

# Aspectos gerais da teoria da difração sob o ponto de vista de um princípio de incerteza (General aspects of the theory of diffraction under the viewpoint of the uncertainty principle)

C.A. Dartora<sup>1</sup>, K.Z. Nobrega<sup>2</sup>, V.F. Montagner<sup>3</sup>, Armando Heilmann<sup>1</sup>  
e Horacio Tertuliano S. Filho<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

<sup>2</sup>Departamento de Eletro-Eletrônica, Centro Federal de Educação Tecnológica do Maranhão, São Luís, MA, Brasil

<sup>3</sup>Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, RS, Brasil

Recebido em 11/9/2008; Aceito em 18/12/2008; Publicado em 26/6/2009

Dá-se o nome difração a um conjunto de fenômenos de natureza inerentemente ondulatória caracterizado pelo encurvamento, alargamento espacial e interferência de ondas que podem ser ondas mecânicas (som, ondas de água), eletromagnéticas ou ondas de matéria no caso da mecânica quântica. Neste trabalho a difração é abordada sob o ponto de vista de um princípio de incerteza e da superposição e interferência de soluções de ondas planas.

**Palavras-chave:** fenômenos ondulatórios, difração, princípio de incerteza.

Diffraction is a set of inherently wave-like phenomena characterized by the bending, spreading and interference of waves which can be mechanical (sound included), electromagnetic or matter waves in quantum mechanics. In this paper we address the problem of diffraction under the viewpoint of uncertainty principle and superposition of plane waves and interference.

**Keywords:** wave phenomena, diffraction, uncertainty principle.

## 1. Introdução

A difração é um fenômeno de natureza inerentemente ondulatória e por isso governado pela equação de Helmholtz [1-5]. Para o caso da óptica escalar esta pode ser expressa conforme mostrado abaixo

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi = 0, \quad (1)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador laplaciano,  $k = n\omega/c$  é o número de onda no meio,  $\omega$  é a frequência temporal,  $n$  é o índice de refração do meio e  $\Psi$  é um escalar que representa uma componente de campo elétrico ou magnético. Observa-se ainda que  $k$  relaciona-se ao comprimento de onda  $\lambda$  no meio através da relação  $k = 2\pi/\lambda$ . Uma equação similar à (1) aplica-se também para ondas mecânicas, como o som, por exemplo, caracterizando a universalidade do fenômeno. Ao contrário da dispersão, que ocorre em meios cujas características dependam da frequência,  $n(\omega)$ , a difração deve ocorrer mesmo para vácuo, pois é um fenômeno de natureza espacial.

Da equação de Helmholtz e dos teoremas de Green é possível chegar a uma teoria de difração em forma

matematicamente rigorosa combinando o princípio de Huygens com a interferência[3]. O princípio de Huygens considera que cada ponto de uma abertura ou frente de ondas age como fonte puntual de ondas esféricas secundárias, permitindo explicar, por exemplo, o experimento de dupla fenda de Young, onde uma onda plana monocromática incide sobre um plano contendo duas aberturas ou fendas e produz uma figura de interferência sobre um anteparo colocado a uma certa distância da fenda. Este é um experimento clássico usualmente conhecido por estudantes de física e engenharia. Neste trabalho, ao invés de partir da teoria das funções de Green para a equação de Helmholtz com o objetivo de deduzir a equação geral da teoria de difração, considerar-se-á a difração sob o aspecto da superposição de ondas planas bem como fazer o uso do princípio de incerteza, inerente às transformadas de Fourier, para se chegar aos principais resultados e conclusões usualmente reportados na literatura.

