Parte 3: Propagação de Ondas e a Fibra Óptica - Efeitos Dispersivos

Prof. César Augusto Dartora - UFPR

E-mail: cadartora@eletrica.ufpr.br

Curitiba-PR

Roteiro da Aula:

- A equação de ondas paraxial.
- Dispersão e difração. Atenuação de sinal.
- Algumas propriedades da Transformada de Fourier.
- Efeitos dispersivos na fibra

A equação paraxial

$\rightsquigarrow$ Conforme já foi visto anteriormente, a propagação de ondas na fibra óptica pode ser descrita a partir da teoria dos modos LP. Um modo LP pode ser descrito através de uma componente transversal do campo elétrico, que deve satisfazer a equação de ondas de Helmholtz na forma:

$$(\nabla^2 + k_0^2 n^2)\mathbf{E} = 0 \ , \tag{1}$$

para o vetor campo elétrico.

Assumindo uma onda propagante na direção de z podemos escrever uma solução na forma:

$$E_x = \Psi(x,y,z) = \Phi(x,y,z)e^{i(\omega t - \beta z)} \ , \tag{2}$$

que permite remover a variação rápida na direção z.

$\rightsquigarrow$ Observe que ao contrário do que fizemos na análise modal anterior, aqui a amplitude $\Phi(x,y,z)$ pode variar com z. Essa função $\Phi(x,y,z)$ assume o papel de uma envoltória do sinal, que varia rapidamente ao longo de z, através da dependência $e^{-i\beta z}$.

$\rightsquigarrow$ Calculando a segunda derivada da função Ψ, que corresponde a uma componente de campo, vale lembrar, e sabendo que a variação rápida em z está contida em $e^{-i\beta z}$, temos:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = \left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - 2i\beta\frac{\partial\Phi}{\partial z} - \beta^2\Phi\right] e^{-i\beta z} \ .$$

Se a variação rápida está no termo e^{-ikz}, então a condição abaixo será naturalmente satisfeita:

$$\left|\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right| << 2\beta\left|\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right| \ ,$$

permitindo negligenciar a derivada de segunda ordem de Φ em relação à variável z.

Podemos reescrever a equação de ondas em uma forma conhecida como equação de propagação paraxial:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta}[\nabla_\perp^2\Phi + (k_0^2 n^2 - \beta^2)\Phi] \ , \tag{3}$$

onde $\nabla_\perp^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ corresponde à parte transversal do operador laplaciano, dependendo somente das segundas derivadas em relação às variáveis (x,y).

$\rightsquigarrow$ Vamos repetir aqui a equação para identificar alguns efeitos:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta}[\nabla_\perp^2\Phi + (k_0^2 n^2 - \beta^2)\Phi] \ ,$$

$\rightsquigarrow$ O termo

$$\frac{1}{2\beta}\nabla_\perp^2\Phi$$

contém o efeito de difração na propagação de ondas. Este efeito ocorre em espaço livre, sobretudo. Na condição de guiamento temos simplesmente $\nabla_\perp^2\Phi = -k_\perp^2\Phi$, onde $k_\perp$ é uma constante e a forma $\Phi(x,y,z)$ não se altera com respeito a (x,y) à medida em que propaga ao longo de z - a onda é guiada e se acomoda a um modo possível do guia!!!

$\rightsquigarrow$ A dispersão e a atenuação devem estar contidas no termo

$$(k_0^2 n^2 - \beta^2)\Phi \ ,$$

conforme veremos mais adiante.

Difração e a óptica de Fourier

$\rightsquigarrow$ Para fins de simplicidade e compreensão, vamos considerar uma onda monocromática se propagando em um meio de índice n homogêneo infinito, e vamos fazer $\beta = k_0 n$ para obter a equação de propagação paraxial:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{i}{2\beta}\nabla_\perp^2 \Phi \ , \tag{4}$$

$\rightsquigarrow$ A equação acima tem a mesma forma de uma equação de Schroedinger para uma partícula livre, mas aqui a variável z faz o papel do tempo t.

