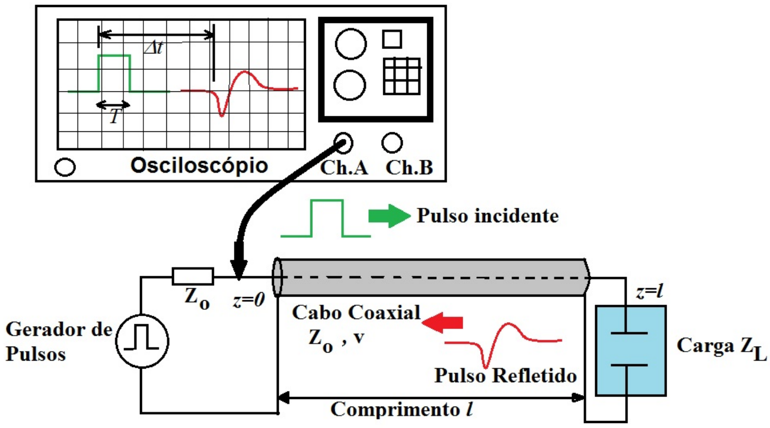

Figure 1: Esquema experimental proposto para a medida do pulso incidente e refletido na tela do osciloscópio.

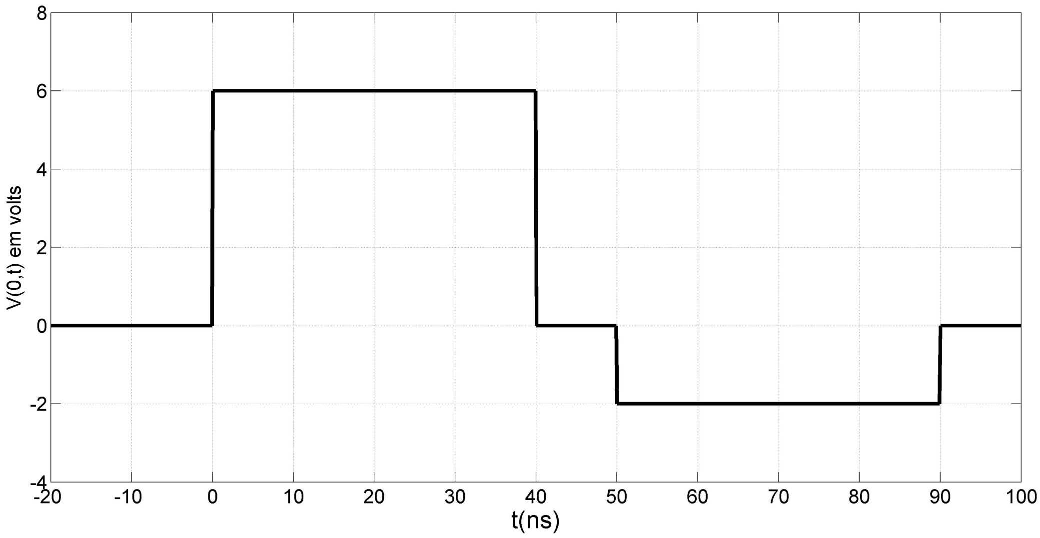

Figure 2: A situação experimental observada para um pulso incidente retangular de 40ns de largura temporal e amplitude 6volts. O pulso incidente e o pulso refletido são observados na tela do osciloscópio, em $z = 0$.

10) Um transmissor com impedância interna de 50ohms e operando na frequência de $13,56$MHz é conectado a uma carga Z_L através de um cabo coaxial de impedância característica $Z_0 = 50$ ohms, índice de refração do dielétrico que preenche-o internamente de valor $\varepsilon_r = 1,5$. A onda de tensão resultante no cabo é dada por:

$$V(z,t) = 10e^{i(\omega t - \beta z)} - (3+4i)e^{i(\omega t + \beta z)} \quad [volts] \ .$$

Por simplicidade vamos desprezar a atenuação no cabo. Determine:
a) O valor de β e o comprimento de onda λ nesse guia coaxial.
b) A onda de corrente $I(z,t)$ no guia.
c) O coeficiente de reflexão Γ_0 em $z = 0$, na forma módulo e fase.
d) A impedância de carga Z_L, se o cabo coaxial tem um comprimento $l = \lambda/3$ na frequência de

operação.