Aceitando-se a teoria escalar de Huygens-Fresnel, torna-se possível manipular imagens alterando-se o seu espectro de frequências espaciais, ou seja, do ponto de

<sup>1</sup>E-mail: cadartora@eletrica.ufpr.br.

vista da óptica geométrica consiste em associar raios com diferentes direções de propagação através do vetor de onda  $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ . Em 1818, Augustin Fresnel combinou as idéias intuitivas de Christian Huygens e sua teoria ondulatória da luz de 1678 com o princípio de interferência de Young para produzir uma teoria ondulatória da óptica quantitativamente razoável. Evidentemente os trabalhos de Huygens e Fresnel são anteriores aos trabalhos fundamentais de J.C. Maxwell na teoria eletromagnética (1865) [7], então muitas considerações arbitrárias foram feitas, de modo a conciliar a teoria escalar com os fenômenos observados experimentalmente. Por outro lado, requer-se a solução exata das equações de Maxwell para a obtenção de resultados quantitativamente corretos em qualquer faixa do espectro eletromagnético. Fazer uma análise dos fenômenos com base em tais equações torna-se, entretanto, muito complexo, exceto em casos simétricos e com considerações de homogeneidade, isotropia, linearidade, etc. Felizmente, muitos cientistas entre 1880 e 1900, incluindo Kirchhoff, Rayleigh e Sommerfeld desenvolveram uma teoria da difração no domínio óptico bastante simplificada, onde o caráter vetorial da onda pode ser desprezado em primeira aproximação, e  $\Psi$  pode representar então a componente  $E_y$  do campo elétrico, por exemplo, caracterizando assim a difração escalar. Mais uma vez cabe ressaltar que essa teoria aplica-se também a outros tipos de ondas como o som. Para uma abertura qualquer, de superfície  $S'$ , iluminada por uma onda incidente  $\Psi(S')$ , a onda difratada será dada pela integral de Kirchhoff-Fresnel, que nada mais é do que a expressão matemática do princípio de Huygens

$$\Psi_{dif}(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \int_{S'} \Psi(S') \frac{e^{-ikR}}{R} dS' \quad (2)$$

onde  $\Psi(S') = \Psi(x', y', z' = 0)$  é a onda incidente na abertura colocada no plano  $z' = 0$ ,  $\exp(-ikR)/R$  é a expressão matemática para representar uma onda esférica e  $dS'$  indica um elemento diferencial de superfície na abertura. A abertura é justamente a parte do plano  $z' = 0$  que permite a transmissão de uma parte da onda incidente, e  $\Psi_{dif}(x, y, z)$  é a onda difratada, ou seja, a onda que se propaga para além da abertura. Os resultados dessa teoria são bastante satisfatórios e concordam bem com os experimentos.

Existem soluções da equação de Helmholtz (1) que não sofrem difração. São as chamadas ondas não-difrativas, e são na realidade soluções idealizadas, que somente se realizam de maneira aproximada na prática [6, 8-20]. O exemplo mais trivial é uma onda plana monocromática, que é solução natural da equação de Helmholtz em coordenadas cartesianas, fato bem conhecido. Outras soluções ditas não-difrativas podem ser obtidas em sistemas coordenados cilíndricos, como por exemplo o cilíndrico circular  $(\rho, \varphi, z)$  onde surgem os feixes de Bessel (soluções da equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas circulares) [6, 8-12, 14, 16-

20], e o elíptico-cilíndrico  $(u, v, z)$  onde surgem naturalmente os feixes de Mathieu [8, 13]. As ondas não-difrativas não são quadraticamente integráveis sobre a superfície plana transversal à direção de propagação e isso significa que uma quantidade infinita de energia é necessária para construí-las. Entretanto, elas são úteis na análise de problemas práticos, pois as soluções não-difrativas da equação de Helmholtz em um dado sistema de coordenadas formam uma base completa e ortogonal de funções, portanto qualquer solução pode ser representada na forma de uma superposição adequada de tais ondas não-difrativas. No sistema cartesiano essas funções são as ondas planas. No caso do Eletromagnetismo em um meio homogêneo e sem cargas livres, as ondas planas satisfazem as equações de Maxwell, que podem ser apresentadas no espaço  $(\mathbf{k}, \omega)$  da seguinte maneira

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H}, \quad (5)$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E}, \quad (6)$$

onde  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico,  $\mathbf{H}$  é o campo magnético,  $\mu$  é a permeabilidade magnética do meio,  $\varepsilon$  a permissividade dielétrica do meio,  $\omega$  a frequência angular da onda,  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{n}}$  é o vetor de onda e  $\hat{\mathbf{n}}$  é a direção de propagação da onda plana ( $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$ ). É fácil mostrar das equações acima que  $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon$ , e a solução geral de ondas planas uniformes para o campo elétrico pode ser escrita na forma

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp [i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \quad (7)$$

sendo  $\mathbf{E}_0$  um vetor de polarização ortogonal à direção  $\hat{\mathbf{n}}$ . No espaço livre  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$  formam uma tríade de vetores ortogonais. É claro que qualquer onda não-difrativa em um sistema cilíndrico arbitrário pode ser representada como uma superposição adequada de ondas planas.