Podemos definir agora um par de transformadas de Fourier, na forma que segue:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}(k_x,k_y,z)e^{-ik_x x}e^{-ik_y y}dk_x dk_y \ , \tag{5}$$

$$\tilde{\Phi}(k_x,k_y,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x,y,z)e^{ik_x x}e^{ik_y y}dxdy \ , \tag{6}$$

e aplicar essas relações à equação (4). Observando as propriedades matemáticas das transformadas, é fácil ver que a seguinte substituição é possível:

$$\nabla_\perp^2 \rightarrow -(k_x^2 + k_y^2)$$

Reescrevendo a equação, no domínio (k_x, k_y) temos:

$$\frac{d}{dz}\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \frac{i}{2k}(k_x^2 + k_y^2)\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) \ . \tag{7}$$

Dada a condição inicial $\tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0)$ encontrada a partir da distribuição espacial $\Phi(x, y, 0)$ no plano $z = 0$ podemos escrever a solução da equação acima:

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, z) = \tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) \exp\left[\frac{i}{2k}(k_x^2 + k_y^2)z\right] \ ,$$

e finalmente obtém-se o conjunto de equações que descreve a teoria conhecida com óptica de Fourier:

$$\Phi(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0)\exp\left[\frac{iz}{2k}(k_x^2 + k_y^2)\right]e^{-ik_x x}e^{-ik_y y}dk_x dk_y \tag{8}$$

$$\tilde{\Phi}(k_x, k_y, 0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x, y, 0)e^{ik_x x}e^{ik_y y}dxdy \ . \tag{9}$$

Observe $\Psi(x, y, z) = \Phi(x, y, z)e^{-ikz}$ é uma superposição de ondas planas uniformes, $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)}$ com diferentes vetores de onda $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ de mesma freq. ω e mesmo valor para o produto $\mathbf{k}\cdot\mathbf{k} = k_0^2 n^2$, mas onde assumimos que $k_z \approx k >> k_x, k_y$ - aproximação paraxial.

É importante lembrar que Ψ representa uma das componentes do campo elétrico e podemos então escrever:

$$\mathbf{E} = \Phi(x,y,z)e^{i(\omega t - kz)}\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{x}} \ , \tag{10}$$

sendo a densidade de potência calculada pelo vetor de Poynting, que tem como resultado na aproximação paraxial o seguinte resultado:

$$\mathbf{S}_{\mathrm{med}} \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\mathbf{E}|^2\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\Phi(x,y,z)|^2\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{z}} \ . \tag{11}$$

$\rightsquigarrow$ Exemplo Importante: A fenda retangular.

Considere uma fenda de lados $L_x = d << L_y$ localizada no plano $z = 0$ e sendo iluminada por uma onda plana uniforme. Nesse caso, podemos assumir para todos os fins práticos que a condição inicial é dada por $\Phi(x,y,0) = \Phi_0$ constante para toda a região definida pela fenda, $-\infty < y < \infty$ e $-d/2 \leq x \leq d/2$.

Fazendo a transformada de Fourier de $\Phi(x,y,0)$ obtemos facilmente:

$$\tilde{\Phi}(k_x,k_y,0) = 2\pi d \Phi_0 \frac{\sin[k_x d/2]}{k_x d/2}\ \delta(k_y)\ ,$$

sendo $\delta(k_y)$ a função delta de Dirac. Inserindo a expressão acima em (8) tem-se:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{\Phi_0 d}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin[k_x d/2]}{k_x d/2} \exp\left[\frac{i k_x^2 z}{2k}\right] e^{-i k_x x} dk_x\ , \qquad (12)$$

