TE814-Comunicações Ópticas I

Parte 2: Propagação de Ondas e a Fibra Óptica - Análise Modal

Prof. César Augusto Dartora - UFPR

E-mail: cadartora@eletrica.ufpr.br

Curitiba-PR

Roteiro da Aula:

- Equações de Maxwell e a Decomposição Transverso-Longitudinal
- Análise Modal em Guias de Ondas Dielétricos e a Fibra Óptica
- Modos LP e a Condição Monomodo

1 Equações de Maxwell e a Decomposição Transverso-Longitudinal

$\rightsquigarrow$ Consideremos como ponto de partida as equações de Maxwell no domínio da frequência, em meios dieletricos não-magnéticos, na forma abaixo:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \,, \tag{1}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \,, \tag{2}$$
$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0 \mathbf{H} \,, \tag{3}$$
$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega \mathbf{D} \,, \tag{4}$$
$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 n^2(\omega)\mathbf{E} \,, \tag{5}$$

onde $\mathbf{E}$ é o vetor campo elétrico em $[\mathrm{V/m}]$ e $\mathbf{H}$ é o vetor campo magnético em $[\mathrm{A/m}]$, e a função adimensional $n(\omega)$ é o índice de refração do meio, que geralmente depende da frequência ω.

$\rightsquigarrow$ Em geral, $n(\omega)$ é uma função também das coordenadas, ou seja, $n = n(\omega, \mathbf{x})$. Nesse caso o meio é dito não-homogêneo.

$\rightsquigarrow$ Pode também ser uma função dos campos eletromagnéticos aplicados, $n = n(\omega, \mathbf{E}, \mathbf{H})$: nesse caso estaríamos operando em regime não-linear. Aqui em princípio desconsideraremos esses efeitos.

$\rightsquigarrow$ Pode ainda não ter o mesmo valor em todas as direções do espaço, isto é, o meio é anisotrópico, devendo n ser representada por um tensor. Este caso leva à ocorrência de birrefringência. Vamos em primeira abordagem também negligenciar esse fato.

$\rightsquigarrow$ Estamos considerando portanto meios lineares e isotrópicos.

$\rightsquigarrow$ Vamos ainda considerar $n(\omega, \mathbf{x})$ uma função constante por regiões do espaço. É o caso da fibra óptica de índice degrau.

$\rightsquigarrow$ Para trabalhar com as equações de Maxwell conforme apresentadas anteriormente em meios com índice de refração linear, isotrópico e constante por partes devemos utilizar as denominadas *Condições de Contorno*:

Consideremos a interface entre dois meios de índices de refração n_1 e n_2, nesse caso:

$$D_{1\perp}|_S = D_{2\perp}|_S \ , \tag{6}$$
$$B_{1\perp}|_S = B_{2\perp}|_S \ , \tag{7}$$
$$E_{1\parallel}|_S = E_{2\parallel}|_S \ , \tag{8}$$
$$H_{1\parallel}|_S = H_{2\parallel}|_S \ , \tag{9}$$

Interpretamos as equações acima da seguinte forma:

$\rightsquigarrow$ As componentes de $\mathbf{D}$ e $\mathbf{B}$ normais à superfície de interface S devem ser contínuas na interface.

$\rightsquigarrow$ As componentes de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ tangenciais à superfície de interface S devem ser contínuas na interface. Na prática somente esta condição será necessária.

A Decomposição Transversal-Longitudinal

$\rightsquigarrow$ Todo o guia de ondas produz o confinamento da densidade de potência da onda eletromagnética a uma certa região do espaço, dando um caminho (eixo) preferencial para a propagação da mesma.

$\rightsquigarrow$ Vamos denotar este eixo por z, sendo este em geral o eixo de simetria de translação espacial e inversão. Ou seja, todo plano z é equivalente a um plano $-z$, ou ainda, a propagação ou contra-propagação são equivalentes (exceto casos particulares). Já a simetria de translação implica que qualquer plano z e outro transladado para $z+z_1$ são equivalentes (a seção transversal do guia é invariante!).

$\rightsquigarrow$ Denotaremos as coordenadas transversais por $\mathbf{x}_\perp = (x_1, x_2)$. Existem muitos sistemas ditos cilíndricos, sendo os mais conhecidos o retangular $\mathbf{x}_\perp = (x, y)$ e o circular $\mathbf{x}_\perp = (\rho, \varphi)$.

$\rightsquigarrow$ Fazendo uso da simetria, qualquer vetor e também o operador ∇ podem ser decompostos na forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp + A_z \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}$$

$$\nabla = \nabla_\perp + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}$$

$\rightsquigarrow$ Considerando apenas funções de onda propagantes:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E_z \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}_\perp) e^{i(\omega t - \beta z)} \ , \tag{10}$$

sendo β uma função de ω em geral e a mesma forma para $\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + H_z \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}$, temos:

$$\frac{\partial}{\partial z} \rightarrow -i\beta \ .$$

Observe que:

$$\mathbf{E}_\perp = \mathbf{E}_{\perp 0}(\mathbf{x}_\perp) e^{i(\omega t - \beta z)} \ ,$$
$$E_z = E_{0z}(\mathbf{x}_\perp) e^{i(\omega t - \beta z)} \ .$$

Através de um procedimento um tanto tedioso mas bem conhecido podemos mostrar facilmente que:

$$(\nabla_\perp^2 + k_\perp^2)E_z = 0 \ , \tag{11}$$
$$(\nabla_\perp^2 + k_\perp^2)H_z = 0 \ , \tag{12}$$

onde $\nabla_\perp^2$ é o laplaciano transverso e a constante transversa $k_\perp$ satizfaz uma relação de dispersão da forma:

$$k_\perp^2 = k_0^2 n^2 - \beta^2 \tag{13}$$

sendo os campos transversos dados por:

$$\mathbf{E}_\perp = \frac{-i\beta}{k_0^2 n^2 - \beta^2}\left[\nabla_\perp E_z + \frac{\omega\mu_0}{\beta}\nabla_\perp H_z \times \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}\right] \ , \tag{14}$$
$$\mathbf{H}_\perp = \frac{-i\beta}{k_0^2 n^2 - \beta^2}\left[\nabla_\perp H_z - \frac{\omega\varepsilon_0 n^2}{\beta}\nabla_\perp E_z \times \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z}\right] \ , \tag{15}$$

