## UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR

Setor de Tecnologia Departamento de Engenharia Elétrica

## TE085 - Propagação

Prof. César Augusto Dartora

Trabalho Proposto No. 3

## Regras para a Realização do Trabalho:

I - Dos Grupos - Os grupos de trabalho poderão ser constituídos por até 4 integrantes;

II - Tema Proposto: - Difração na Aproximação Paraxial e Propagadores Numéricos Os mecanismos essenciais da difração estão contidos na equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = 0, (1)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador laplaciano,  $k=n\omega/c$  é o número de onda no meio,  $\omega$  é a frequência temporal, n é o índice de refração do meio e  $\Psi$  é um escalar que representa uma componente de campo elétrico ou magnético. Observa-se ainda que k relaciona-se ao comprimento de onda  $\lambda$  no meio através da relação  $k=2\pi/\lambda$ . Uma equação similar à (1) aplica-se também para ondas mecânicas, como o som, por exemplo, caracterizando a universalidade do fenômeno. Ao contrário da dispersão, que ocorre em meios cujas características dependam da frequência,  $n(\omega)$ , a difração deve ocorrer mesmo para vácuo.

Assumindo a propagação paraxial, propomos uma solução da forma abaixo:

$$\Psi(x, y, z) = \Phi(x, y, z)e^{-ikz} , \qquad (2)$$

que permite remover a variação rápida na direção z, se cada onda plana uniforme que compõe a função  $\Psi$  tiver vetor de onda  $\mathbf{k}$  com a componente  $k_z \approx k >> (k_x, k_y)$  e nesse a direção preferencial de propagação está no eixo z. É fácil demonstrar que:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z} - k^2 \Phi \right] e^{-ikz} ,$$

e uma vez que a variação rápida esteja contida no termo  $e^{-ikz}$  temos:

$$\left| \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right| << 2k \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right| ,$$

permitindo negligenciar a derivada de segunda ordem de  $\Phi$  em relação à variável z. Desse modo (1) toma a forma conhecida como **equação de propagação paraxial**:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{i}{2k} \nabla_{\perp}^2 \Phi , \qquad (3)$$

onde  $\nabla_{\perp}^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$  corresponde à parte transversal do operador laplaciano, dependendo somente das segundas derivadas em relação às variáveis (x, y). Definindo as transf. de Fourier conforme segue:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(k_x,k_y,z) e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dk_x dk_y , \qquad (4)$$

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, z) e^{ik_x x} e^{ik_y y} dx dy , \qquad (5)$$

e aplicar essas relações à equação (3). Observando as propriedades matemáticas das transformadas, é fácil ver que a seguinte substituição é possível:

$$\nabla_{\perp}^2 \to -(k_x^2 + k_y^2)$$

permitindo obter a equação abaixo:

$$\frac{d}{dz}\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \frac{i}{2k}(k_x^2 + k_y^2)\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) . \tag{6}$$

Dada a condição inicial  $\Phi(k_x, k_y, 0)$  encontrada a partir da distribuição espacial  $\Phi(x, y, 0)$  no plano z = 0 podemos escrever a solução da equação acima:

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) \exp\left[\frac{i}{2k}(k_x^2 + k_y^2)z\right] ,$$

e finalmente obtém-se o conjunto de equações que descreve a teoria conhecida com óptica de Fourier [2]:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) \exp\left[\frac{iz}{2k} (k_x^2 + k_y^2)\right] e^{-ik_x x} e^{-ik_y y} dk_x dk_y , \qquad (7)$$

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, y, 0) e^{ik_x x} e^{ik_y y} dx dy . \tag{8}$$

A solução  $\Psi(x,y,z) = \Phi(x,y,z)e^{-ikz}$  é uma superposição adequada de ondas planas uniformes,  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{-i(k_xx+k_yy+k_zz)}$  contendo diferentes vetores de onda  $\mathbf{k} = (k_x,k_y,k_z)$  de mesma frequência  $\omega$  e mesmo valor para o produto  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = k^2 = \omega^2\mu\varepsilon_c$  mas  $k_z \approx k >> k_x, k_y$  na aproximação paraxial. Uma vez que  $\Psi$  representa uma das componentes do campo elétrico:

$$\mathbf{E} = \Phi(x, y, z)e^{i(\omega t - kz)}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} , \qquad (9)$$

podemos determinar a densidade de potência dada pelo vetor de Poynting:

$$\mathbf{S}_{\text{med}} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\mathbf{E}|^2 \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\Phi(x, y, z)|^2 \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} . \tag{10}$$

Pede-se então:

a) Substituindo (8) em (7) demonstre que:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x', y', 0) \exp\left[\frac{ik}{2z} [(x - x')^2 + (y - y')^2]\right] dx' dy'$$
 (11)

Tome o cuidado de escrever (8) trocando a variável x por x' e y por y', ou seja:

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x', y', 0) e^{ik_x x'} e^{ik_y y'} dx' dy'$$