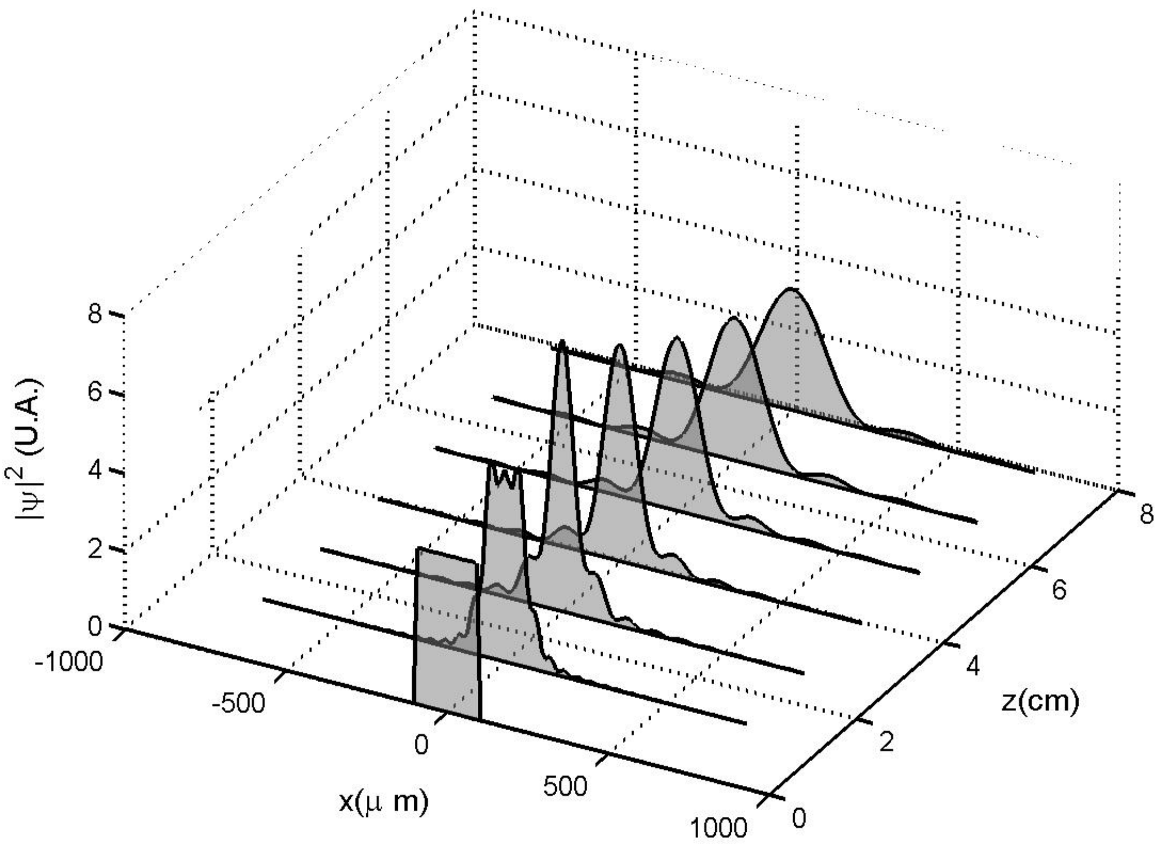

Figure 1: Perfil transversal da densidade de potência $S = |\Psi|^2$, em unidades arbitrárias, à medida em que a onda difratada se propaga. Observe que para grandes distâncias formam-se as franjas de interferência.

O Método da Fase Estacionária:

Note que para grande z mais oscilações ocorrem devido ao termo de fase $\exp\left[\frac{ik_x^2 z}{2k} - ik_x x\right]$ na integral anterior.

Nesse caso a maior contribuição para a integral em valores grandes de z ocorre para valores de fase estacionária, ou seja, na condição em que:

$$\frac{d}{dk_x}\left[\frac{k_x^2 z}{2k} - k_x x\right] = 0 \ ,$$

que corresponde ao valor $k_x = k.x/z$ e produz uma solução aproximada na forma abaixo:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{\Phi_0 d}{2\pi\sqrt{z}} \frac{\sin\left[\frac{kdx}{2z}\right]}{\frac{kdx}{2z}} \ . \tag{13}$$

OBS.: o fator de decaimento do campo com $\sqrt{z}$ decorre do fato de a situação ser considerada bidimensional (x,z), ou invariante em y, garantindo assim a conservação da potência total da onda. Em 3-DIM o fator correto seria de z e não de $\sqrt{z}$.

Fazendo uso das definições $k = 2\pi/\lambda$ e $x/z = \tan\theta$ e ainda aproximando $\tan\theta \approx \sin\theta$, quando $x << z$, podemos reescrever esta última expressão na forma abaixo:

$$\Phi(z,\theta) = \frac{\Phi_0 d}{2\pi\sqrt{z}} \frac{\sin\left[\pi d \sin\theta/\lambda\right]}{\pi d \sin\theta/\lambda} \ . \tag{14}$$

O resultado acima é bem conhecido da teoria da difração: padrão de interferências característico do experimento da fenda simples. Os valores de máxima intensidade da onda dependem do ângulo θ, de tal forma que o primeiro valor de máxima ocorre em $\theta = 0$ e os outros para

$$\sin\theta = (2m+1)\frac{\lambda}{2d} \ ,$$

com $m = 0, \pm 1, \pm 2....$ Para $m = 0$ obtém-se o valor $\sin\theta = \frac{\lambda}{2d}$, o que permite através da medida o ângulo θ formado entre o primeiro e o segundo máximo e da largura da abertura d, determinar o comprimento de onda λ.

Exercício na Lista: O feixe gaussiano.

