

TE814-Comunicações Ópticas I

# DISPOSITIVOS ÓPTICOS: FILTROS, ACOPLADORES E SPLITTERS

PROF. CÉSAR AUGUSTO DARTORA - UFPR

E-MAIL: CADARTORA@ELETRICA.UFPR.BR

CURITIBA-PR

## Roteiro da Aula:

- Principais Dispositivos Ópticos
- Estruturas Multicamadas e Filtros Ópticos
- Teoria de Modos Acoplados: Redes de Bragg, Acopladores e Splitters

# Principais Dispositivos Ópticos

↪ Um sistema de comunicação óptica está estruturado de tal forma que podemos dividir seu estudo nos seguintes aspectos físicos:

A) A Fibra Óptica, responsável pela propagação de sinal a grandes distância;

B) Os Dispositivos Ópticos: onde sinais ópticos são processados. São esses processos: filtragem, acoplamento de sinal, divisão, conversão eletro-óptica (gargalo eletrônico), amplificação. Além disso existem as fontes de luz e fotodetectores.

São os principais dispositivos portanto:

- 1) Filtros Ópticos
- 2) Acopladores e Divisores de Sinal
- 3) Conversores e Chaves Ópticas
- 4) Fontes de Luz, Fotodetectores e Amplificadores Ópticos.

~> Atualmente há a tendência de um sistema totalmente óptico, reduzindo as partes eletrônicas ao mínimo, uma vez que estas são responsáveis por limitações da taxa de transmissão, devido a limites físicos insuperáveis no chaveamento de dispositivos eletrônicos - esse fato foi denominado gargalo eletrônico. Superado com o processamento óptico de sinais.

~> Aqui iremos abordar os aspectos principais de dispositivos ópticos que dependam somente da teoria eletromagnética clássica. Fontes, fotodetectores e amplificadores ópticos serão deixados por enquanto, uma vez que são necessários conceitos de Mecânica Quântica

~> Não há intenção de cobrir todos os aspectos e detalhes dos dispositivos, mas sim apresentá-los e buscar a compreensão dos princípios físicos do funcionamento dos mesmos.

# Estruturas em Multicamadas

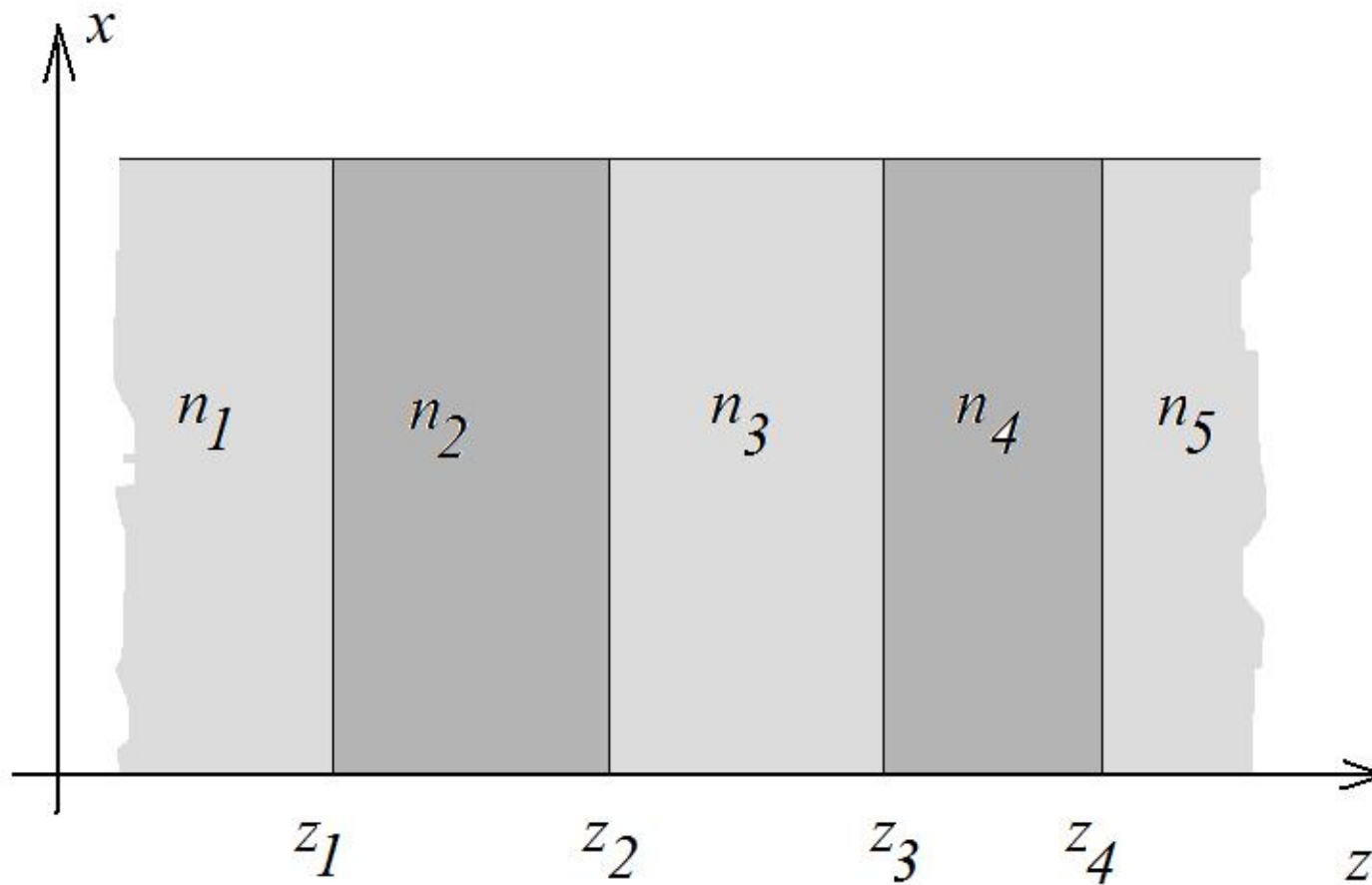


Figure 1: Estrutura típica em multicamadas.

$\rightsquigarrow$  Vamos assumir por simplicidade que as ondas se propagam na direção  $z$  com constante de propagação  $\beta_i = k_0 n_i$ , podendo os campos eletromagnéticos serem colocados na forma de ondas planas, incidindo sobre cada interface, colocada em  $z = z_i$ ,  $z_i = z_1, z_2 \dots z_N$ , propagando-se em uma estrutura com camadas homogêneas por partes, de índices de refração  $n_1, n_2, n_3 \dots$

$$E_x^i = e^{i\omega t} [A_i e^{-i\beta_i z} + B_i e^{i\beta_i z}] , \quad (1)$$

$$H_y^i = e^{i\omega t} \frac{n_i}{Z_0} [A_i e^{i\beta_i z} - B_i e^{-i\beta_i z}] , \quad (2)$$

sendo  $A_i$  uma amplitude da onda propagante,  $B_i$  a amplitude da onda contra propagante na região de índice de refração  $n_i$ , que corresponde à região  $z_{i-1} < z < z_i$ .