$\rightsquigarrow$ Observe-se que os campos transversos, aqueles que formalmente transportam a energia ao longo do eixo z uma vez que a componente z do vetor de Poynting é dada por:

$$S_z = \mathbf{S}_{med} \cdot \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\mathbf{E}_\perp \times \mathbf{H}_\perp^*\right) \cdot \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{z} \ ,$$

podem ser calculados diretamente das componentes longitudinais H_z e E_z.

$\rightsquigarrow$ É interessante expressar os operadores transversos nos dois principais sistemas de coordenadas:

Coordenadas cartesianas:

$$\nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y} \ .$$

$$\nabla_\perp^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ .$$

Coordenadas cilíndricas circulares:

$$\nabla_\perp = \hat{\mathbf{a}}_\rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \hat{\mathbf{a}}_\varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi} \ .$$

$$\nabla_\perp^2 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \ .$$

Conceitos Fundamentais sobre Análise Modal

Antes de prosseguirmos com as demonstrações matemáticas, é importante definir alguns conceitos fundamentais:

Modos: os modos são todas as possíveis soluções das equações de Maxwell sujeitas às condições de contorno impostas pelo guia de ondas. Do ponto de vista físico, correspondem às possíveis distribuições do campo eletromagnético e respectiva polarização no interior do guia. Em geral, existem modos contínuos e modos discretos, correspondendo às possíveis soluções.

$\rightsquigarrow$ Qualquer campo eletromagnético no interior de um guia de ondas pode ser expresso como superposição de modos, assim como qualquer sinal periódico pode ser escrito na forma de uma série de Fourier. Nesse sentido os modos eletromagnéticos de um guia de ondas são as funções de base num espaço vetorial abstrato, permitindo expandir qualquer função nessa base de funções:

$$\mathbf{E} = \sum_m A_m E_m(\mathbf{x}_\perp) e^{i(\omega t - \beta_m z)}$$

Tipos de Modos

A) Quanto ao caráter vetorial:

Modos TEM

Modos TE

Modos TM

Modos EH e HE ou Híbridos

Modos LP

B) Quanto à constante β: (considerando-se meios sem perdas!!)

Se $\beta = \beta^*$, ou seja, β real com soluções discretas o modo é dito MODO PROPAGANTE.

Se $\beta = -\beta^*$, ou seja, β imaginário puro, o modo é dito EVANESCENTE.

Para $\beta = \beta^*$ existe ainda um contínuum de soluções que não são guiadas, mas propagam-se para fora do guia denominadas MODOS DE RADIAÇÃO.

Para β complexo existem ainda soluções denominadas MODOS DE VAZAMENTO (LEAKY MODES).

Em uma fibra óptica os MODOS PROPAGANTES são ainda separados em MODOS DO NÚCLEO e MODOS DE CASCA.

Definição - Frequência de Corte $\omega_c = 2\pi f_c$: é a frequência mínima para a qual um modo passa a ser propagante, ou é aquela na qual $\beta = 0$ e acima da qual ocorre propagação.

É convencional agrupar as frequências de corte para os modos ditos propagantes em uma sequência crescente:

$$f_0 < f_1 < f_2 < f_3 < ...$$

$\rightsquigarrow$ Modo Fundamental ou Modo Dominante é aquele que possui a menor frequência de corte dentre todos. Nesse caso f_0.

$\rightsquigarrow$ Modos Superiores são os outros modos capazes de se propagar.

Propagação MONOMODO: somente o modo fundamental se propaga na frequência de operação f, ou seja, ocorre na condição

$$f_0 < f < f_1 \ .$$

Propagação MULTIMODO: além do modo fundamental pelo menos mais um modo é capaz de propagar-se na frequência de operação f, ou seja,

$$f > f_1 \ .$$

Análise Modal em Guias Dielétricos e a Fibra Óptica

Embora existam uma infinidade de geometrias possíveis para guias de ondas dielétricos, vamos aqui utilizar a teoria da decomposição transverso-longitudinal em duas situações:

$\rightsquigarrow$ o guia dielétrico do tipo SLAB simétrico, situação simplificada que auxilia na compreensão de características de dispositivos ópticos como filtros, lasers etc, usualmente construídos em forma de óptica integrada.

$\rightsquigarrow$ a fibra óptica, que é o elemento essencial das comunicações ópticas, permitindo a comunicação de dados a longas distâncias com atenuações menores que 0.2dB/km.

$\rightsquigarrow$ a situação do guia SLAB assimétrico é deixada como um exercício de relativa complexidade.