Muito embora nas situações mais gerais seja necessário recorrer a uma integral de difração, escalar ou vetorial dependendo do caso, que permite solucionar a equação de Helmholtz quando conhecida a onda incidente em uma superfície arbitrária, o presente trabalho está restrito ao estudo da difração sob o ponto de vista da superposição e interferência de ondas planas, que não requer um conhecimento prévio da teoria de difração, mas permite encontrar alguns dos principais resultados da mesma. Considere, inicialmente, o par de transformadas de Fourier abaixo

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x) \exp(-ik_x x) dk_x, \quad (8)$$

$$F(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp(ik_x x) dx. \quad (9)$$

Das equações acima, sendo conhecida a largura espectral de  $F(k_x)$ ,  $\Delta k_x$ , então haverá uma incerteza na

posição de  $f(x)$ , ou largura espacial da função  $f(x)$ , que é dada por

$$\Delta k_x \cdot \Delta x \geq 1/2. \quad (10)$$

A desigualdade acima é conhecida na mecânica quântica como princípio de incerteza de Heisenberg, que nada mais é além de uma propriedade da transformada de Fourier.

Uma onda plana monocromática e uniforme não possui incerteza em  $\mathbf{k}$ , ou seja, a direção e sentido de propagação da onda são perfeitamente conhecidos e por isso não é possível localizar a onda plana, isto é,  $\Delta x \rightarrow \infty$  e ela deve existir em todo o espaço. Este resultado pode ser facilmente obtido da relação de incerteza, acima descrita. As ondas planas uniformes, embora fisicamente inconcebíveis, pois demandariam energia infinita, são importantes na descrição de vários fenômenos físicos uma vez que podem ser consideradas como o limite de uma onda esférica vista por um observador que encontra-se muito distante da fonte ( $r \rightarrow \infty$ ) e a curvatura da superfície esférica tende para zero, fazendo-a parecer um plano uniforme. Cabe ressaltar mais uma vez que qualquer onda eletromagnética pode ser representada por uma superposição adequada de ondas planas uniformes, que propagam-se em direções distintas e satisfazem o princípio de incerteza, acima mencionado.

Desta forma, imagine um feixe de laser vermelho usual onde a parte luminosa tem extensão finita, *i.e.*,  $\Delta x$  seria aproximadamente a largura da região luminosa. Nesse caso, necessariamente o feixe é uma composição de ondas planas propagando-se com vetores de onda  $\mathbf{k}$  em torno de um valor central  $\mathbf{k}_0 = k\hat{\mathbf{a}}_z$ , mas com uma incerteza  $\Delta \mathbf{k} = \delta k_x \hat{\mathbf{a}}_x + \delta k_z \hat{\mathbf{a}}_z$  em torno desse vetor, tal que  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \Delta \mathbf{k}$ . Veja a Fig. 1.

De maneira geral, uma onda monocromática de frequência  $\omega$  pode ser escrita através da superposição de ondas planas uniformes na forma abaixo

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_0(k_x, k_y, k_z) F(k_x, k_y, k_z) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d^3 \mathbf{k} \quad (11)$$

sendo  $d^3 \mathbf{k} = dk_x dk_y dk_z$ . Para resolver a integral acima deve-se impor a relação de dispersão,  $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$ , o que será feito através das funções delta de Dirac.

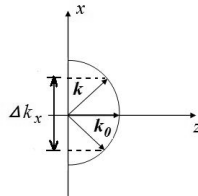


Figura 1 - Observe que para uma superposição de ondas planas e uniformes com um valor de  $|\mathbf{k}| = k$  constante, ou seja, uma onda monocromática, e vetores  $\mathbf{k}$  contidos no plano  $(x, z)$  centrados em torno de um valor  $\mathbf{k}_0 = k\hat{\mathbf{a}}_z$  haverá uma variação  $\Delta k_x$  para os valores possíveis de  $k_x$ , tal que  $k^2 = k_x^2 + k_z^2$ .