11) Os campos eletromagnéticos **E** e **B**, denominados intensidade de campo elétrico e vetor densidade de fluxo magnetico, respectivamente, podem ser calculados no regime variante no tempo através dos chamados potenciais eletromagnéticos ϕ (chamado de potencial escalar elétrico) e **A** (vetor potencial magnético). A relação entre os campos e os potenciais é dada abaixo:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \ , \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} \ , \end{aligned}$$

(a) Sabendo-se que a unidade de campo elétrico é o [V/m] no sistema internacional, faça a análise dimensional e determine as unidades de ϕ e **A**. Determine então a relação entre o tesla [T], que é a unidade de medida do vetor densidade de fluxo campo magnético **B**, e as unidades de **A**.

(b) Calcule o rotacional de **E** e relacione-o ao campo **B** e/ou suas derivadas.

(c) Considere uma forma específica para os potenciais ϕ e **A** em certa região do espaço, dados abaixo:

$$\begin{aligned} \phi(x,y,z,t) &= -100x + 100y, \\ \mathbf{A}(x,y,z,t) &= y\hat{\mathbf{a}}_x - x\hat{\mathbf{a}}_y - 200t\hat{\mathbf{a}}_z \ , \end{aligned}$$

onde t é o tempo medido em segundos e (x, y, z) são as coordenadas medidas em metros, enquanto os potenciais são medidos nas unidades determinadas no item (a), no SI. Determine o campo elétrico **E** e o campo magnético **B**.

12) Considere uma linha de transmissão de impedância característica $Z_0 = 75\Omega$ e fator de velocidade $F.V. = 50\%$. Em uma medida experimental, um gerador de sinais de impedância interna de 75Ω, com amplitude de pico de 5V e operando em regime senoidal na frequência f é conectado na entrada dessa linha, que tem sua terminaçao curto-circuitada. Medindo-se a tensão na entrada da linha em função da frequência f do gerador observa-se que os máximos de tensão ocorrem nas frequências $f = 500$MHz, 1500MHz e assim sucessivamente, enquanto que os mínimos são observados em 1000MHz, 2000MHz, etc. Determine:
a) O valor de β e o comprimento de onda λ nessa linha para as frequências $f = 500, 1000e1500$MHz.
b) O coeficiente de reflexão Γ_0 em $z = 0$ e também na carga Γ_L para a frequência de 500MHz.
c) O comprimento físico l da linha de transmissão.

13) Um gerador de pulsos de impedância interna $Z_g = 50\Omega$ é conectado a um cabo coaxial de 50Ω, $F.V. = 0,667$ e comprimento $l = 5$m. Na terminação desse cabo coaxial está conectada uma carga resistiva $Z_L = 150\Omega$. O gerador emite um pulso retangular de duração 100ns, amplitude de pico 100V (incidente no cabo). Considere a linha sem perdas e não dispersiva, por simplicidade, e esboce graficamente a onda de tensão $V(0,t)$ e de corrente $I(0,t)$ resultantes na entrada do cabo.

Lembre que para uma carga resistiva em cabos sem dispersão o pulso refletido é dado simplesmente por $V^-(0,t) = \Gamma_L V^+(0, t - \Delta t)$, onde Δt é o atraso devido à propagação do sinal na linha de transmissão.

14) Determine analiticamente, considerando que os condutores ideais, a capacitância e a indutância por unidade de comprimento, bem como a impedância característica e a velocidade de propagação de ondas eletromagnéticas nas seguintes linhas de transmissão:

(a) guia coaxial, com condutores de raios a e $b > a$ e dielétrico ε_r

(b) par de condutores paralelos no ar, raio dos condutores a e distância de centro a centro d.

(c) linha de microfita, construída sobre um substrato dielétrico ε_r de espessura d. A largura da trilha sobre o plano de terra vale w.