O guia SLAB simétrico

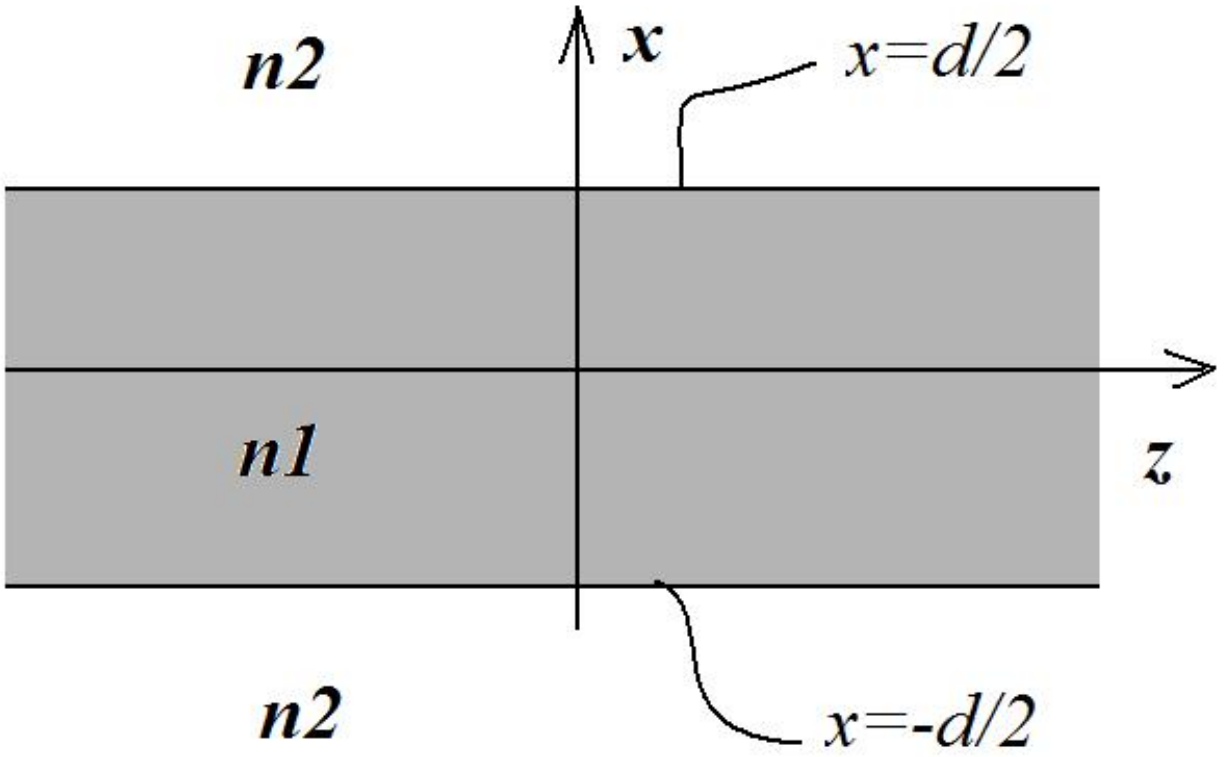

Figure 1: O Guia Slab Simétrico: $n_1 > n_2$.

$\rightsquigarrow$ Sendo $n_1 > n_2$ desejamos ondas que fiquem confinadas entre $x = -d/2$ e $x = d/2$ e se propagem ao longo do eixo z. Observe que não há variações do perfil de índice de refração em relação à variável y. Isso significa que não há variações em y. Na prática essa situação se realiza quando a dimensão d é muito menor do que um comprimento representativo da profundidade y.

$\rightsquigarrow$ Se a onda deve ser propagar confinada à região de índice de refração n_1 observemos que a constante de propagação β na direção z deve respeitar os seguintes limites:

$$k_0 n_2 \leq \beta \leq k_0 n_1 \ , \tag{16}$$

sendo $k_0 = 2\pi/\lambda_0$.

$\rightsquigarrow$ Para utilizarmos a teoria da decomposição transverso-longitudinal devemos resolver a equação de ondas para E_z e H_z, determinar os campos transversos e aplicar as condições de contorno apropriadas.

Equação de Ondas a ser Resolvida:

$$\nabla_\perp^2 \psi + (k_0^2 n^2 - \beta^2)\psi = 0$$

sendo ψ o campo E_z ou H_z.

$\rightsquigarrow$ Observe que não há variações y e portanto $\nabla_\perp^2 = \partial^2/\partial x^2$. Além disso $n = n_1$ na região $-d/2 \leq x \leq d/2$, e $n = n_2$ para $|x| > d/2$.

$\rightsquigarrow$ Portanto $(k_0^2 n_1^2 - \beta^2) > 0$ na região de índice n_1 e $(k_0^2 n^2 - \beta^2) < 0$ na região de índice n_2, se assumirmos que a condição de guiamento para β é satisfeita.

Vamos fazer as seguintes definições:

$$p^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 \ , \tag{17}$$
$$q^2 = \beta^2 - k_0^2 n_2^2 \ . \tag{18}$$

Temos as equações a serem resolvidas:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + p^2 \psi = 0 \ , -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2} \ , \tag{19}$$
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - q^2 \psi = 0 \ , |x| > \frac{d}{2} \ . \tag{20}$$

A solução é dada por:

$$\psi = A\cos(px) + B\sin(px) \ , \ , -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2} \ , \tag{21}$$
$$\psi = Ce^{-qx} + De^{qx} \ , |x| > \frac{d}{2} \ . \tag{22}$$

$\rightsquigarrow$ As ondas guiadas devem ficar concentradas na região n_1. Também por razões físicas observe que $e^{-qx} \to \infty$ para $x \to -\infty$ e $e^{qx} \to \infty$ para $x \to \infty$ e portanto a constante C deve ser nula para $x < -d/2$ e $D = 0$ na região $x > d/2$.

Portanto temos:

$$\psi = De^{qx} \ , x < -\frac{d}{2} \ , \tag{23}$$

$$\psi = A\cos(px) + B\sin(px) \ , -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2} \ , \tag{24}$$

$$\psi = Ce^{-qx} \ , x > \frac{d}{2} \ . \tag{25}$$

$\rightsquigarrow$ O guia SLAB admite soluções TE e soluções do tipo TM:

$\rightsquigarrow$ Modos TE - Nesse caso $\psi = H_z$ e $E_z = 0$;

$\rightsquigarrow$ Modos TM - Nesse caso $\psi = E_z$ e $H_z = 0$.

$\rightsquigarrow$ Dentro dos modos TE ou TM podemos ainda separar as soluções em soluções pares se $A = 0$, ou ímpares se $B = 0$.

$\rightsquigarrow$ A paridade está relacionada com os campos transversos! Por isso a solução para tem $A = 0$, uma vez que o campo transverso é obtido da derivada da solução para ψ!!