\*\*Integral gaussiana, útil no cálculo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 + bx + c} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-b^2/(4a) + c}$$

b) É possível em problemas de simetria cilíndrica circular, transformar as variáveis x, y, x', y' em (11), de tal forma que  $x = \rho \cos \varphi$  e  $y = \rho \sin \varphi$ ... O resultado final é:

$$\Phi(\rho, \varphi, z) = \frac{ik}{2\pi z} \int_{\rho'=0}^{\infty} \int_{\alpha=0}^{2\pi} \Phi(\rho', \alpha, 0) \exp\left[\frac{ik\rho\rho'\cos(\varphi - \alpha)}{z}\right] \rho' d\rho' d\alpha . \tag{12}$$

Para uma abertura circular de raio a colocada em z=0 e iluminada por um feixe laser de comprimento de onda  $\lambda$ , com onda incidente podendo ser considerada plana uniforme na abertura, ou seja,

$$\Phi(\rho', \alpha, 0) = E_0 \qquad \rho' \le a$$

$$\Phi(\rho', \alpha, 0) = 0 \qquad \rho' > a$$
(13)

determine, utilizando (12, a expressão para  $\Phi(\rho, \varphi, z)$  em qualquer z >> a. Integrais úteis:

$$\int_0^{2\pi} e^{\pm ix\cos y} dy = 2\pi J_0(x)$$

onde  $J_0$  é a função de Bessel de primeiro tipo de ordem 0.

$$\int x J_0(bx) dx = \frac{x J_1(bx)}{b}$$

- c) Determine, para uma distância da abertura  $z=L>>\lambda$ , tal que  $\tan\theta=\rho/z\approx\sin\theta$ , o valor de  $\sin\theta$  e portanto a relação  $\rho/z$  para o qual ocorre o primeiro mínimo da função  $\Phi(\rho,\varphi,z)$  obtida.
- d) Construa uma abertura circular (fenda circular) experimentalmente e faça a medida das distâncias  $\rho$  do primeiro mínimo (região escura) e dos próximos. O padrão resultante é conhecido como padrão de Airy, ou ainda discos de Airy (Airy pattern). Use fendas de dimensões da ordem de  $100\mu$ m e distâncias para as quais podem ser observados os efeitos difrativos serão da ordem de metros, a depender da dimensão da fenda. Use um laser vermelho, cujo comprimento de onda típico fica em torno de  $\lambda = 632$ nm.

Tratando essa fenda circular como uma antena de abertura, estime o ganho e o ângulo de abertura do feixe laser após passar pela abertura? Que tipo de problema similar ocorre em microondas?

e) ITEM OBRIGATÓRIO: Partindo da equação paraxial, descarte as derivadas em relação ao eixo y, ou seja, faça  $\Phi(x,y,z) = \Phi(x,z)$ , o que corresponde a um problema (1+1)D (uma dimensão longitudinal z e uma dimensão transversal x), escreva a solução geral do problema. No mundo real, quais situações físicas seriam descritas nesse caso?

Encontre a solução  $\Phi(x,z)$  para um campo inicialmente dado por um feixe gaussiano, ou seja,

$$\Phi(x,0) = Ae^{-x^2/(2x_0^2)} .$$

Qual é o espectro  $\tilde{\Phi}(k_x)$  nesse caso? O que representa  $x_0$  e qual sua relação com o espectro em  $k_x$ ? Qual é o comprimento de difração nesse caso, para o qual o feixe dobra a largura espacial?

f) ITEM OBRIGATÓRIO: Escreva um propagador numérico, discretizando o eixo transversal em diferenças finitas. Como é o operador  $d^2/dx^2$  na forma discreta? O código deve ser escrito em software MATLAB. Faça a propagação numérica do feixe gaussiano, utilizando  $\lambda=632$ nm e  $x_0=100\mu{\rm m}$ . Compare a função transversal com o valor teórico obtido no item anterior, no comprimento de difração. Quais são os cuidados que se deve ter com um método numérico que envolve equações diferenciais parciais?

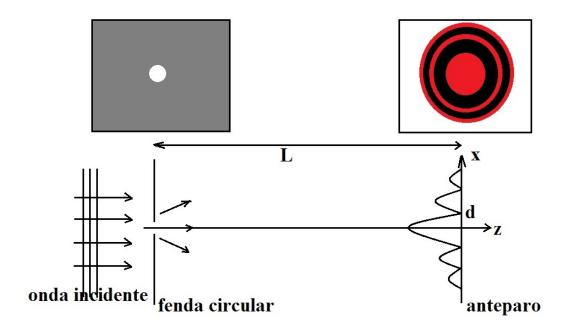


Figura 1: Experimento da Fenda Circular.

- III Conteúdo Mínimo: Fará parte do trabalho, além da construção experimental a apresentação de um relatório na forma de artigo científico que deverá conter: Título, Autores, Resumo, Introdução, Fundamentação Teórica, Resultados Obtidos e Conclusão, bem como Bibliografia utilizada, que deverá estar citada no decorrer do texto.
- IV Data da entrega: o artigo e apresentação do aparato experimental deverá ser entregue até as 9h:30min do dia 01/06/2016 Quarta-Feira.

Curitiba, 12 de Maio de 2015.

Prof. César Augusto Dartora