Agora, utilizando a Eq. (11) e o princípio de incerteza (10) será obtido o comprimento de difração de uma onda monocromática bidimensional no plano  $(x, z)$ , denotada por (1+1)D em coordenadas cartesianas. Para tanto será assumido que a onda não possui dependência na variável  $y$ , *i.e.*, não tenha componentes propagando-se ao longo do eixo  $y$  e por esta razão  $k_y = 0$ . Toda a análise a ser feita considera uma onda que não pode ser localizada em  $y$ , ou, em outras palavras, para todo e qualquer valor de  $y$  a situação é a mesma, mas isto não implica perda de generalidade dos resultados gerais.

Considerando-se ondas propagantes no sentido positivo do eixo  $z$ , ou seja,  $0 \leq k_z \leq k$ , pode-se inserir a função  $\delta(k_z - \sqrt{k^2 - k_x^2})$  na expressão (11) para assegurar que a condição  $k_x^2 + k_z^2 = k^2$  seja satisfeita, uma vez que  $k_y = 0$  e então tem-se como resultado

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i\omega t} \hat{\mathbf{a}}_y \int_{-k}^k F(k_x) e^{(-ik_x x)} e^{(-ik \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2}} z)} dk_x. \quad (12)$$

Assumindo uma polarização TE,  $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{a}}_y$ , pois nesta situação o vetor elétrico será ortogonal ao plano de incidência, podendo-se ainda considerar  $\mathbf{E}_0$  uma constante de integração. Observe que a onda obtida da equação acima é uma superposição de ondas planas que se propagam em  $+z$  mas não tem restrição no eixo  $x$  podendo propagar em  $+x$  ou  $-x$ .

Nesse momento, será considerada uma onda incidente em um meio sem perdas, cuja largura espacial  $\Delta x = x_0$  no plano  $z = 0$  seja muito maior que o comprimento de ondas ( $x_0 \gg \lambda$ ). Tal condição permite fazer com que os limites de integração na Eq. (12) sejam levados a  $\pm \infty$ , ou seja,  $k \rightarrow \infty$ . Utilizando-se o princípio de incerteza é fácil mostrar que

$$\Delta k_x \geq \frac{1}{2x_0}. \quad (13)$$

Uma vez que  $x_0 = N\lambda \gg \lambda$ , então necessariamente  $N \gg 1$  e  $\Delta k_x \ll k$ , de forma que a integral acima pode ser escrita como

$$\mathbf{E}(x, z, t) = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \hat{\mathbf{a}}_y \times \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x) e^{(-ik_x x)} e^{(i \frac{k_x^2}{2k} z)} dk_x \quad (14)$$

onde  $k \rightarrow \infty$  é consequência do fato de que  $\Delta k_x \ll k$ . A equação acima descreve o perfil transversal de uma onda à medida em que a mesma propaga-se ao longo do eixo  $z$  na chamada aproximação paraxial, ou seja,  $k_z \gg k_x$ . Na prática, o limite desta aproximação corresponde a um ângulo menor do que  $\approx 22^\circ$  entre os valores de  $\mathbf{k}$  e  $k_z$ . Tal consideração também é necessária para se encontrar o comprimento de difração de uma onda utilizando a teoria de difração usual.

A partir de agora serão considerados dois exemplos clássicos de ondas no plano inicial,  $z = 0$ : a onda gaus-

siana e a abertura retangular.

## 2. Onda Gaussiana

Se no plano inicial  $z = 0$  tem-se uma onda cuja amplitude transversal ao longo de  $x$  é uma função gaussiana  $f(x) = \exp[-x^2/(2x_0^2)]/\sqrt{2\pi}$ , então o espectro  $F(k_x)$  pode ser escrito na forma

$$F(k_x) = \exp\left(-\frac{k_x^2 x_0^2}{2}\right), \quad (15)$$

e a solução do campo elétrico  $\mathbf{E}$  para todo e qualquer  $z$  é obtida a partir da Eq. (14), sendo o resultado

$$\mathbf{E} = E_0 e^{i(\omega t - kz)} \hat{\mathbf{a}}_y \sqrt{\frac{2\pi}{x_0^2 - iz/k}} \times \exp\left[-\frac{x^2(1 + iz/(kx_0^2))}{2(x_0^2 + z^2/(k^2 x_0^2))}\right]. \quad (16)$$