$\rightsquigarrow$ Vamos nos restringir à análise dos modos TE. A solução dos modos TM é deixada como exercício.

Análise dos MODOS TE ($\psi = H_z$)

$$H_z = De^{qx}e^{i(\omega t-\beta z)}\ , \qquad x < -\frac{d}{2}\ , \tag{26}$$

$$H_z = [A\cos(px)+B\sin(px)]e^{i(\omega t-\beta z)}\ , \ -\frac{d}{2}\leq x \leq \frac{d}{2}\ , \tag{27}$$

$$H_z = Ce^{-qx}e^{i(\omega t-\beta z)}\ , \qquad x > \frac{d}{2}\ . \tag{28}$$

A partir das expressões para $\mathbf{E}_\perp$ e $\mathbf{H}_\perp$ temos:

$$E_y = \frac{i\omega\mu}{k_0^2 n^2-\beta^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}\ , \tag{29}$$

$$H_x = \frac{-i\beta}{k_0^2 n^2-\beta^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}\ , \tag{30}$$

Temos agora que avaliar os modos TE pares $(A=0)$ e modos TE ímpares $(B=0)$.

MODOS TE Pares
Sendo $A = 0$ temos:

$$H_z = \quad De^{qx}e^{i(\omega t-\beta z)} \ , \quad x < -\frac{d}{2} \ , \tag{31}$$

$$H_z = \ B\sin(px)e^{i(\omega t-\beta z)} \ , \ -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2} \ , \tag{32}$$

$$H_z = \quad Ce^{-qx}e^{i(\omega t-\beta z)} \ , \quad x > \frac{d}{2} \ . \tag{33}$$

As condições de contorno, em $x = d/2$ e $x = -d/2$, implicam a continuidade das componentes tangenciais de $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$, ou seja, E_y e H_z. Por isso vamos escrever abaixo o campo E_y, de forma explícita:

$$E_y = \quad -\frac{i\omega\mu D}{q}e^{qx}e^{i(\omega t-\beta z)} \ , \quad x < -\frac{d}{2} \ , \tag{34}$$

$$E_y = \ \frac{i\omega\mu B}{p}\cos(px)e^{i(\omega t-\beta z)} \ , \ -\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2} \ , \tag{35}$$

$$E_y = \quad \frac{i\omega\mu C}{q}e^{-qx}e^{i(\omega t-\beta z)} \ , \quad x > \frac{d}{2} \ . \tag{36}$$

$\rightsquigarrow$ Aplicando a continuidade de H_z temos as seguintes equações:

$$De^{-qd/2} = -B\sin\left(p\frac{d}{2}\right) \ , \tag{37}$$

$$B\sin\left(p\frac{d}{2}\right) = Ce^{-qd/2} \ , \tag{38}$$

de onde tiramos a seguinte relação:

$$C = -D$$

$\rightsquigarrow$ Agora vamos para a componente E_y, já conhecendo essa informação.

$$\frac{C}{q}e^{-qd/2} = \frac{B}{p}\cos\left(p\frac{d}{2}\right) \ , \tag{39}$$

$$\frac{B}{p}\cos\left(p\frac{d}{2}\right) = \frac{C}{q}e^{-qd/2} \ , \tag{40}$$

$\rightsquigarrow$ Note que as duas equações acima trazem a mesma informação. Precisamos considerar uma equação de continuidade para H_z e outra para E_y. Parte da informação $C = -D$ já foi obtida da própria paridade da solução!!!

Utilizando a notação matricial, temos a seguinte equação

$$\begin{bmatrix} \sin\left(p\frac{d}{2}\right) & -e^{-qd/2} \\ \frac{1}{p}\cos\left(p\frac{d}{2}\right) & -\frac{1}{q}e^{-qd/2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix} = 0 \tag{41}$$

$\rightsquigarrow$ Esta equação terá solução desde que o determinante da matriz seja nulo:

$$-\frac{1}{q}e^{-qd/2}\sin\left(p\frac{d}{2}\right) + \frac{1}{p}e^{-qd/2}\cos\left(p\frac{d}{2}\right) = 0$$

Rearranjando os fatores temos:

$$\tan\left(p\frac{d}{2}\right) = \frac{q}{p}\ , \tag{42}$$

que é denominada equação secular - desta equação, dados n_1, n_2 e k_0 tiramos os possíveis valores de β, a constante de propagação.

$\rightsquigarrow$ Vamos definir duas novas variáveis:

$$u = pd = d\sqrt{k_0^2 n_1^2 - \beta^2} \ , \tag{43}$$

$$w = qd = d\sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_2^2} \ , \tag{44}$$

de tal forma a escrever:

$$u\tan\left(\frac{u}{2}\right) = w \ , \tag{45}$$

$\rightsquigarrow$ Podemos resolver esta equação de forma gráfica, plotando as funções $f_1 = u\tan(u/2)$ e $f_2 = w = \sqrt{V^2 - u^2}$ em um mesmo gráfico, a solução se dá onde as duas funções se interceptam. Todavia para os conjuntos u e w que satisfazem a equação, somente aqueles para os quais a constante β é real correspondem a modos propagantes.

$\rightsquigarrow$ Fica como exercício demonstrar que para os MODOS TE ÍMPARES a equação secular resultante será:

$$u\cot\left(\frac{u}{2}\right) = -w \ , \tag{46}$$

$\rightsquigarrow$Cálculo das frequências de corte:

Observe que os modos propagantes tem $k_0 n_2 \leq \beta \leq k_0 n_1$, de tal forma que no corte $\beta \longrightarrow k_0 n_2$, ou ainda

$$w \to 0 \ ,$$
$$u \to V = \frac{2\pi d}{\lambda_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} \ ,$$

e nesse caso a equação secular fica reduzida a determinar os valores da seguinte equação:

$$V \tan\left(\frac{V}{2}\right) = 0 \ ,$$

para os modos TE pares, enquanto que

$$V \cot\left(\frac{V}{2}\right) = 0 \ ,$$

para os modos TE ímpares.