Lá você terá que demonstrar que o comprimento de difração, para o qual um feixe gaussiano de largura inicial x_0 dobra a largura espacial em uma distância conhecida como comprimento de difração, L_{diff} dado por:

$$L_{dif} = 2\pi\sqrt{3}\frac{x_0^2}{\lambda}. \tag{15}$$

$\rightsquigarrow$ Embora obtido com o feixe gaussiano e sendo que alguns fatores numéricos diferem ligeriamente devido à definição e forma do feixe inicial, é possível constatar que em um comprimento

$$L_{dif} \sim \frac{x_0^2}{\lambda} \ ,$$

qualquer onda propagando-se sem guiamento sofrerá mudanças mensuráveis no seu perfil transversal, como franjas de interferência e alargamento espacial.

Efeitos de degradação de sinais na fibra óptica

$\rightsquigarrow$ A utilização de guias de ondas evita o principal efeito da propagação não guiada: a difração.

$\rightsquigarrow$ Na propagação guiada a onda propagante se propaga através de um ou mais modos possíveis dentro do guia. Assumindo-se que este seja conhecido, deseja-se determinar quais efeitos ocorrem com um sinal à medida em que se propaga ao longo da fibra.

$\rightsquigarrow$ São estes efeitos principais:

- Dispersão;
- Atenuação;
- Não-linearidades;

Temos então para a DISPERSÃO:

1) Dispersão Intermodal - ocorre na propagação Multimodo;

2) Dispersão Intramodal - tanto monomodo quanto multimodo, mas é mais relevante no caso monomodo, pois a dispersão intermodal usualmente domina no caso multimodal. Podemos separar em:

2.1) GVD - Group Velocity Dispersion - ocorre devido à geometria do guia de ondas, bem como devido ao material.

2.2) PMD - Polarization Mode Dispersion - devido à defeitos, birrefringência e anisotropia.

A Equação de Propagação: Efeitos Dispersivos

Antes de prosseguirmos na análise de efeitos de dispersão é conveniente escr-ever a forma geral das transformadas de Fourier e algumas das propriedades importantes que serão utilizadas:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\beta)e^{-i\alpha\beta}d\beta \ , \tag{16}$$

$$F(\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha)e^{i\alpha\beta}d\alpha \ , \tag{17}$$

onde as relações entre dois espações matemáticos, ditos recíprocos, α e β permitem o mapeamento das funções $f(\alpha)$ para o seu recíproco $F(\beta)$ e vice-versa.

As transformadas de Fourier são de grande valor para sistemas lineares.

São propriedades das transformadas, facilmente demonstráveis:

$$\mathcal{F}\left[\frac{d^n f(\alpha)}{d\alpha^n}\right] = (-i\beta)^n F(\beta) \ , \tag{18}$$

$$\mathcal{F}\left[f(\alpha)\star g(\alpha)\right] = F(\beta)G(\beta) \ , \tag{19}$$

$$\mathcal{F}\left[f(\alpha-\alpha_0)\right] = F(\beta)e^{i\alpha_0\beta} \ , \tag{20}$$

o símbolo $\mathcal{F}$ denota transformação de Fourier da equação entre colchetes, correspondendo às operações (17) e o símbolo $\star$ denota convolução:

$$f(\alpha)\star g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha')g(\alpha-\alpha')d\alpha' \ . \tag{21}$$

$\rightsquigarrow$ Vamos reescrever a equação paraxial, acrescentando novamente o termo que foi negligenciado anteriormente, ou seja, a derivada segunda de Φ em relação à variável z:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta_0}[\nabla_\perp^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + (k^2 - \beta_0^2)\Phi] \ ,$$

$\rightsquigarrow$ Nesse sentido, até aqui não há aproximação alguma sendo feita!! Trocamos β por β_0, por motivos que seguirão.

$\rightsquigarrow$ Cabe lembrar que a constante $k(\omega) = k_0 n(\omega)$ é uma função da frequência, definido em outros termos como $k^2(\omega) = \omega^2\mu_0\varepsilon_c(\omega)$.

$\rightsquigarrow$ Um sinal eletromagnético usualmente tem largura de banda $\Delta\omega$ e é montado sobre uma onda portadora de frequência ω_0. Geralmente, e especialmente no domínio óptico tem-se a condição $\Delta\omega << \omega_0$.

Lembrando que no modelo de Lorentz:

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\omega\nu} \ , \qquad (22)$$

sendo ε_r a parcela real da constante dielétrica relativa, σ a condutividade do material, ω a frequência de operação, $\omega_p^2 = N_q q^2/(m\varepsilon_0)$ a frequência de plasma do material, ω_r uma frequência característica de ressonância do material e ν a frequência de colisões, N_q é a densidade de cargas q no material e m a massa das mesmas.

$$n(\omega) = \sqrt{\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}} \qquad (23)$$

$\rightsquigarrow$ A parte imaginária está associada à absorção, enquanto a parte real corresponde à caracteristicas de fase/dispersão na propagação.