A potência por unidade de comprimento  $y$  para esta onda pode ser dada pela integração da componente  $z$  do vetor de Poynting com respeito à coordenada transversal  $x$  ( $S_z \approx \sqrt{\varepsilon/\mu} |\mathbf{E}|^2/2$  para  $k_z \sim k$  e  $k_x \ll k_z$ )

$$W_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{E}|^2 dx$$

cujos valor é  $W_0 = \pi^{3/2} \sqrt{\varepsilon/\mu} |E_0|^2/x_0$  e independe de  $z$ , significando que mesmo sendo difratada, a energia total da onda permanece a mesma, uma vez que o meio considerado é não-dissipativo. Como será visto adiante com um pouco mais de detalhe, a onda difratada sofre um alargamento espacial no seu padrão de intensidade transversal, e ao mesmo tempo a amplitude máxima diminui à medida que a onda se propaga. O resultado é que combinando o alargamento espacial com a diminuição da amplitude máxima, a energia da onda se conserva. O mesmo não ocorreria em um meio com perdas onde a energia total seria perdida à medida que a onda se propaga, na forma  $W(z) = W_0 \exp[-2\alpha z]$ , sendo  $\alpha$  o coeficiente de extinção do campo.

Para o cálculo do comprimento de difração,  $L_{dif}$ , necessário para descrever o alargamento espacial, pode-se encontrar, a partir da Eq. (16), que a largura espacial dependente de  $z$ ,  $\Delta x(z)$  é descrita na forma abaixo

$$\Delta x(z) = \sqrt{x_0^2 + \frac{z^2}{k^2 x_0^2}}. \quad (17)$$

Define-se o comprimento de difração  $L_{dif}$  como a distância percorrida pela onda ao longo do eixo  $z$  para a qual a largura transversal ao longo de  $x$  dobra, ou seja,  $\Delta x(z = L_{dif}) = 2x_0$ , resultando para o caso da gaussiana no valor abaixo

$$L_{dif} = 2\pi\sqrt{3} \frac{x_0^2}{\lambda}. \quad (18)$$

A relação acima mostra que quanto mais estreito é o feixe inicial em comparação com o comprimento de onda, mais rapidamente será difratado. Para um feixe de laser de 632.8 nm (vermelho), e com  $x_0 = 0.5$  mm, a largura transversal do feixe dobra de valor em uma distância de aproximadamente 4 m. Um feixe de laser comum geralmente apresenta simetria cilíndrica e o cálculo aqui realizado para definir  $L_{dif}$  considerou uma situação bidimensional ( $x, z$ ). Todavia, o resultado para a ordem de grandeza de  $L_{dif}$  se aplica. Pode-se demonstrar esse mesmo resultado a partir do princípio de incerteza, agora relacionando  $\Delta z$  e  $\Delta k_z$ . Esta relação está para a relação de incerteza na energia,  $\Delta E \cdot \Delta t$ , na mecânica quântica. Seja então

$$\Delta z \cdot \Delta k_z \geq \frac{1}{2}, \quad (19)$$

significando que quando há uma incerteza em  $k_z$  a distância percorrida em  $z$  sem que a onda sofra uma alteração significativa em seu padrão de distribuição de campo transversal será a distância  $\Delta z$ , associada ao comprimento de difração  $L_{dif}$ . Analogamente, havendo uma incerteza  $\Delta E$  na energia de um sistema físico o estado físico inicial deve decair a outros estados dentro de um intervalo de tempo  $\Delta t$ , perdendo assim a correlação com o estado inicial. No problema da difração que está sendo aqui tratado,  $\Delta k_z$  corresponde a  $\Delta E$  e  $\Delta z$  corresponde a  $\Delta t$ .