Vamos agora calcular esses valores de u:

A) Para os modos TE pares - $V\tan(V/2)=0$:

$\rightsquigarrow$ A primeira solução é $V=0$, que corresponde a $k_0=0\rightarrow\omega=0$ - Não há frequência de corte esse primeiro modo TE!!!

$\rightsquigarrow$ Pode-se anular também $\tan(V/2)$, o que ocorre para os múltiplos de π:

$$\frac{V}{2}=m\pi\ ,m=1,2,3...$$

ou então, de forma bem geral

$$V=2m\pi\ ,m=0,1,2,3...$$

já incluindo aquela primeira solução, que não possui corte.

B) Para os modos TE ímpares - $V\cot(V/2)=0$:

$\rightsquigarrow$ A primeira solução não pode ser $V=0$, uma vez que $\cot(V/2)\rightarrow\infty$, mesmo que $V\rightarrow 0$. Levando ao limite, para $V=0$ o termo $V\cot(V/2)\rightarrow 2$!!!

$\rightsquigarrow$ Devemos portanto anular o termo $\cot(V/2)$, o que ocorre para os múltiplos ímpares de $\pi/2$:

$$\frac{V}{2}=(2m+1)\frac{\pi}{2}\ ,m=0,1,2,3...$$

ou então,

$$V=(2m+1)\pi\ ,m=0,1,2,3...$$

o que nos dá para o modo ímpar de menor frequência de corte o valor:

$$V=\pi\ .$$

$\rightsquigarrow$ É possível mostrar ainda que os modos TM pares ou ímpares tem frequência $V\geq\pi$.

$\rightsquigarrow$ Uma vez que conhecemos agora como calcular as frequências de corte e sabendo que o primeiro modo TE PAR não possui frequência de corte, o segundo modo TE PAR tem frequência de corte $V = 2\pi$ e o primeiro modo TE ÍMPAR possui frequência de corte $V = \pi$, portanto mais baixa que o segundo modo TE PAR, podemos escrever uma condição de propagação monomodal.

$\rightsquigarrow$ CONDIÇÃO MONOMODO: Para que haja somente um modo propagante devemos ter

$$V < \pi \ ,$$

o que nos dá:

$$\frac{2\pi d}{\lambda_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2} < \pi \ , \tag{47}$$

o que implica uma limitação das dimensões do guia:

$$d < \frac{\lambda_0}{2\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} \ .$$

IMPORTANTE:

$\rightsquigarrow$ O parâmetro V é denominado frequência normalizada. A razão é um tanto óbvia pois $V = k_0 d\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ e $k_0 = \omega/c$, portanto V depende da frequência e de parâmetros de contrução do guia, como os índices de refração n_1 e n_2 e da dimensão d.

$\rightsquigarrow$ Na condição de guiamento fraco:

$$n_1^2 - n_2^2 = (n_1 + n_2)(n_1 - n_2) \approx 2n_1^2\Delta \ ,$$

onde $n_1 + n_2 \approx 2n_1$ e $\Delta = (n_1 - n_2)/n_2$ é o chamado índice de refração fracionário.

A condição monomodal em guiamento fraco é dada por:

$$d < \frac{\lambda_0}{2n_1\sqrt{2\Delta}} \ ,$$

o que mostra que para pequenos valores de Δ a condição sobre a dimensão d fica relaxada, sendo mais fácil a construção de um guia monomodo na condição de guiamento fraco, na prática.

Outras definições são bastante utilizadas na teoria de guias de ondas, além da frequência normalizada:

$\rightsquigarrow$ Índice de refração efetivo:

$$n_{eff} = \frac{\beta}{k_0} \, , \tag{48}$$

$\rightsquigarrow$ Constante de propagação normalizada, b:

$$b = \frac{\beta/k_0 - n_2}{n_1 - n_2} \, . \tag{49}$$

$\rightsquigarrow$ Observe que $b \longrightarrow 1$ se $\beta \longrightarrow k_0 n_1$ ao passo que no corte $b \longrightarrow 0$.

$\rightsquigarrow$ É convencional a apresentação de curvas modais expressas na forma de gráficos $V \times b(V)$, enquanto que o índice efetivo fica sendo uma função de $b(V)$:

$$n_{eff} = \frac{\beta}{k_0} = n_2 + b n_1 \Delta$$

A Fibra Óptica: Modos LP e Condição Monomodo

$\rightsquigarrow$ A fibra óptica idealmente apresenta geometria cilíndrica circular, e por este motivo devem ser usadas as coordenadas cilíndricas circulares (ρ, φ, z).

$\rightsquigarrow$ A solução mais direta do problema da fibra óptica passa por determinar $\mathbf{E}_\perp = (E_\rho, E_\varphi)$ e $\mathbf{H}_\perp = (H_\rho, H_\varphi)$, uma vez conhecidas as soluções para as componentes E_z e H_z, para encontrar uma equação secular, a partir das condições de contorno, utilizando o mesmo procedimento que foi utilizado para o guia de ondas SLAB simétrico.

$\rightsquigarrow$ Este trabalho é deixado como um exercício. A equação secular resultante envolve as funções de Bessel e suas derivadas.

$\rightsquigarrow$ Há um outro caminho para o problema que é válido sob certas circunstâncias, e sobretudo no que tange a propagação monomodal sob o regime de guiamento fraco. Ao invés de conhecer os campos longitudinais, podemos conhecer primeiro as componentes transversas, assumindo polarização linear: daí vem o nome LP - Linearly Polarized Modes, ou simplesmente MODOS LP.