$\rightsquigarrow$  As condições de contorno para as equações de Maxwell impõem que os campos tangenciais, no caso  $E_x$  e  $H_y$ , sejam contínuos nas interfaces  $z = z_i$ .

$\rightsquigarrow$  Podemos considerar duas regiões semi-infinitas  $z < 0$  e  $z > z_N$ , tal que a amplitude da onda propagante para  $z < 0$  seja conhecida enquanto que para  $z > z_N$  não haja onda contra-propagante, uma vez que não há obstáculo ou interface para que haja reflexão.

↪ Em  $z = z_i$  temos:

$$A_i e^{-i\beta_i z_i} + B_i e^{i\beta_i z_i} = A_{i+1} e^{-i\beta_{i+1} z_i} + B_{i+1} e^{i\beta_{i+1} z_i}, \quad (3)$$

$$\frac{n_i}{Z_0} [A_i e^{i\beta_i z} - B_i e^{-i\beta_i z}] = \frac{n_{i+1}}{Z_0} [A_{i+1} e^{-i\beta_{i+1} z_i} + B_{i+1} e^{i\beta_{i+1} z_i}], \quad (4)$$

e colocando em uma forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} e^{-i\beta_i z_i} & e^{i\beta_i z_i} \\ n_i e^{-i\beta_i z_i} & -n_i e^{i\beta_i z_i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\beta_{i+1} z_i} & e^{i\beta_{i+1} z_i} \\ n_{i+1} e^{-i\beta_{i+1} z_i} & -n_{i+1} e^{i\beta_{i+1} z_i} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

Definindo as matrizes de espalhamento  $S_i$  abaixo:

$$S_i = \begin{bmatrix} e^{-i\beta_{i+1} z_i} & e^{i\beta_{i+1} z_i} \\ n_{i+1} e^{-i\beta_{i+1} z_i} & -n_{i+1} e^{i\beta_{i+1} z_i} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-i\beta_i z_i} & e^{i\beta_i z_i} \\ n_i e^{-i\beta_i z_i} & -n_i e^{i\beta_i z_i} \end{bmatrix} \quad (6)$$

podemos escrever a equação na forma:

$$\begin{pmatrix} A_{i+1} \\ B_{i+1} \end{pmatrix} = S_i \begin{pmatrix} A_i \\ B_i \end{pmatrix}. \quad (7)$$

↪ Este conjunto de equações pode ser resolvido para determinar o coeficiente de transmissão  $\tau$  e reflexão  $\rho$  da estrutura, bem como sua refletividade  $R = |\rho|^2$  e transmissividade  $T = 1 - R$ :

↪ Se em  $z = z_1 = 0$  conhecemos  $A_1$ , podemos normalizar todas as amplitudes por  $A_0$ , definindo assim:

$$\rho = \frac{B_1}{A_1}, \quad (8)$$

$$\tau = \frac{A_{N+1}}{A_1}, \quad (9)$$

$$\begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} = S_N S_{N-1} S_{N-1} \dots S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix}. \quad (10)$$

↪ Duas situações são de bastante interesse prático:

1) O acoplador de  $\lambda/4$ ;

2) Uma simplificação do panorama geral, restringindo o problema a estruturas periódicas de índice de refração  $n_1$  e  $n_2$  e espessura das camadas constante  $a$  e  $b$ .



↪ Primeiro Caso: O Acoplador de  $\lambda/4$ .

Imaginemos uma estrutura formada por dois meios semi-infinitos em  $z < 0$  e  $z > d$ , com índices de refração  $n_1$  e  $n_3$ , separados por um meio de espessura  $d$  e índice de refração  $n_2$ .

Utilizando a teoria descrita acima podemos calcular as matrizes  $S$ . Veja que o número de matrizes corresponde ao número de interfaces entre materiais diferentes. Nesse caso temos apenas 2 interfaces, correspondendo a  $z = 0$  e  $z = d$ .

$$S_1 = \frac{1}{2n_2} \begin{bmatrix} n_1 + n_2 & -n_1 + n_2 \\ -n_1 + n_2 & n_1 + n_2 \end{bmatrix}$$

$$S_2 = \frac{1}{2n_3} \begin{bmatrix} (n_2 + n_3)e^{-ik_0d(n_2-n_3)} & (-n_2 + n_3)e^{ik_0d(n_2+n_3)} \\ (-n_2 + n_3)e^{ik_0d(n_2+n_3)} & (n_2 + n_3)e^{-ik_0d(n_2-n_3)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} = S_2 S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ \rho \end{pmatrix} .$$

↪ Podem ser utilizados softwares como Mathematica, Matlab, ou outros para resolver essas equações.

Nesse caso a solução é dada por:

$$\tau = \frac{4e^{ik_0n_3d}n_1n_2}{(n_1+n_2)(n_2+n_3)e^{ik_0n_2d} + (n_1-n_2)(n_2-n_3)e^{-ik_0n_2d}} \quad (11)$$

$$\rho = \frac{(n_1-n_2)(n_2+n_3)e^{ik_0n_2d} + (n_1+n_2)(n_2-n_3)e^{-ik_0n_2d}}{(n_1+n_2)(n_2+n_3)e^{ik_0n_2d} + (n_1-n_2)(n_2-n_3)e^{-ik_0n_2d}} \quad (12)$$

↪ Lembrando que a refletividade é dada por  $R = |\rho|^2 = \rho\rho^*$ , temos:

$$R = \frac{n_2^2(n_1-n_3)^2 \cos^2(k_0n_2d) + (n_2^2 - n_1n_3)^2 \sin^2(k_0n_2d)}{n_2^2(n_1+n_3)^2 \cos^2(k_0n_2d) + (n_2^2 + n_1n_3)^2 \sin^2(k_0n_2d)} \quad (13)$$

↪ Um acoplador perfeito entre os meios  $n_1$  e  $n_3$ , sendo  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  diferentes entre si, é aquele para o qual a onda incidente do meio  $n_1$  é totalmente transmitida para o meio  $n_3$ , ou seja, não ocorre reflexão.