Da relação de incerteza em  $\Delta z$  tem-se

$$\Delta z \geq \frac{1}{2\Delta k_z}$$

mas como  $k_x^2 \ll k^2$  tem-se

$$k_z = k \sqrt{1 - \frac{k_x^2}{k^2}} \approx k - \frac{k_x^2}{2k},$$

e portanto

$$\Delta k_z = k_z^{max} - k_z^{min} = k - k_z^{min} \approx \max\left[\frac{k_x^2}{2k}\right].$$

Observe que  $\max[k_x] = \Delta k_x/2$  e utilizando a Eq. (13) pode-se ver facilmente que  $\max[k_x^2] \geq 1/(16x_0^2)$ , de onde finalmente obtemos

$$\Delta z \approx 32\pi \frac{x_0^2}{\lambda} \sim L_{dif} \quad (20)$$

Comparando a equação acima com o valor de  $L_{dif}$  encontrado pela expressão (18), observa-se que não há total concordância dos valores, entretanto nota-se que em ambas as expressões a perda de correlação com o perfil inicial depende, em ordem de grandeza, do valor  $x_0^2/\lambda$ . Mesmo assim os resultados ainda são relevantes pois quando não é possível resolver as integrais de maneira analítica ainda assim é possível determinar rapidamente a ordem de grandeza do comprimento

de difração. As discrepâncias entre os valores decorrem das definições utilizadas para a largura espacial do feixe. Finalmente, cabe destacar que a última desigualdade representa o maior comprimento de  $L_{dif}$  possível, e portanto, espera-se na prática que o valor seja sempre menor que o valor calculado.

### 3. Abertura retangular

Considere aqui uma abertura retangular, que permite a passagem da onda apenas por uma fenda de largura  $d = 2x_0$  sobre o eixo  $x$ , mas com comprimento muito maior sobre o eixo  $y$ , isto é,  $y \gg d$ , tal que a aproximação bidimensional se aplica e por isso mesmo a função espectral é mostrada abaixo

$$F(k_x) = \frac{2 \sin k_x x_0}{\pi k_x}. \quad (21)$$

Inserindo-se a expressão acima na Eq. (14) obtém-se a solução analítica

$$\mathbf{E} = E_0 \hat{\mathbf{a}}_y \left[ \text{Erf} \left( \frac{(1+i)(x+x_0)}{2\sqrt{z/k}} \right) - \text{Erf} \left( \frac{(1+i)(x-x_0)}{2\sqrt{z/k}} \right) \right] \quad (22)$$

onde a função  $\text{Erf}(X)$  é a função Erro definida abaixo

$$\text{Erf}(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^X e^{-x^2} dx.$$

É claro que a expressão acima pode ser melhor interpretada evidenciando-se o comportamento assintótico. Tal comportamento da Eq. (22) para  $z \ll x_0^2/\lambda$  é dado por

$$\mathbf{E} \approx E_0 \hat{\mathbf{a}}_y [\text{Sign}(x+x_0) - \text{Sign}(x-x_0)], \quad (23)$$

onde  $\text{Sign}(X) = 1(-1)$  para  $X > 0(< 0)$ , o que significa que para distâncias curtas em comparação com o comprimento de difração característico a semelhança da onda propagada com a onda na abertura (onda inicial) é quase total, enquanto que para  $z \gg x_0^2/\lambda$  obtém-se uma expressão aproximada na forma

$$\mathbf{E} \approx E_0 \hat{\mathbf{a}}_y \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{\sin(2\pi x_0 \sin \theta / \lambda)}{(2\pi x_0 \sin \theta / \lambda)}, \quad (24)$$

sendo  $\sin \theta \approx \tan \theta = x/z$ . Este resultado é bem conhecido da teoria da difração, produzindo o padrão de interferências característico do experimento da fenda simples. Cabe observar que o fator de decaimento do campo com  $\sqrt{z}$  decorre do fato de a situação ser considerada bidimensional ( $x, z$ ), ou invariante em  $y$ . No caso tridimensional o fator correto dependeria de  $z$  e

não de  $\sqrt{z}$ . Observe que os valores de máxima intensidade da onda dependem do ângulo  $\theta$ , de tal forma que o primeiro valor de máxima ocorre em  $\theta = 0$  e os outros para

$$\sin \theta = (2m+1) \frac{\lambda}{4x_0} = (2m+1) \frac{\lambda}{2d},$$

com  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Para  $m = 0$  obtém-se o valor  $\sin \theta = \frac{\lambda}{2d}$ , o que permite através da medida o ângulo  $\theta$  formado entre o primeiro e o segundo máximo e da largura da abertura  $d$ , determinar o comprimento de onda  $\lambda$ .