$\rightsquigarrow$ A figura abaixo mostra a diferença entre a solução mais geral, e os modos ditos LP:

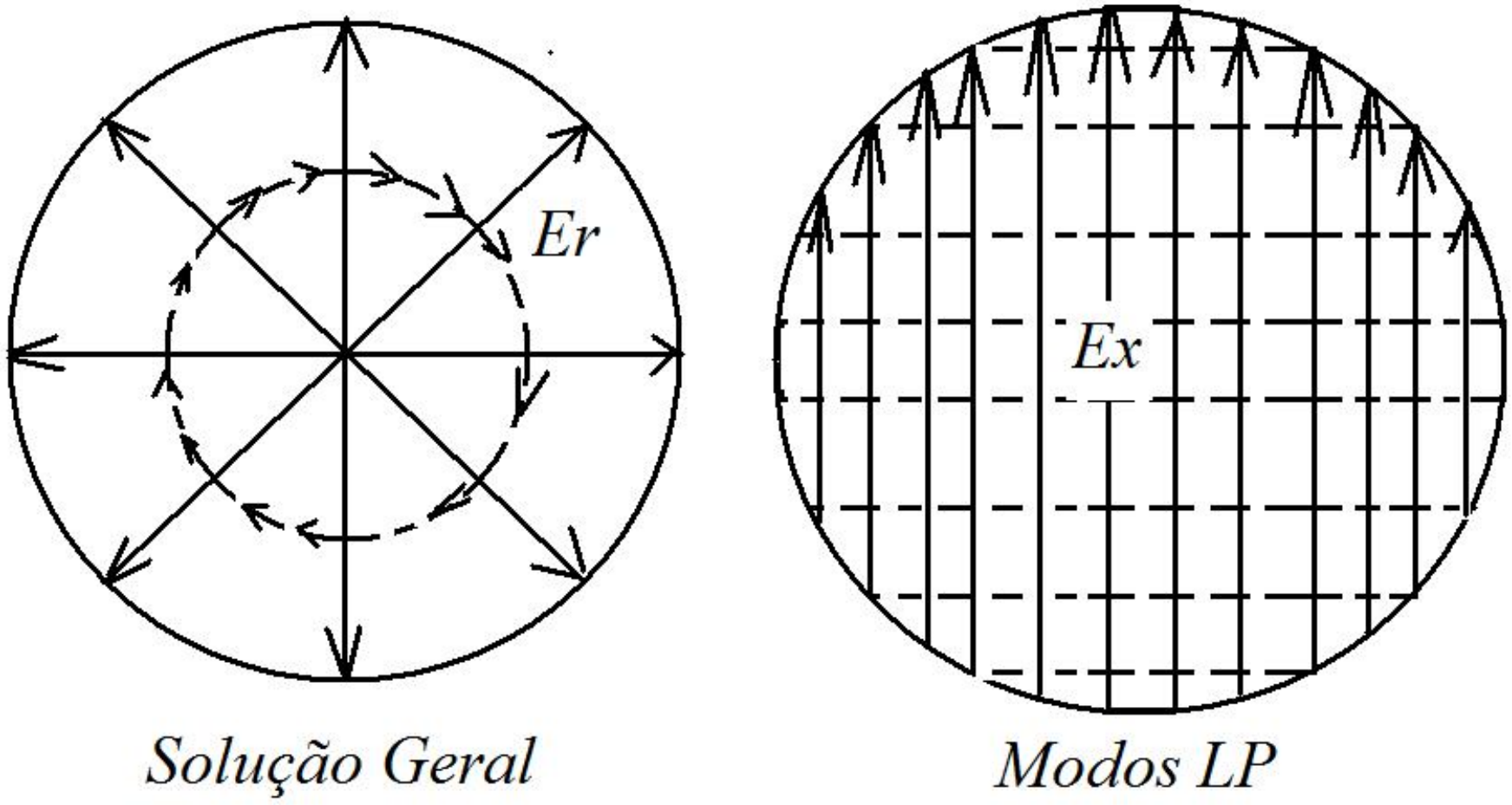

Figure 2: Exemplo: Configuração de Campos para Modos LP em comparação com a Solução Geral.

$\rightsquigarrow$ Assumindo a equação de ondas para os campos eletromagnéticos:

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2)\mathbf{E} = 0 \tag{50}$$

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2)\mathbf{H} = 0 \tag{51}$$

Podemos resolver uma componente transversa de $\mathbf{E}$ e sob certas condições, a partir desta componente calcular a componente longitudinal, bem como $\mathbf{H}$, a partir das equações de Maxwell.

Admitindo-se que

$$\mathbf{E}_\perp = E_x \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x} = \psi e^{i(\omega t - \beta z)} \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{x}$$

sabemos que para transportar energia na direção z devemos ter $\mathbf{H}_\perp = H_y \hat{\mathbf{a}}_\mathbf{y}$ e temos a seguinte equação de ondas:

$$(\nabla_\perp^2 + k_\perp^2)\psi = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_\perp^2\right]\psi = 0 \ , \tag{52}$$

sendo $k_\perp^2 = k_0^2 n^2 - \beta^2$, como anteriormente.

$\rightsquigarrow$ Por questões físicas a dependência na variável φ só pode ser na forma $e^{-im\varphi}$, com $m = 0, 1, 2...$ um número inteiro. Dessa forma $\partial^2\psi/\partial\varphi^2 = -m^2\psi$, de tal forma que:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \left(k_\perp^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right)\psi = 0 \ , \tag{53}$$

que é a tão conhecida equação de Bessel.

Novamente estamos buscando modos guiados, ou seja, $k_0 n_2 \leq \beta \leq k_0 n_1$ e nesse caso:

$$k_\perp^2 = k_0^2 n_1^2 - \beta^2 = p^2 > 0 \ , \rho \leq a \ ,$$
$$k_\perp^2 = k_0^2 n_2^2 - \beta^2 = -q^2 < 0 \ , \rho > a \ ,$$

$\rightsquigarrow$ Vemos que a equação se desdobra em duas equações distintas, para $\rho \leq a$ e para $\rho > a$.