$\rightsquigarrow$ Meios condutores - elétrons quase livres, o que corresponde a $\omega_r \to 0$ e geralmente satisfazem a condição $\nu >> \omega$ para frequências abaixo do ultra-violeta, o que nos dá:

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \approx 1 - i\frac{\omega_p^2}{\omega\nu} \ , \qquad (24)$$

$\rightsquigarrow$ Materiais dielétricos de poucas perdas, categoria na qual podemos enquadrar as fibras ópticas - linha de ressonância estreita. O caso extremo desse tipo de material corresponde a levar a expressão (22) ao limite $\nu \to 0$ e nesse caso obtém-se:

$$\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \approx 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2 - \omega^2} - i\pi\frac{\omega_p^2}{2\omega}[\delta(\omega-\omega_r) + \delta(\omega+\omega_r)] \ . \qquad (25)$$

$\rightsquigarrow$ Em $\omega = \omega_r$, um meio dielétrico de poucas perdas tem comportamento de um condutor, com alta condutividade efetiva.

$\rightsquigarrow$ O limite para longe da ressonância nos dá a chamada equação de Sellmeier.

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_r \frac{\omega_p^2}{\omega_r^2 - \omega^2}$$

$\rightsquigarrow$ Dado que a comunicação óptica geralmente satisfaz a condição $\omega_0 >> \Delta\omega$ ($\omega_0 \sim 10^{15}$rad/s, $\Delta\omega \sim 10^{13}$rad/s para comunicações em Tb/s), podemos expandir k em séries de Taylor em torno de ω_0:

$$k(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{d^m k(\omega)}{d\omega^m}\bigg|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^m \ . \tag{26}$$

Definindo os coeficientes a seguir:

$$\Gamma_m = \frac{d^m k(\omega)}{d\omega^m}\bigg|_{\omega=\omega_0} \ , \tag{27}$$

com $\Gamma_0 = k_0 n(\omega_0)$, podemos expressar $k^2(\omega)$ na forma:

$$k^2(\omega) = \sum_r \sum_s \frac{1}{r!s!} \Gamma_r \Gamma_s (\omega - \omega_0)^{r+s} \ ,$$

Inserindo a expansão na equação paraxial, obtemos:

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{1}{2\beta_0}\left[\nabla_\perp^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left(\sum_r \sum_s \frac{1}{r!s!}\Gamma_r\Gamma_s(\omega-\omega_0)^{r+s} - \beta_0^2\right)\Phi\right] \ ,$$

$\rightsquigarrow$ Expandir $k(\omega)$ em torno de ω_0 corresponde à eliminação da variação temporal rápida na forma $e^{i\omega_0 t}$, assim como removemos a variação rápida em relação à z com o termo $e^{-i\beta_0 z}$.

$\rightsquigarrow$ A prova desse argumento se dá passando do domínio $\omega - \omega_0$ para o domínio t, fazendo uso das propriedades das transformadas de Fourier: $(i)^n(\omega - \omega_0)^n \leftrightarrow e^{i\omega_0 t}\partial^n/\partial t^n$

Obtemos então a equação de propagação paraxial no domínio do tempo:

$$i\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta_0}\left[\nabla_\perp^2 \Phi + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \left(\sum_r \sum_s \frac{1}{r!s!} i^{r+s}\Gamma_r \Gamma_s \frac{\partial^{r+s}}{\partial t^{r+s}}\Phi - \beta_0^2 \Phi\right)\right] \ , \quad (28)$$

onde $\Psi(x,y,z,t)$ é dado por

$$\Psi(x,y,z,t) = \Phi(x,y,z,t)e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \ . \quad (29)$$

$\rightsquigarrow$ Variações rápidas estão em $e^{-i(\omega_0 t - \beta_0 z)}$ e o comportamento de envoltória é descrito por $\Phi(x,y,z,t)$.