Para ilustrar o fenômeno de difração por uma fenda, considere as Figs. 2 e 3, onde é possível verificar a propagação da onda difratada. Neste exemplo utilizamos os valores de comprimento de ondas  $\lambda = 632.8$  nm e largura da fenda  $x_0 = 100$   $\mu\text{m}$ , substituindo a Eq. (21) na Eq. (14) e fazendo a integração numérica desta última expressão. A Fig. 2 mostra o perfil transversal da densidade de potência associada ao campo,  $S = |\mathbf{E}|^2 / (2\eta) = |\psi|^2$ , onde pode-se observar o bem conhecido fenômeno de interferência à medida que a onda difratada pela fenda se propaga, estudado na teoria da difração, através das franjas de interferência. A Fig. 3 traz uma comparação entre densidade de potência  $S = |\psi|^2 \propto |\mathbf{E}|^2$  obtida através da aproximação (24) para longas distâncias e o perfil de campo calculado através da Eq. (14) de maneira numérica, em função de  $x$ , para uma distância propagada  $z = 5x_0^2/\lambda \approx 8$  cm. Aqui fica nítido o perfil de interferência. Note também que a aproximação (24) é muito boa na região de grandes distâncias, usualmente denominada zona de Fraunhofer.

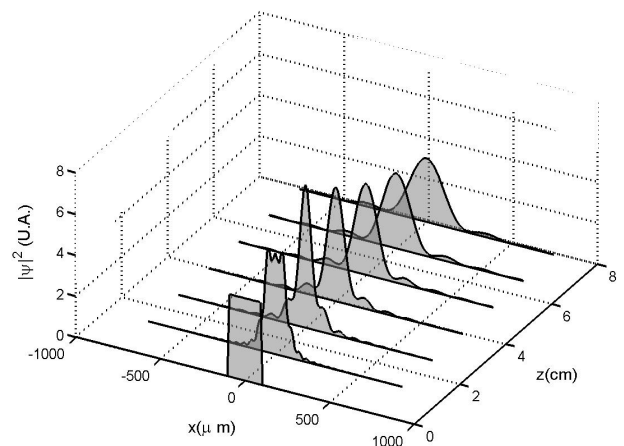


Figura 2 - Perfil transversal da densidade de potência  $S = |\psi|^2$ , em unidades arbitrárias, à medida em que a onda difratada se propaga. Foram utilizados os valores  $\lambda = 632.8$  nm e  $x_0 = 100$   $\mu\text{m}$ . Observe que para grandes distâncias formam-se as franjas de interferência.



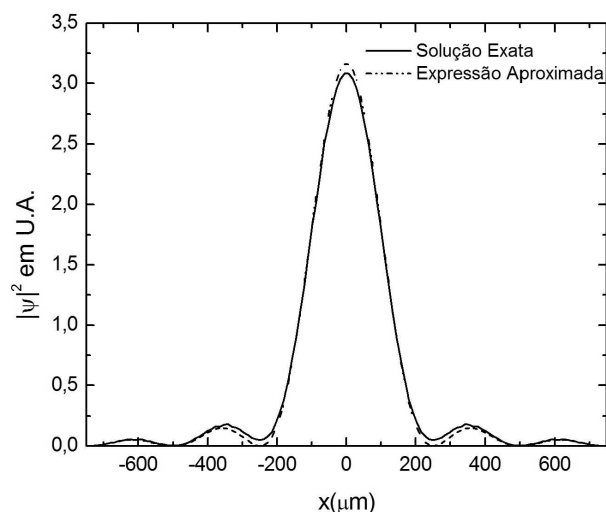


Figura 3 - Comparação entre a densidade de potência calculada com a expressão aproximada (24) e com o perfil de campo calculado através de (14) em função de  $x$ , para uma distância propagada  $z = 5x_0^2/\lambda \approx 8\text{cm}$ .