$\rightsquigarrow$ No núcleo da fibra temos:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\left(p^2-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\psi=0\ ,\rho\leq a \tag{54}$$

cuja solução é dada por:

$$\psi=[AJ_m(p\rho)+A'Y_m(p\rho)]e^{-im\varphi}\ ,$$

onde $J_m(p\rho)$ e $Y_m(p\rho)$ são funções de Bessel e modificada de Bessel do primeiro tipo, de ordem m.

Uma vez que $\lim_{\rho\to 0}Y_m(p\rho)\to\infty$, A' deve ser nula para que a solução seja fisicamente aceitável, portanto:

$$E_x=AJ_m(p\rho)e^{-im\varphi}e^{i(\omega t-\beta z)}\ , \tag{55}$$

$\rightsquigarrow$ No casca da fibra temos:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)-\left(q^2+\frac{m^2}{\rho^2}\right)\psi=0\ ,\rho\leq a \tag{56}$$

cuja solução é dada por:

$$\psi=[BK_m(q\rho)+B'I_m(q\rho)]e^{-im\varphi}\ ,$$

onde $K_m(p\rho)$ e $I_m(p\rho)$ são funções de Bessel e modificada de Bessel do segundo tipo, de ordem m.

Uma vez que $\lim_{\rho\to\infty}I_m(q\rho)\to\infty$, B' deve ser nula para que a solução seja fisicamente aceitável, portanto:

$$E_x=BK_m(q\rho)e^{-im\varphi}e^{i(\omega t-\beta z)}\ , \tag{57}$$

$\rightsquigarrow$ Devemos agora determinar a componente longitudinal dos campos, nesse caso H_z. Das equações de Maxwell, temos:

$$H_z = -\frac{1}{i\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right) \ ,$$

e como estamos assumindo polarização do campo transverso na direção x, temos finalmente:

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0}\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{1}{i\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_x}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial E_x}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) \ . \tag{58}$$

É fácil mostrar que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin\varphi \ , \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}\cos\varphi$$

Tem-se finalmente:

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0}\left(\frac{\partial E_x}{\partial \rho}\sin\varphi - \frac{im}{\rho}\cos\varphi E_x\right) \ . \tag{59}$$

$\rightsquigarrow$ Condições de contorno devem ser aplicadas para continuidade das componentes tangenciais: nesse caso H_z e E_φ na superfície de fronteira, $\rho = a$.

É fácil determinar E_φ a partir das componentes cartesianas:

$$E_\varphi = E_y \cos\varphi - E_x \sin\varphi$$

mas como $E_y = 0$ temos

$$E_\varphi = -E_x \sin\varphi$$

$\rightsquigarrow$ É possível mostrar facilmente que a aplicação das condições de contorno leva à continuidade da função ψ e sua derivada $\partial\psi/\partial\rho$ na superfície de fronteira, $\rho = a$, e deixa-se como exercício mostrar que:

$$u\frac{J'_m(u)}{J_m(u)} = w\frac{K'_m(w)}{K_m(w)} \tag{60}$$

com as definições $J'_m(u) = \partial J_m(u)/\partial u$, $K'_m(w) = \partial K_m(w)/\partial w$ e:

$$u = pa = k_0 a\sqrt{n_1^2 - n_{eff}^2}\ ,$$

$$w = qa = k_0 a\sqrt{n_{eff}^2 - n_2^2}\ ,$$

sendo $n_{eff} = \beta/k_0$, conforme definido anteriormente.

$\rightsquigarrow$ Mais uma vez, podemos calcular as frequências de corte, pelo menos do modo fundamental e do próximo modo para definir qual é a condição monomodal. No corte $u \to V$ e $w \to 0$, sendo

$$V = k_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \ ,$$

Utilizando algumas propriedades das funções de Bessel, obtém-se:

$$V \frac{J_{m-1}(V)}{J_m(V)} = 0 \ ,$$

$\rightsquigarrow$ Existe um modo para o qual $m = 0$ e $V = 0$ e portanto não apresenta corte.

$\rightsquigarrow$ A frequência de corte do modo seguinte se dá escolhendo $m = 1$ e então temos:

$$J_0(V) = 0 \ ,$$

cuja primeira raiz vale $V = 2,405$. Tem-se então a condição monomodal da fibra óptica circular:

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} < 2.405 \ . \tag{61}$$

Nomenclatura dos modos LP: LP_{mn} onde m é a escolha da função de Bessel e n corresponde à n-ésima raiz da equação acima $J_{m-1}(V) = 0$.

$\rightsquigarrow$ Existe uma fórmula aproximada para determinar o número de modos propagantes, para $V >> 1$:

$$N = \frac{V^2}{2} \ , \tag{62}$$

aproximadamente.

Na condição de guiamento fraco, tem-se, para a condição monomodal:

$$a < \frac{2.405\lambda_0}{2\pi n_1\sqrt{2\Delta}} \ ,$$

que com valores típicos de $\lambda_0 = 1.55\mu$m, $n_1 \approx 1.5$ e $\Delta \approx 10^{-3}$ nos dá:

$$a < 8.87\mu\text{m} \ .$$

Tipicamente aceita-se que as fibras monomodo tem o limite para o raio do núcleo no valor $a \approx 10\mu$m.

$\rightsquigarrow$ Devemos agora fazer algumas considerações importantes, dada a solução para o campo elétrico abaixo:

$$E_x = AJ_m(p\rho)e^{-im\varphi}e^{i(\omega t-\beta z)} \ , \rho \leq a \tag{63}$$

$$E_x = A\frac{J_m(pa)}{K_m(qa)}K_m(q\rho)e^{-im\varphi}e^{i(\omega t-\beta z)} \ , \rho > a \tag{64}$$

$\rightsquigarrow$ Existe uma solução análoga a esta com polarização linearmente independente: E_y!!