Restringindo atenção à ondas guiadas propagantes: um modo deve satisfazer uma equação da forma $\nabla_\perp^2\Phi = -k_{\perp 0}^2\Phi$ então podemos substituir este resultado na equação anterior, para obter

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta_0}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \left(\sum_r\sum_s \frac{1}{r!s!}(-i)^{r+s}\Gamma_r\Gamma_s\frac{\partial^{r+s}}{\partial t^{r+s}}\Phi - (\beta_0^2 + k_{\perp 0}^2)\Phi\right)\right] . \tag{30}$$

Negligenciando derivadas temporais de ordem maior do que $\partial^2/\partial t^2$ pode-se reescrever a equação acima:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta_0}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} + \Gamma_0^2\Phi - 2i\Gamma_0\Gamma_1\frac{\partial\Phi}{\partial t} - (\Gamma_0\Gamma_2 + \Gamma_1^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - (\beta_0^2 + k_\perp^2)\Phi\right] . \tag{31}$$

Fazendo $\Gamma_0^2 = \beta_0^2 + k_\perp^2$ e utilizando a regra da cadeia de derivadas podemos mostrar que:

$$\Gamma_1(\omega_0) = \frac{dk}{d\omega}(\omega_0) = \frac{dk}{d\beta}\frac{d\beta}{d\omega} = \frac{\beta_0\beta_1}{\Gamma_0} \ ,$$

onde os parâmetros β_0, β_1 e β_2 são definidos na forma

$$\beta_0 = \beta(\omega_0) \ , \tag{32}$$

$$\beta_1 = \left.\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right|_{\omega_0} \ , \tag{33}$$

$$\beta_2 = \left.\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\right|_{\omega_0} \ , \tag{34}$$

permitindo escrever a constante $\beta(\omega)$ em séries de Taylor:

$$\beta(\omega) = \beta(\omega_0) + \left.\frac{\partial\beta}{\partial\omega}\right|_{\omega_0}(\omega-\omega_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2\beta}{\partial\omega^2}\right|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)^2 + \dots \ , \tag{35}$$

Reescrevemos a equação na forma:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\beta_0}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - 2i\beta_0\beta_1\frac{\partial\Phi}{\partial t} - (\beta_0\beta_2 + \beta_1^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}\right] \; . \tag{36}$$

Utilizando a relação:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \beta_1^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0$$

e fazendo uma transformação galileana de coordenadas:

$$\begin{aligned} z' &= z \; , \\ T &= t - \beta_1 z \; . \end{aligned}$$

podemos reescrever (36) nas coordenadas (z, T), na forma abaixo:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2} \; . \tag{37}$$

$\rightsquigarrow$ Novamente, tema forma de uma equação de Schroedinger.

Por analogia com a Mecânica Quântica de uma partícula livre tem-se

$$\Delta k_z = \frac{\beta_2}{2}\Delta\omega^2$$

A transformada de Fourier demanda que um pulso de duração τ satisfaz uma relação de incerteza na forma

$$\tau \geq 1/(2\Delta\omega)$$

assim como

$$L_{\text{disp}} = \Delta z \geq 1/(2\Delta k_z)$$

.

É fácil mostrar dessas relações, portanto que

$$L_{\text{disp}} \approx 4\tau^2/\beta_2$$

o que está de acordo como resultados bem conhecidos obtidos de forma exata.

Solução Exata: sendo conhecido o formato do sinal em $z = 0$ podemos obter facilmente

$$\Phi(x,y,z,T) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{\Phi}(x,y,z=0,\omega)\exp\left[i\frac{\beta_2 z\omega^2}{2}\right]e^{i\omega T}d\omega \qquad (38)$$

$$\tilde{\Phi}(x,y,z=0,\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(x,y,z=0,T=t)e^{-i\omega T}dT \ . \qquad (39)$$

$\rightsquigarrow \Phi(x,y,z,T)$ é o envelope da função $\Psi(x,y,z,t) = \Phi(x,y,z,t)e^{-i(\omega_0 t-\beta_0 z)}$, que contém um termo de oscilação rápida $e^{-i(\omega_0 t-\beta_0 z)}$.

Para um espectro gaussiano na forma

$$\tilde{\Phi}(x,y,z=0,\omega) = \Phi_\perp(x,y)\exp\left(-\frac{\omega^2\tau_0^2}{2}\right) \ .$$

pode-se obter de maneira relativamente fácil, nas coordenadas (z,t) a seguinte solução:

$$\Psi(x,y,z,t) = \Phi_\perp(x,y)\sqrt{\frac{2\pi}{\tau_0^2+i\beta_2 z}}\exp\left[-\frac{(t-\beta_1 z)^2(1-i\beta_2 z/\tau_0^2)}{2(\tau_0^2+\beta_2^2 z^2/\tau_0^2)}\right]e^{i(\omega_0 t-\beta_0 z)} \ . \qquad (40)$$

$\rightsquigarrow$ A frequência ω_0 é denominada frequência portadora e o termo exponencial é o termo de fase relacionado a esta frequência, $e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)}$, que podemos escrever na forma $e^{-i\beta_0(z - v_p t)}$.