#### 4. Conclusão

Com base na superposição de ondas planas, a transformada de Fourier e o princípio de incerteza, neste trabalho foi apresentada uma maneira mais simples para descrever o fenômeno da difração, possibilitando ao estudante uma compreensão qualitativa da física de tal fenômeno, sem precisar recorrer ao formalismo matemático de funções de Green. Torna-se fácil entender que a difração é um fenômeno ondulatório de natureza espacial decorrente da propagação de grupos de ondas planas uniformes com diferentes direções de propagação. À medida em que se propagam, essas ondas planas interferem entre si gerando uma redistribuição da energia no espaço, de tal forma que a largura espacial inicial do feixe aumenta, caracterizando assim o chamado comprimento de difração, aqui relatado através de dois exemplos clássicos: o feixe gaussiano e a abertura retangular.

#### Referências

- [1] M. Born e E. Wolf, *Principles of Optics* (Pergamon Press, Nova York, 1980).
- [2] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill, Nova York, 1996).
- [3] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley & Sons, Nova York, 1998).

- [4] O.S. Heavens and R.W. Ditchburn, *Insight into Optics* (John Wiley, Chichester, 1991).
- [5] J.M. Stone, *Radiation and Optics* (McGraw-Hill, Nova York, 1963).
- [6] J. Durnin, J.J. Miceli Jr. and J.H. Eberly, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 1499 (1987); J. Durnin, *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 651 (1987).
- [7] J.C. Maxwell, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **155**, 459 (1865); J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism* (Dover, New York, 1991), v. 1 and 2 (a primeira edição dos dois volumes desta obra foi publicada no ano de 1873).
- [8] C.A. Dartora, M. Zamboni-Rached, K.Z. Nobrega, E. Recami and H.E. Hernández-Figueroa, *Opt. Comm.* **222**, 75 (2003).
- [9] J. Turunen, A. Vasara and A.T. Friberg, *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 282 (1991); M. Honkanen and J. Turunen, *Optics Communications* **154**, 368 (1998); J. Tervo and J. Turunen, *Optics Communications* **192**, 13 (2001).
- [10] A.T. Friberg, A. Vasara and J. Turunen, *Phys. Rev. A* **43**, 7079 (1991).
- [11] M. Erdelyi, Z.L. Horvath, G. Szabo, Zs Bor, F.K. Tittel, J.R. Carvalho and M.C. Smayling, *J. Vac. Sci. Technol. B* **15**, 287 (1997).
- [12] Pamela L. Greene and Dennis G. Hall, *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 3020 (1998); P.L. Overleft and C.S. Kenney, *J. Opt. Soc. Am. A* **8**, 732 (1991).
- [13] J. Roger-Salazar, G.H.C. New, S. Chavez-Cerda, *Opt. Comm.* **190**, 117 (2001); J.C. Gutierrez-Vega, M.D. Iturbe-Castillo and S. Chavez-Cerda, *Opt. Lett.* **25**, 1493 (2000).
- [14] J. Salo, J. Fagerholm, A.T. Friberg and M.M. Salomaa, *Phys. Rev. E* **62**, 4261 (2000).
- [15] C.A. Dartora and H.E. Hernandez-Figueroa, *J. Opt. Soc. Am. A* **21**, 662 (2004); C.A. Dartora, K.Z. Nobrega, H.E. Hernandez-Figueroa and E. Recami, *Opt. Comm.* **229**, 99 (2004).
- [16] Z. Bouchal, *Opt. Lett.* **27**, 1376 (2002); Z. Bouchal and J. Wagner, *Opt. Commun.* **176**, 299 (2000).
- [17] J. Rosen and A. Yariv, *Opt. Lett.* **19**, 843 (1994).
- [18] R. Piestun, B. Spektor and J. Shamir, *J. Mod. Opt.* **43**, 1495 (1996).
- [19] C.A. Dartora, K.Z. Nobrega, Alexandre Dartora and H.E. Hernandez-Figueroa, *Opt. Comm.* **249**, 407 (2005).
- [20] M. Zamboni-Rached, *Optics Express* **12**, 4001 (2004) (para uma versão ampliada veja M. Zamboni-Rached, E. Recami and H.E. Hernandez-Figueroa, *J. Opt. Soc. Am. A* **22**, 2465 (2005)).