↪ Nesse caso,  $R = 0!!$  Para que isso ocorra, lembrando a expressão para  $R$

$$R = \frac{n_2^2(n_1 - n_3)^2 \cos^2(k_0 n_2 d) + (n_2^2 - n_1 n_3)^2 \sin^2(k_0 n_2 d)}{n_2^2(n_1 + n_3)^2 \cos^2(k_0 n_2 d) + (n_2^2 + n_1 n_3)^2 \sin^2(k_0 n_2 d)}$$

observe que o denominador é sempre positivo e nesse caso devemos anular o numerador. Ora, se o seno e o cosseno não são nulos para um mesmo valor angular  $k_0 n_2 d$  e  $n_1 \neq n_3$ , só resta uma alternativa:

$$n_2^2 = n_1 n_3$$

$$\cos(k_0 n_2 d) = 0 ,$$

o que ocorre para argumento múltiplo ímpar de  $\pi/2$ , ou seja, sendo  $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ :

$$k_0 n_2 d = \frac{2m+1}{2} \frac{\pi}{2}, m = 0, 1, 2, \dots \implies d = \frac{2m+1}{2} \frac{\lambda_0}{4n_2} .$$

↪ Observe que se  $m = 0$ , então uma camada  $d = \lambda_0 / (4n_2)$  e  $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$  é um acoplador perfeito. no comprimento de ondas  $\lambda_0$ .

↪ Observe ainda que o acoplamento perfeito somente se dá na frequência de projeto, ou seja, aquela para a qual  $d = \lambda / 4 = \lambda_0 / (4n_2)$ . Em outras frequências o comprimento de ondas varia mas o comprimento físico  $d$  da camada obviamente não!!

↪ Na verdade a transmissão óptica será máxima para todos os valores de comprimento de ondas  $\lambda$  que satisfazem a condição de máxima transmissão, ou seja, para

$$\lambda = \frac{8n_2 d}{2m + 1}, m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

sendo  $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ , é claro.

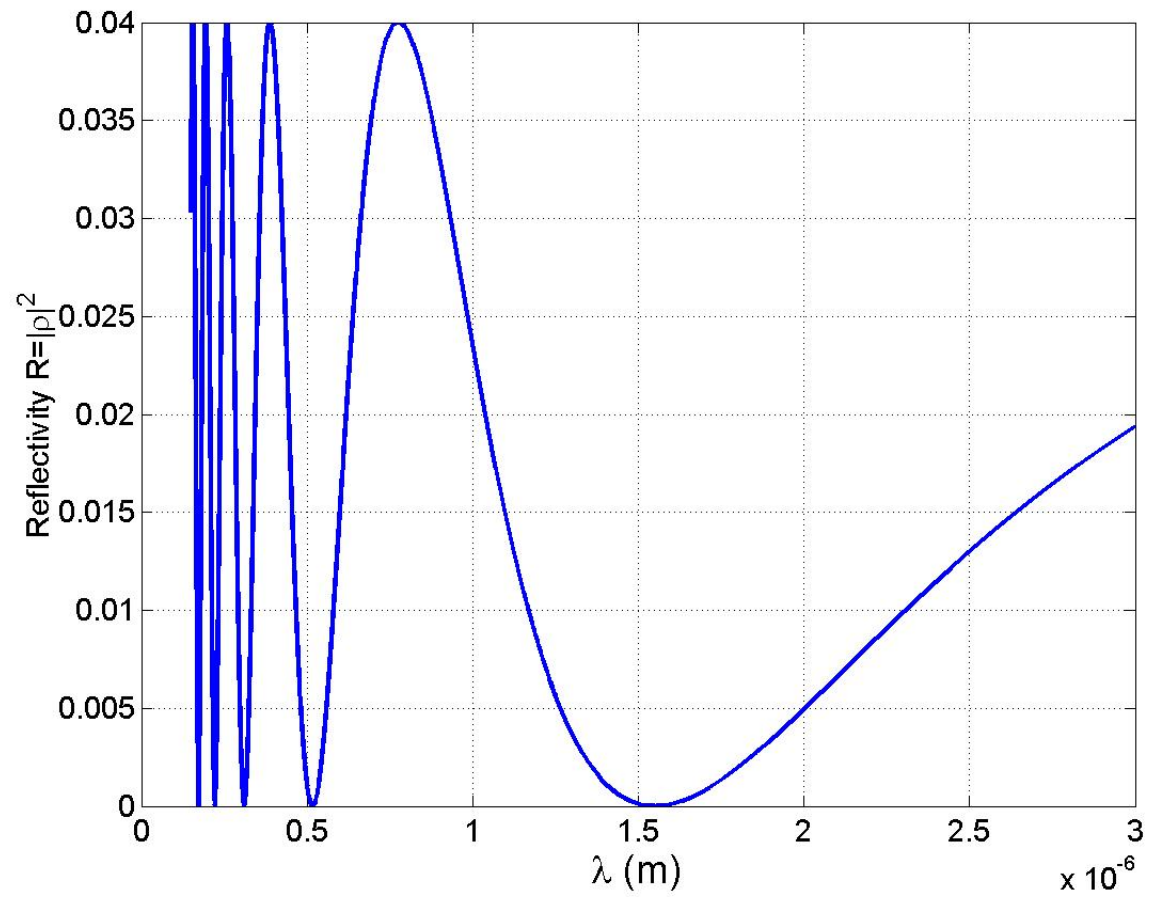


Figure 2: Refletividade em função do comprimento de ondas  $\lambda_0$ .  $n_1 = 1$  e  $n_3 = 1.5$ .