$\rightsquigarrow$ Tanto a parte real quanto a parte imaginária das soluções acima são soluções, ou seja:

$\rightsquigarrow$ Para $m = 0$ temos 2 soluções distintas, correspondendo às polarizações lineares em x e y.

$\rightsquigarrow$ Para $m = 1, 2, 3...$ temos 4 soluções distintas, correspondendo a duas polarizações lineares em x e y e as possíveis partes real $\cos(m\varphi)$ e imaginária $\sin(m\varphi)$.

$\rightsquigarrow$ O fato de que para cada escolha de m e polarização existam mais de uma solução distinta, linearmente independente das demais recebe o nome de DEGENERESCÊNCIA DO MODO. Nesse caso o modo fundamental é duplamente degenerado, correspondendo às duas polarizações possíveis.

$\rightsquigarrow$ O MODO FUNDAMENTAL DA FIBRA

Corresponde ao Modo LP_{01} (primeira solução com corte $V = 0$, para $m = 0$):

Os campos são dados por:

$$E_x = AJ_0(p\rho)e^{i(\omega t - \beta z)} \ , \rho \leq a \tag{65}$$

$$E_x = A\frac{J_0(pa)}{K_0(qa)}K_0(q\rho)e^{i(\omega t - \beta z)} \ , \rho > a \tag{66}$$

O campo magnético transverso pode ser calculado na forma $H_y \approx E_x/Z$, onde Z é a impedância do modo.

$\rightsquigarrow$ A densidade de potência transportada é dada pela componente z do vetor de Poynting:

$$S_z = \frac{|A|^2}{2Z}|J_0(p\rho)|^2 \ , \rho \leq a \tag{67}$$

$$S_z = \frac{|A|^2}{2Z}\left|\frac{J_0(pa)}{K_0(qa)}\right|^2 |K_0(q\rho)|^2 \ , \rho > a \tag{68}$$

$\rightsquigarrow$ Esta distribuição S_z pode ser aproximada por uma função gaussiana:

$$S_z = S_0 e^{-2\rho^2/\rho_0^2} \ , \tag{69}$$

$\rightsquigarrow$ Da aproximação anterior, na forma gaussiana seguem algumas expressões úteis.

$\rightsquigarrow$ Na propagação monomodo $V < 2.405$, existem fórmulas aproximadas para determinar ρ_0 e os outros parâmetros de interesse.

$$b \approx \left(1.1428 - \frac{0.996}{V}\right)^2 ,$$

$$\frac{\rho_0}{a} = 0.65 + 1.619V^{-3/2} + 2.879V^{-6} .$$

Fator de Confinamento Γ

$$\Gamma = \frac{P_{nucl}}{P_{total}} = \frac{\int_0^a |E_x|^2 \rho d\rho}{\int_0^\infty |E_x|^2 \rho d\rho} = 1 - e^{-2a^2/\rho_0^2}$$

$\rightsquigarrow$ Para $V = 2$, pode-se verificar que 75% da densidade de potência está confinada no núcleo. A operação na região $2 < V < 2.4$ é mais eficiente portanto, uma vez que a energia fica limitada ou confinada à região do núcleo da fibra.

$\rightsquigarrow$ Aqui encerra-se o estudo dos modos propagantes.

$\rightsquigarrow$ É claro que as equações seculares permitem determinar todos os valores de β possíveis que levam a modos de núcleo, modos de casca, modos evanescentes, leaky modes e modos de radiação.

$\rightsquigarrow$ Todavia, uma vez que desejamos propagar energia através da fibra ou do guia de ondas dielétricos, são mais relevantes para o momento os modos propagantes, com $k_0 n_2 \leq \beta \leq k_0 n_1$.

$\rightsquigarrow$ Foram omitidos vários pontos: curvatura da fibra, birrefringência, excentricidade da fibra (a mesma pode ser ligeiramente elíptica devido a problemas na fabricação), etc.

Podemos fazer para os modos com β real o seguinte diagrama:

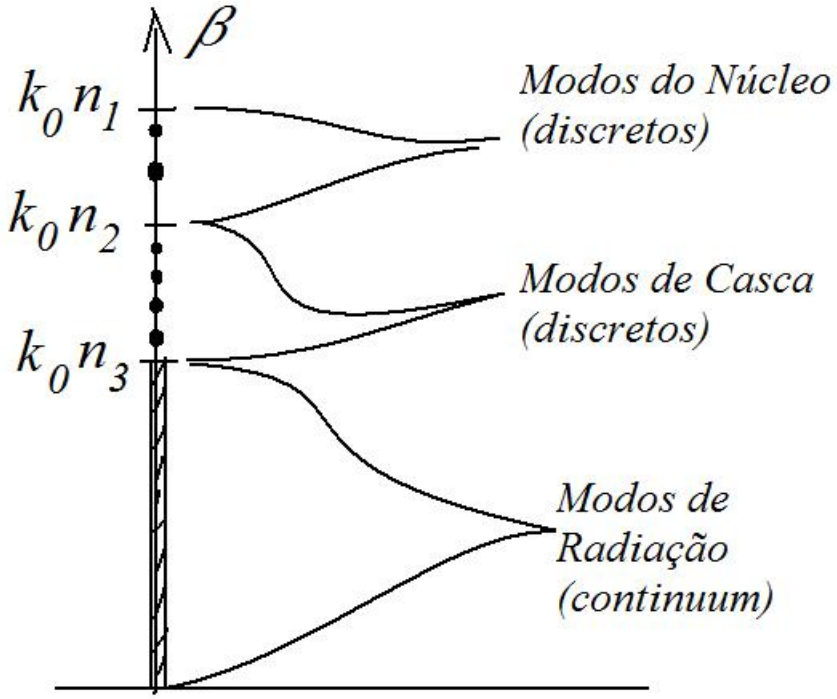

Figure 3: Diagrama de Modos Propagantes: Constante β real.