Dessa forma definimos a chamada velocidade de fase

$$v_p = \omega_0/\beta_0$$

que é a velocidade com que a fase da onda portadora se propaga.

$\rightsquigarrow$ Já a velocidade

$$v_g = 1/\beta_1$$

é aquela com a qual o envelope se propaga ao longo de z.

Existe uma relação formal que diz que

$$v_g \cdot v_p = c^2 \ .$$

$\rightsquigarrow$ Finalmente, o termo β_2 é responsável pela dispersão, ou seja, pelo alargamento temporal do pulso à medida em que propaga ao longo de z. Definindo uma largura temporal $\tau(z)$ na forma

$$\tau(z) = \sqrt{\tau_0^2 + \frac{\beta_2^2 z^2}{\tau_0^2}} \ , \tag{41}$$

e calculando a densidade de potência transportada pela onda

$$\mathbf{S}_{\text{med}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \ |\phi_\perp(x,y)|^2 \frac{2\pi}{\sqrt{\tau_0^2 \tau^2(z)}} \exp\left[-\frac{(t-\beta_1 z)^2}{\tau^2(z)}\right] \ , \tag{42}$$

podemos obter o comprimento de dispersão L_{disp},

$$L_{\text{disp}} = \sqrt{3} \ \frac{\tau^2}{\beta_2} \ , \tag{43}$$

como a distância para a qual o pulso gaussiano dobra sua largura temporal. Se $\beta_2 = 0$ não há dispersão, pois $L_{\text{disp}} \rightarrow \infty$.

$\rightsquigarrow$ O parâmetro β_2 produz alargamento do pulso gaussiano mas não muda sua forma - ele continua gaussiano.

$\rightsquigarrow$ Podemos levar em conta mais termos na expansão em séries de Taylor para $\beta(\omega)$, mas nesse caso à medida que propaga até mesmo o pulso gaussiano muda sua forma.

$\rightsquigarrow$ Incluindo β_3 é a aproximação seguinte:

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial T^2} + i\frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3\Phi}{\partial T^3} \ . \qquad (44)$$

$\rightsquigarrow$ Existe uma região de operação da fibra para a qual $\beta_2 = 0$, denominada de região de dispersão zero. Nesse caso, para obter os efeitos dispersivos se faz absolutamente necessário levar em conta o efeito de β_3 e termos de ordem maior.

$\rightsquigarrow$ É também possível combinar os efeitos de β_2 e β_3 para obter, após uma certa distância propagada, dispersão nula, ou quase, se os efeitos combinados se cancelam.

Análise quantitativa da dispersão

$\rightsquigarrow$ Observe que em uma fibra de comprimento L, o tempo T necessário para um grupo de ondas percorrer essa distância é dado simplesmente por:

$$T = \frac{L}{v_g} = L\beta_1 \ .$$

$\rightsquigarrow$ Para calcular as diferenças de tempo entre as componentes de frequência dentro desse pacote de ondas, podemos simplesmente derivar a expressão acima em relação a ω:

$$\Delta T = L\frac{\partial \beta_1}{\partial \omega} d\omega = L\beta_2 d\omega \ . \tag{45}$$

Para que um sinal possa ser recuperado, a largura de bit τ deve satisfazer a condição:

$$\tau > \Delta T \ ,$$

Assumindo a largura de banda na forma $B = 1/\tau$, obtemos:

$$BL < \frac{1}{\beta_2 \Delta\omega} \ .$$

Lembrando que:

$$c = \lambda f$$

e $\omega = 2\pi f$ temos

$$d\omega = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda \ ,$$

e portanto:

$$BL < \frac{1}{D\Delta\lambda} \ ,$$

sendo definido o parâmetro de dispersão:

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\beta_2 \tag{46}$$

$\rightsquigarrow$ A largura $\Delta\lambda$ não está associada a banda da informação e sim deve-se geralmente à largura de banda do laser. Tipicamente lasers semicondutores multimodo tem $\Delta\lambda = 2$nm.

$\rightsquigarrow$ Em fibras de silica padrão o valor do parâmetro de dispersão gira em torno de $D = 1$ps/(km . nm) em $\lambda = 1.3\mu$m. Isto nos dá $BL \sim 1$(Tb/s).km.