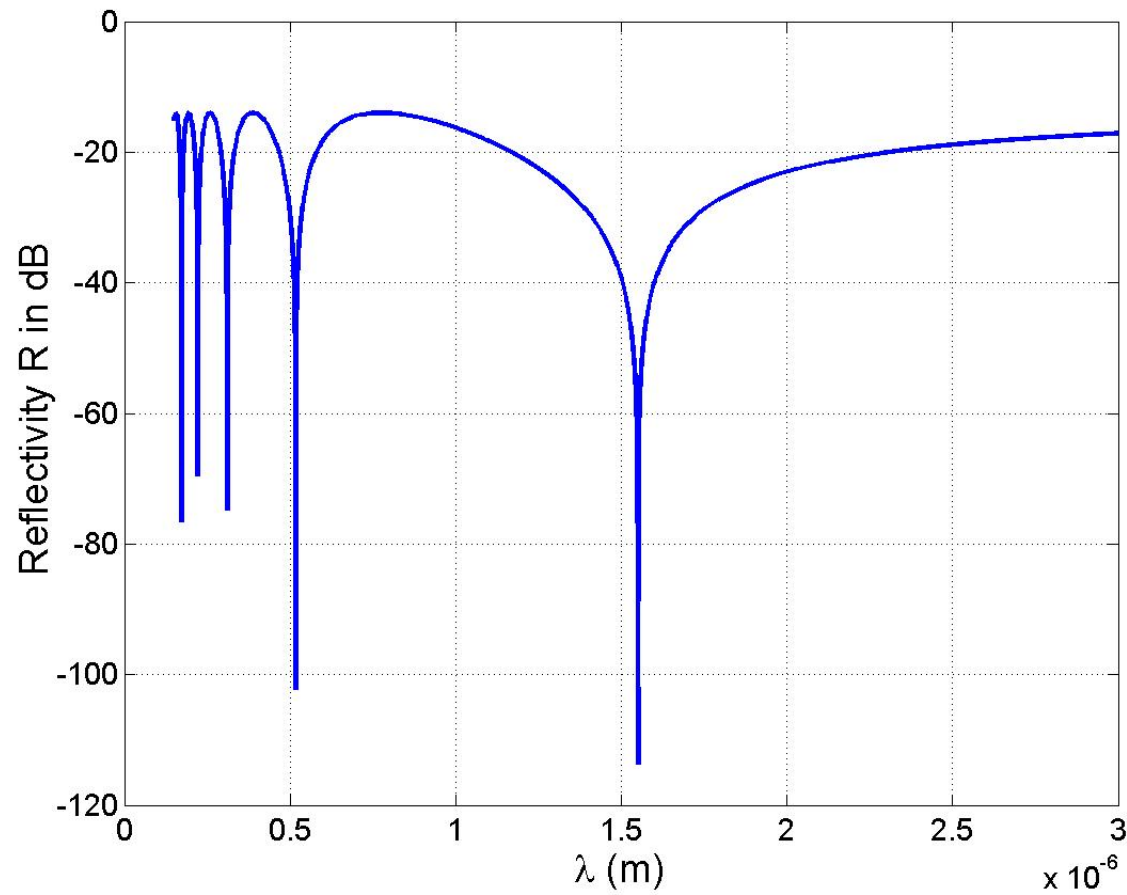


Figure 3: Refletividade em função do comprimento de ondas  $\lambda_0$  em escala de dB.  $n_1 = 1$  e  $n_3 = 1.5$ ,  $d = 1.55/(4n_2) \mu\text{m}$ .

↪ Observa-se uma característica de filtro passa-faixa nesse acoplador, uma vez que será transmitido a parte do espectro de sinal que satisfaz a condição.

$$\lambda = \frac{8n_2d}{2m+1}, m = 0, 1, 2, 3...$$

↪ Acopladores são fundamentais em emendas entre materiais diferentes, entre a fonte de potência óptica e a fibra, etc, minimizando assim as perdas.

↪ Existem outros tipos de acopladores, incluindo-se aí acopladores através de prismas como os mais importantes. Vários destes tem por princípio o acoplamento através de ondas evanescentes.

↪ A inclusão de mais camadas e a relação entre índices de refração e espessura dessas camadas permite modificar as características de filtragem.

↪ Segundo Caso: Filtro Periódico

↪ Considerando-se um filtro construído por uma estrutura periódica na forma  $n_1 - n_2 - n_1 - n_2 \dots n_1 - n_2 - n_1$  com  $N$  camadas, de espessura  $a$  para o meio  $n_1$  e  $b$  para o meio  $n_2$  e assumindo

↪ Usualmente  $n_2 = n_1(1 - \Delta)$  com

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \ll 1 .$$

↪ Nesse caso um filtro eficiente precisa ter um grande número de camadas

↪ Abaixo reescrevemos as matrizes  $S_i$  na forma:

$$S_i = \frac{1}{2n_{i+1}} \begin{bmatrix} (n_{i+1} + n_i)e^{ik_0(n_{i+1}-n_i)z_i} & (n_{i+1} - n_i)e^{ik_0(n_{i+1}+n_i)z_i} \\ (n_{i+1} - n_i)e^{-ik_0(n_{i+1}+n_i)z_i} & (n_{i+1} + n_i)e^{-ik_0(n_{i+1}-n_i)z_i} \end{bmatrix} \quad (14)$$



Definindo os coeficientes de transmissão e reflexão para uma interface simples, entre dois meios:

$$\tau_i = \frac{2n_{i+1}}{n_{i+1} + n_i}, \quad (15)$$

$$\rho_i = \frac{n_{i+1} - n_i}{n_{i+1} + n_i} \quad (16)$$

podemos reescrever  $S_i$  na forma que segue:

$$S_i = \frac{1}{\tau_i} \begin{bmatrix} e^{i\rho_i\phi_i} & \rho_i e^{i\phi_i} \\ \rho_i e^{-i\phi_i} & e^{-i\rho_i\phi_i} \end{bmatrix} \quad (17)$$

onde

$$\phi_i = k_0(n_{i+1} + n_i)z_i$$

é a fase adquirida na  $i$ -ésima camada. Definindo  $S = \prod_{i=1}^N S_i$ , pode-se mostrar que:

$$\tau = \frac{\det(S)}{S_{22}} = \frac{1}{S_{22}} \prod_{i=1}^N \frac{1}{\tau_i^2} (1 - \rho_i^2), \quad (18)$$