PARTE 2

15) Faça um resumo histórico da descoberta da Lei de Indução e da Lei de Ampère-Maxwell, explicando as motivações históricas que levaram a descoberta desses princípios físicos. Descreva o significado físico das equações de Maxwell na forma puntual ou diferencial:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \tag{7}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{8}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{9}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{10}$$

Observação: as relações constitutivas para meios materiais são

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \varepsilon \mathbf{E} \tag{11}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu \mathbf{H} \tag{12}$$

Faça as ilustrações que julgar importantes.

***16)** Encontre as equações de Maxwell na forma integral, a partir dos teoremas de Gauss e Stokes e das equações de Maxwell na forma puntual.

$$\oint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{A} \; dV \quad \text{(Teorema de Gauss)}$$

$$\oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{(Teorema de Stokes)}$$

Descreva o significado das equações na forma integral.

17) Mostre a partir da Lei de Ampère-Maxwell e da Lei de Gauss-Coulomb ($\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$), que a equação da continuidade é consequência das equações de Maxwell.

18) Obtenha no regime estático as leis da eletrostática e da magnetostática. Mostre que o campo eletrostático pode ser expresso na forma $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, onde ϕ é o potencial escalar elétrico. Por que isso é válido? Obtenha a equação de Poisson na Eletrostática.

19) O vetor densidade de fluxo magnético associado a um fio infinitamente longo transportando uma corrente I é dado por:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}\hat{\mathbf{a}}_\varphi$$

Mostre por um cálculo direto que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Mostre ainda que este campo satisfaz a Lei de Ampère, utilizando a forma integral.

20) Uma esfera de cargas no espaço livre é caracterizada por uma densidade de cargas volumétrica dada por:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0(1 - r^2/a^2) & r < a \\ 0 & r > a \end{cases}$$

sendo a o raio da esfera e ρ_0 uma constante. Encontre o vetor campo elétrico $\mathbf{E}$ para qualquer valor de r e calcule $\nabla \times \mathbf{E}$.

21) Um campo magnético é descrito em coordenadas cilíndricas por

$$B_z = B_0 \rho^2 t \cos(2\pi z/L)$$

$$B_\varphi = 0$$

Sabendo que não há variações em φ tanto no campo elétrico quanto no campo magnético, encontre as compontentes B_ρ e E_φ. Sugestão: Encontre B_ρ a partir da equação em divergência para o campo magnético, e o campo E_φ a partir da Lei de Faraday.

22) Dado o campo elétrico no vácuo $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$ e sabendo que $E_y = E_z = 0$, encontre a partir das equações de Maxwell o campo magnético $\mathbf{B}$. Escreva os campos na forma de fasores.

23) Resolver os seguintes Problemas do Capítulo 9 - Equações de Maxwell, do livro-texto Matthew N.O. Sadiku, Elementos do Eletromagnetismo, 3a. Edição: 9.1, 9.8, 9.19, 9.23, 9.33, 9.34.

24) Com base nos princípios físicos da lei de Faraday-Lenz projete um medidor de corrente que passa em um fio longo em regime de corrente alternada na frequência angular ω, monte o dispositivo e faça testes experimentais com o aparato desenvolvido.

25) Dado o teorema de Poynting na forma puntual:

$$\nabla \cdot \mathbf{S} + \frac{\partial u_{em}}{\partial t} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \tag{13}$$

onde

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \tag{14}$$

$$u_{em} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{\mu}\mathbf{B}^2\right) \tag{15}$$

dê o significado físico desta equação (explique o que representa cada termo desta equação) e através do teorema de Gauss encontre a forma integral da equação, também dando a descrição física para a forma integral.

Para uma fonte de energia puntual concentrada na origem, emanando uma quantidade de potência constante ao longo do tempo, podemos escrever:

$$\nabla \cdot \mathbf{S}_{med} = f(\mathbf{r}) \ , \tag{16}$$

onde $\mathbf{S}_{med}$ é o valor médio do vetor de Poynting e $f(\mathbf{r}$ é o valor médio de $-\frac{\partial u_{em}}{\partial t} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ no tempo. Qual é a forma integral de solução de $\mathbf{S}_{med}$? O que se espera para distâncias muito grandes em relação à origem, se a fonte $f(\mathbf{r})$ está localizada na origem e é pequena em relação à distância ao observador?