É interessante notar algumas relações que seguem de definições anteriores:

$$n_{eff} = \frac{\beta}{k_0} = c\frac{\beta}{\omega} \ ,$$

dessa forma

$$\beta_1 = \frac{1}{c}\left[n_{eff} + \omega\frac{\partial n_{eff}}{\partial\omega}\right] \ ,$$

mas uma vez que $v_g = 1/\beta_1$, podemos definir o índice de refração do grupo, n_g, na forma

$$n_g = \frac{c}{v_g} = c\beta_1 = n_{eff} + \omega\frac{\partial n_{eff}}{\partial\omega} \ , \tag{47}$$

$\rightsquigarrow$ Lembrando que $D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2}\beta_2$ e $\beta_2 = \partial\beta_1/\partial\omega$, temos finalmente:

$$D = -\frac{2\pi}{\lambda^2}\left[2\frac{\partial n_{eff}}{\partial\omega} + \omega\frac{\partial^2 n_{eff}}{\partial\omega^2}\right] \tag{48}$$

$\rightsquigarrow$ Na verdade $D = D_M + D_W$ onde D_M é uma parcela que só depende do material, enquanto que D_W é a variação do índice efetivo do guia com a frequência.

$\rightsquigarrow$ Tipos de Fibra Quanto à dispersão:

A) Fibras de Silica Padrão: em geral a dispersão depende de β_2, exceto no ponto de dispersão nulo, onde $\beta_2 = 0$ e tem-se que levar em conta o efeito de β_3. O parâmetro D geralmente é baixo próximo de $\lambda = 1.3\mu$m.

B) Fibras de Dispersão Deslocada: É construída de tal forma que $\beta_2 = 0$ na frequência de operação desejada, usualmente através do material e geometria do guia de ondas. Os parâmetros que podem ser modificados são a, n_1 e Δ. Essas modificações fazem um valor muito pequeno em $D = 1.55\mu$m

C) Fibras com Perfil de Dispersão Plana: Para operar em um amplo espectro $1.3\mu\mathrm{m} \leq \lambda \leq 1.6\mu$m, a fibra é construída de tal forma a tornar a dispersão plana nessa região de interesse, com o mais baixo valor de D possível.

Atenuação: Perdas na Fibra

$\rightsquigarrow$ A atenuação em uma fibra óptica pode ser separada em vários termos específicos:

1) Absorção/Atenuação:

- Intrínseca: deve-se às características do próprio material com o qual a fibra óptica é construída, no caso a sílica. Do ponto de vista físico corresponde a uma contribuição imaginária do material para a constante dielétrica ε_c. Longe das ressonâncias esse termo é usualmente menosprezado.

- Extrínseca: deve-se a ressonâncias e outros efeitos produzidos por impurezas na fibra. Um exemplo típico de impureze extrinseca na fibra é a água e moléculas OH, devido à umidade, que são capazes de produzir alta atenuação. Na verdade a melhoria da propagação nas fibras ópticas passou pela técnica de eliminação de impurezas, sobretudo a umidade.

2) Perdas por espalhamento:

A onda propagante encontra centros de impureza, nos quais ela é espalhada. Um exemplo de fenômeno de espalhamento bem conhecido é o espalhamento sofrido pela radiação solar, dando a tonalidade azulada à atmosfera.

Existem três tipos principais de espalhamento:

- Espalhamento Rayleigh: este fenômeno ocorre devido a pequenas inhomogeneidades no índice de refração da fibra, devido a flutuações da densidade da mesma. Ocorre até mesmo devido a efeitos de temperatura. A perda por espalhamento Rayleigh tem uma lei da forma:

$$\alpha_R = \frac{C}{\lambda^4} \ . \tag{49}$$

  A frequência da onda espalhada é a mesma da onda incidente, nesse caso.

- Espalhamento Brillouin: espalhamento de ondas eletromagn. com o auxílio de ondas de som no material - interação fônon-fóton na fibra. Pode haver absorção ou emissão de fônons, a onda resultante tem frequência ligeiramente diferente da onda incidente.

- Espalhamento Raman: transições atômicas no material. A onda incidente e a onda espalhada tem frequências diferentes.

$\rightsquigarrow$ Os fenômenos de Brillouin e Raman só podem ser compreendidos inteiramente através da Mecânica Quântica.

$\rightsquigarrow$ Ambos geralmente são não-lineares.

$\rightsquigarrow$ O efeito Raman pode ser utilizado em amplificadores ópticos.

$\rightsquigarrow$ Não linearidades importantes são:

1) Three and Four-Wave Mixing: ocorre geralmente em sistemas WDM, onde duas ou mais ondas se combinam de forma não linear, para gerar uma terceira. Exemplo:

$$\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = \omega_4 \ .$$

2) Propagação Solitônica: corresponde à propagação de pulsos ópticos que não se dispersam e nem difratam, na presença de meios não-lineares. Proposta de propagação a longas distâncias.