$$\rho = -\frac{S_{21}}{S_{22}}. \quad (19)$$

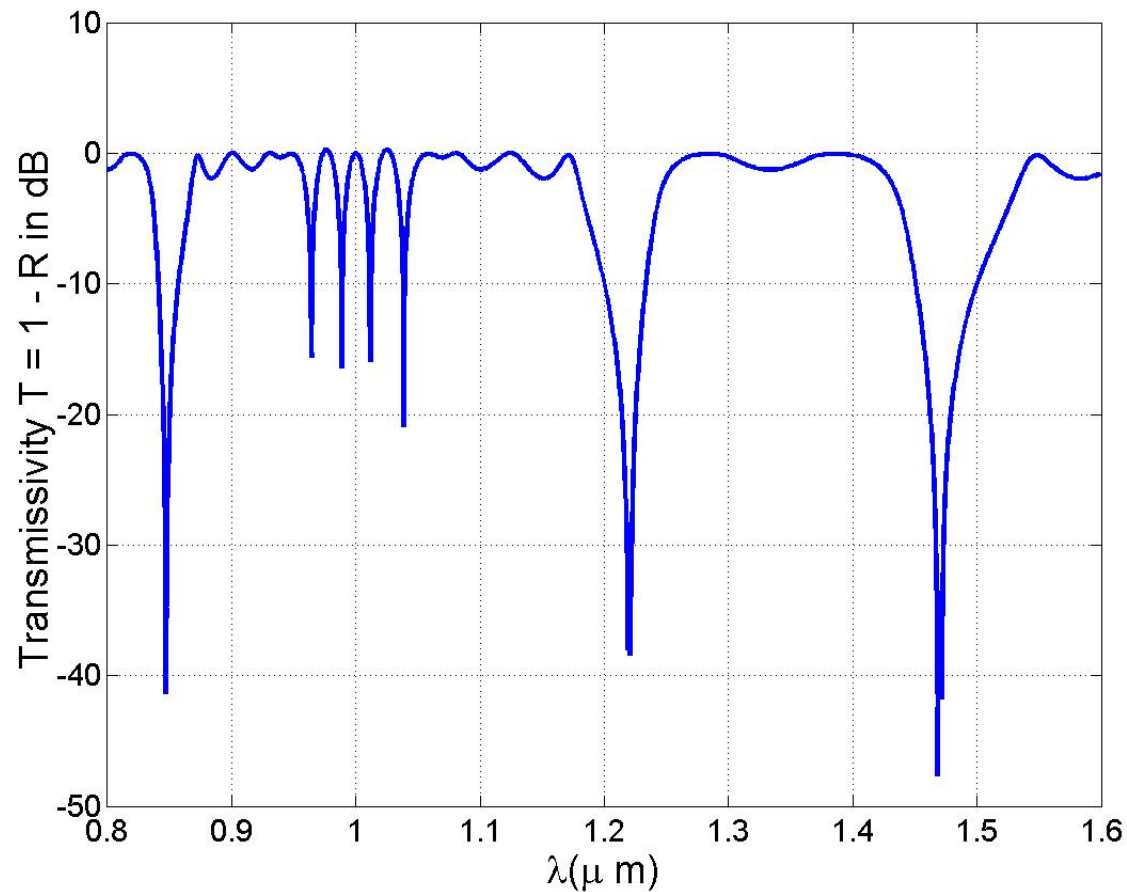


Figure 4: Transmissividade de um filtro em função do comprimento de ondas  $\lambda_0$  em escala de dB. Parâmetros foram escolhidos  $N = 6$  interfaces,  $n_1 = 1$  e  $n_2 = 2$ ,  $a = b = 1\mu\text{m}$ .

# Teoria dos Modos Acoplados

## 1) *Simetrias dos Guias de Ondas*

↪ Um guia de ondas tem usualmente as propriedades de simetria de translação ao longo de  $z$ , inversão  $z \rightarrow -z$  e a simetria de inversão temporal  $t \rightarrow -t$ .

↪ Simetria de translação em  $z$  significa que a seção transversal do guia se mantém invariante ao longo desse eixo.

↪ Simetria de inversão em  $z$  significa que a propagação para  $+z$  ou  $-z$  são equivalentes;

↪ A simetria de inversão temporal está associada a relações entre os campos transversais e longitudinais.

Vamos assumir, como na análise modal, que  $\partial/\partial t = i\omega$  e  $\partial/\partial z = -i\beta$  para obter primeiramente soluções da forma:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + E_z \hat{\mathbf{a}}_z = (\vec{\mathcal{E}}_\perp + \mathcal{E}_z \hat{\mathbf{a}}_z) e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (20)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + H_z \hat{\mathbf{a}}_z = (\vec{\mathcal{H}}_\perp + \mathcal{H}_z \hat{\mathbf{a}}_z) e^{i(\omega t - \beta z)}, \quad (21)$$

onde  $\vec{\mathcal{E}}_\perp, \mathcal{E}_z, \vec{\mathcal{H}}_\perp, \mathcal{H}_z$  são funções apenas das coordenadas transversais.

Fazendo-se a decomposição transverso-longitudinal das equações de Maxwell, assumindo-se , obtemos em meios não magnéticos sem cargas livres:

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{E}_\perp = i\beta E_z \quad (22)$$

$$\nabla_\perp \cdot \mathbf{H}_\perp = i\beta H_z \quad (23)$$

$$\nabla_\perp \times \mathbf{E}_\perp = -i\omega\mu_0 H_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (24)$$

$$\nabla_\perp \times \mathbf{H}_\perp = i\omega\epsilon E_z \hat{\mathbf{a}}_z \quad (25)$$

$$(\nabla_\perp E_z + i\beta \mathbf{E}_\perp) \times \hat{\mathbf{a}}_z = -i\omega\mu_0 \mathbf{H}_\perp, \quad (26)$$

$$(\nabla_\perp H_z + i\beta \mathbf{H}_\perp) \times \hat{\mathbf{a}}_z = i\omega\epsilon \mathbf{H}_\perp. \quad (27)$$

A) Simetria de inversão em  $z$ :

$\rightsquigarrow$  Note que fazer a mudança  $z \rightarrow -z$ , faz com que  $\partial/\partial z = -i\beta \rightarrow -\partial/\partial z = -i(-\beta)$

$\rightsquigarrow$  Trocar  $z$  por  $-z$  corresponde a trocar  $\beta$  por  $-\beta$ , ou seja, trocar ondas propagantes por ondas contra-propagantes.

Para que o conjunto de equações sejam válidas com a troca  $\beta \rightarrow -\beta$  devemos fazer:

$$\vec{\mathcal{E}}_{\perp} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{\perp} \quad , \quad \vec{\mathcal{H}}_{\perp} \rightarrow -\vec{\mathcal{H}}_{\perp} \quad ,$$

$$\mathcal{E}_z \rightarrow -\mathcal{E}_z \quad , \quad \mathcal{H}_z \rightarrow \mathcal{H}_z \quad .$$

$\rightsquigarrow$  Veja que estas mudanças fazem todo o sentido uma vez que o valor médio do vetor de Poynting, que propagava para  $+z$ , deve ser revertido para  $-z$ :

$$S_z = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{\mathcal{E}}_{\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{\perp}^*) \rightarrow -S_z = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{\mathcal{E}}_{\perp} \times (-\vec{\mathcal{H}}_{\perp}^*)]$$

B) Simetria de reversão temporal,  $t \rightarrow -t$  ou Conjugação Complexa:

$\leadsto$  Note que fazer a mudança  $t \rightarrow -t$  equivale à conjugação complexa do fator  $e^{i\omega t} \rightarrow e^{-i\omega t}$ , ou ainda à substituição  $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ .

Tomando-se a conjugação complexa das equações de Maxwell:

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{E}_{\perp}^* = i\omega\mu_0 H_z^* \hat{\mathbf{a}}_z \quad (28)$$

$$\nabla_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp}^* = -i\omega\epsilon E_z^* \hat{\mathbf{a}}_z \quad (29)$$

$$(\nabla_{\perp} E_z^* - i\beta \mathbf{E}_{\perp}^*) \times \hat{\mathbf{a}}_z = i\omega\mu_0 \mathbf{H}_{\perp}^* , \quad (30)$$

$$(\nabla_{\perp} H_z^* - i\beta \mathbf{H}_{\perp}^*) \times \hat{\mathbf{a}}_z = -i\omega\epsilon \mathbf{H}_{\perp}^* . \quad (31)$$

e comparando com as equações originais podemos ver que:

$$\vec{\mathcal{E}}_{\perp} \rightarrow \vec{\mathcal{E}}_{\perp}^* \quad , \quad \vec{\mathcal{H}}_{\perp} \rightarrow \vec{\mathcal{H}}_{\perp}^* ,$$

$$\mathcal{E}_z \rightarrow -\mathcal{E}_z^* \quad , \quad \mathcal{H}_z \rightarrow -\mathcal{H}_z^* .$$

também satisfazem as equações de Maxwell.

↪ Observe que podemos escolher as funções transversais apropriadamente tais que

$$\vec{\mathcal{E}}_{\perp} = \vec{\mathcal{E}}_{\perp}^*$$

$$\vec{\mathcal{H}}_{\perp} = \vec{\mathcal{H}}_{\perp}^*$$

o que implica que estas funções transversais são puramente reais, ao passo que

$$\mathcal{E}_z = -\mathcal{E}_z^*$$

$$\mathcal{H}_z = -\mathcal{H}_z^* .$$

implica que essas funções longitudinais serão funções imaginárias puras.

## 2) O teorema de reciprocidade de Lorentz

Para a demonstração desse teorema, é necessário considerar dois conjuntos de soluções para as equações de Maxwell, para dois problemas distintos, em meios não magnéticos mas com permissividades dielétricas  $\epsilon$  e  $\epsilon'$ , respectivamente:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H} , \quad (32)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E} , \quad (33)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}' = -i\omega\mu_0\mathbf{H}' , \quad (34)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}' = i\omega\epsilon'\mathbf{E}' , \quad (35)$$

↪ A idéia, conforme veremos adiante, é conectar dois conjuntos de soluções das equações de Maxwell para problemas distintos, de tal forma que um conjunto de soluções de um dos problemas físicos seja previamente conhecido, para podermos utilizá-las na obtenção da solução do outro problema.

↪ Em geral,  $\epsilon$  e  $\epsilon'$  são permissividades dielétricas muito semelhantes, mas  $\epsilon' = \epsilon + \delta\epsilon$ , tal que  $\delta\epsilon$  é uma perturbação ao problema original.



~> Pede-se ao leitor que com o uso da identidade vetorial abaixo:

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \nabla \times \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$

e das Equações de Maxwell, demonstre o seguinte resultado:

$$\nabla \cdot (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}' + \mathbf{E}' \times \mathbf{H}^*) = -i\omega(\epsilon' - \epsilon)\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}' , \quad (36)$$

conhecido como Teorema de Reciprocidade de Lorentz, que pode ser aplicado para duas soluções de campos eletromagnéticos, seja no mesmo meio, e nesse caso  $\epsilon' = \epsilon$ , anulando assim o termo à direita, ou para quaisquer meios distintos desde que sejam não magnéticos. Pode-se construir um teorema similar para o caso mais geral, mas aqui não vem ao caso.

Aplicando o Teorema de Gauss chega-se facilmente ao seguinte:

$$\oint (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}' + \mathbf{E}' \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{a} = -i\omega \int_V (\epsilon' - \epsilon)\mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}' dV , \quad (37)$$

~> Considerando o caso especial de um guia de ondas conforme a figura que segue, podemos realizar a integral de superfície fechada, para um cilindro de raio  $r \rightarrow \infty$  mas com altura  $\Delta z$  infinitesimal:

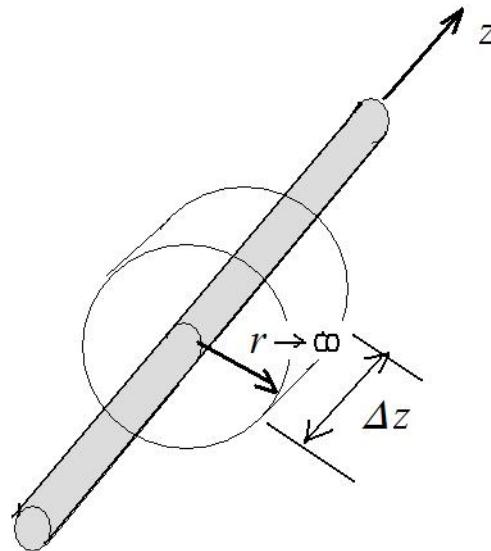


Figure 5: Figura para análise da do Teorema de Reciprocidade de Lorentz em um guia de ondas.

↪ Definindo a função  $\mathbf{F}(x, y, z)$  na forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}' + \mathbf{E}' \times \mathbf{H}^* ,$$

observe que a superfície lateral do cilindro de integração, mostrado na figura anterior não deve contribuir, uma vez que se  $r \rightarrow \infty$ , em um guia de ondas os campos devem se anular no infinito, pois deseja-se o confinamento do campo na região do guia. Nesse caso, somente duas superfícies contribuem, situadas em  $z$  e  $z + \Delta z$  e apontando para  $-\hat{\mathbf{a}}_z$  e  $+\hat{\mathbf{a}}_z$ , respectivamente.

A componente  $z$  da função  $\mathbf{F}$  pode ser calculada simplesmente por:

$$F_z = (\mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{H}'_{\perp} + \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{H}'_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z ,$$

Temos então:

$$\int_S [F(x, y, z + \Delta z) - F(x, y, z)] dS = -i\omega \int_V (\epsilon' - \epsilon) \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}' dV , \quad (38)$$

↪ Uma vez que  $\Delta z$  possa ser feito infinitesimal e  $dV = dS dz$ , temos finalmente:

$$\int_S \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{H}'_{\perp} + \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{H}'_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z dS = -i\omega \int_S (\epsilon' - \epsilon) \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{E}' dS . \quad (39)$$

que é o resultado útil.

### 3) Relações de Ortogonalidade dos Modos

~> Utilizando a última expressão, podemos fazer  $\epsilon' = \epsilon$ . Nesse caso, suponha que sejam conhecidos todos os modos eletromagnéticos de um guia de ondas, para o problema com permissividade dielétrica  $\epsilon$ .

Observando a equação:

$$\int_S \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{H}_{\perp} + \mathbf{E}_{\perp} \times \mathbf{H}'_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z dS = 0 \quad (40)$$

vamos indexar cada modo por um índice  $m$  ou  $n$ , e escolher :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_n \\ \vec{\mathcal{H}}_n \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \beta_n z)},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{H}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_m \\ \vec{\mathcal{H}}_m \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \beta_m z)},$$

tal que:

$$(\beta_n - \beta_m) \int_S (\vec{\mathcal{E}}_{n\perp}^* \times \vec{\mathcal{H}}_{m\perp} + \vec{\mathcal{E}}_{m\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{n\perp}^*) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z dS = 0, \quad (41)$$

~> Pede-se ao leitor demonstrar esse último resultado.

$\rightsquigarrow$  Se  $m = n$  então  $\beta_m = \beta_n$  e a equação se anula naturalmente. É importante observar que os modos  $-m$  são os contrapropagantes, ou seja, podemos fazer  $m = \dots -3, -2, -1, 1, 2, 3\dots$  onde os positivos são para modos propagantes e  $\beta_m = -\beta_{-m}$ .

$\rightsquigarrow$  Para  $m \neq n$  então:

$$\int_S (\vec{\mathcal{E}}_{n\perp}^* \times \vec{\mathcal{H}}_{m\perp} + \vec{\mathcal{E}}_{m\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{n\perp}^*) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z dS = 0 .$$

ou seja, dois modos distintos são ortogonais entre si, e a relação de ortogonalidade é definida através da equação acima!!

No caso em que  $m = n$  podemos normalizar a integral de tal forma que o resultado final é:

$$\int_S (\vec{\mathcal{E}}_{n\perp}^* \times \vec{\mathcal{H}}_{m\perp} + \vec{\mathcal{E}}_{m\perp} \times \vec{\mathcal{H}}_{n\perp}^*) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z dS = \text{sgn}(n) \delta_{mn} . \quad (42)$$

#### 4) *Expansão de Campos em Modos: Acoplamento*

↪ Agora vamos utilizar os conceitos e resultados obtidos até o momento para determinar a solução de um problema ainda não resolvido a partir de modos de propagação já previamente determinados em um problema conhecido.

↪ Geralmente  $\varepsilon'$  não deve diferir muito de  $\varepsilon$ . Nesse caso podemos expandir a solução desconhecida de um problema em séries na forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{H}' \end{pmatrix} = \sum_m a_m(z) \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_m \\ \vec{\mathcal{H}}_m \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \beta_m z)}, \quad (43)$$

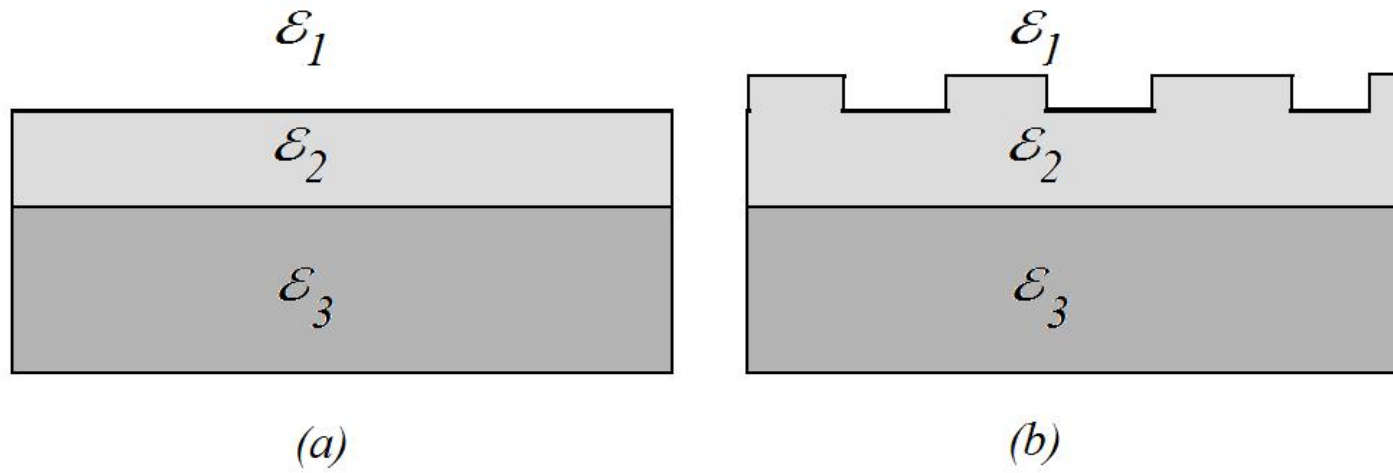


Figure 6: Exemplo típico de perturbação. Conhece-se a solução de (a) e com ela pode-se expandir os campos do problema em (b), supondo que a perturbação seja pequena.

~> Utilizando o teorema de reciprocidade na forma abaixo:

$$\int_S \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{H}'_{\perp} + \mathbf{E}'_{\perp} \times \mathbf{H}'_{\perp}) \cdot \hat{\mathbf{a}}_z dS = -i\omega \int_S (\epsilon' - \epsilon) \mathbf{E}' \cdot \mathbf{E}' dS .$$

e as relações de ortogonalidade, fazendo as seguintes escolhas

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{H}' \end{pmatrix} = \sum_m a_m(z) \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_m \\ \vec{\mathcal{H}}_m \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \beta_m z)} ,$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_n \\ \vec{\mathcal{H}}_n \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \beta_n z)} ,$$

pode-se mostrar que:

$$\frac{da_n}{dz} = -i \sum_m a_m e^{-i(\beta_m - \beta_n)z} C_{mn} , \quad (44)$$

$$C_{mn} = \frac{\omega}{2} \text{sgn}(n) \int_S (\epsilon' - \epsilon) \vec{\mathcal{E}}_m \cdot \vec{\mathcal{E}}_n^* dS .$$



## 5) *Aplicações e Exemplos*

Podemos citar várias aplicações práticas da óptica integrada onde é necessária a utilização da teoria dos modos acoplados:

~> Redes de Bragg na Fibra (FBG - Fiber Bragg Gratings)- Filtros Rejeita-Faixa

~> Redes de Período Longo (LPG - Long Period Gratings)

~> Acopladores de Potência, Circuladores e Splitters

~> Refletores e espelhos ópticos

## Exemplo 1: A rede refletora - Rede de Bragg no guia SLAB

→ Estrutura típica é realizada em um guia SLAB, conforme a figura abaixo:

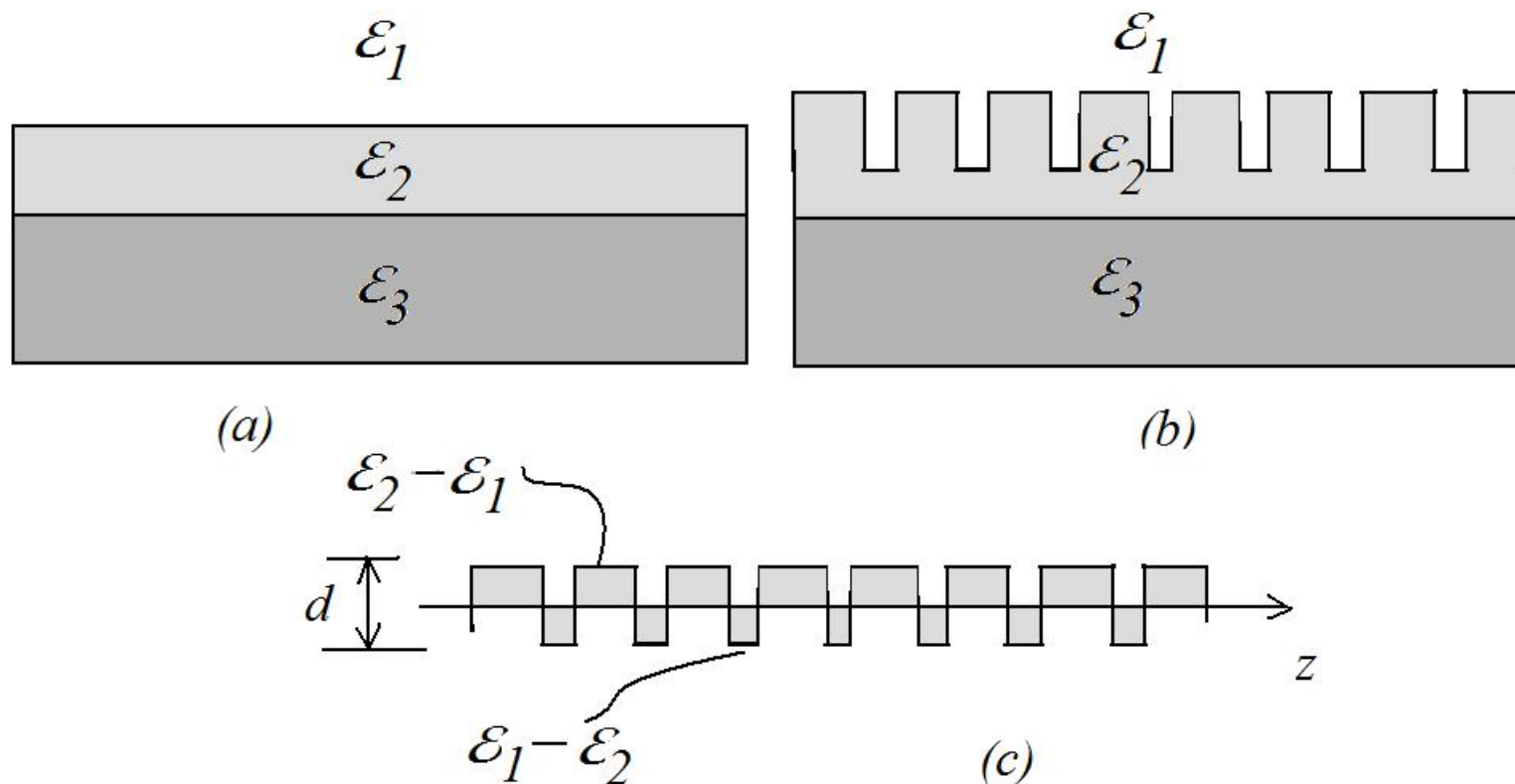


Figure 7: (a) Guia de ondas SLAB não perturbado; (b) Guia SLAB com perturbação periódica; (c) Função de perturbação  $\Delta\epsilon = \epsilon' - \epsilon$ .

↪ Se a camada dielétrica de permissividade  $\epsilon_2$  tem espessura  $L$ , então a perturbação ocorre na região  $W - \frac{d}{2} \leq x \leq W + \frac{d}{2}$ , onde a dimensão  $d$  satisfaz  $d < W/2$ .

↪ É possível expandir a perturbação da permissividade dielétrica  $\Delta\epsilon$  em séries de Fourier, conforme abaixo:

$$\Delta\epsilon(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta\epsilon_n \cos\left(\frac{2\pi n z}{\Lambda}\right), \quad W - \frac{d}{2} \leq x \leq W + \frac{d}{2}$$

e  $\Delta\epsilon(x, z) = 0$  para fora da região  $W - \frac{d}{2} \leq x \leq W + \frac{d}{2}$ .  $\Lambda$  é o período da rede e

$$\Delta\epsilon_n = \begin{cases} \frac{4(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\pi n}, & n \text{ ímpar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases}$$

↪ A região  $\epsilon_3$  é dito substrato em uma construção prática. A sua permissividade ajuda a definir os modos do guia não perturbado, mas não aparece explicitamente na perturbação.

↪ Assumindo-se que a perturbação seja pequena, ou seja,  $d \ll W$ , os coeficientes  $C_{mn}$  serão dados por:

$$C_{mn} \approx \frac{\omega}{2} \text{sgn}(n) d \Delta\epsilon(z) \int_0^{L_y} \vec{\mathcal{E}}_m(W, y) \cdot \vec{\mathcal{E}}_n^*(W, y) dy.$$

↪ Uma vez que o princípio de superposição se aplica, podemos trabalhar cada componente da expansão em Fourier da função  $\Delta\varepsilon(z)$  separadamente. A solução completa é a soma de todas as contribuições individuais.

↪ Por simplicidade vamos considerar então uma componente apenas. Obviamente o primeiro termo da série é mais significativo e por isso vamos negligenciar os outros termos:

$$\Delta\varepsilon(z) = \frac{4(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\pi} \cos\left(\frac{2\pi z}{\Lambda}\right)$$

↪ Via de regra, a equação para a amplitude  $a_n$  do modo  $n$ -ésimo acopla esse modo a todos os outros modos disponíveis. Vamos assumir que o guia não-perturbado suporta o modo propagante  $n$  e o modo contra-propagante  $-n$  e que estes se acoplam mais fortemente entre si na presença de perturbação. Naturalmente os coeficientes  $C_{mn}$  para o acoplamento entre outros modos devem ser muito menores, de tal forma que:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{H}' \end{pmatrix} = a_n(z) \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_n \\ \vec{\mathcal{H}}_n \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \beta_n z)} + a_{-n}(z) \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_{-n} \\ \vec{\mathcal{H}}_{-n} \end{pmatrix} e^{i(\omega t + \beta_n z)},$$

Vamos escrever explicitamente as equações para  $a_n$  e  $a_{-n}$ .

$$\frac{da_n}{dz} = -i[C_{n,n}a_n + C_{-n,n}a_{-n}e^{2i\beta_n z}] , \quad (45)$$

$$\frac{da_{-n}}{dz} = -i[C_{-n,-n}a_{-n} + C_{n,-n}a_n e^{-2i\beta_n z}] , \quad (46)$$

Lembrando das relações de simetria para modos propagantes e contra-propagantes,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}_{\perp,-n} &= \vec{\mathcal{E}}_{\perp,n} \quad , \quad \vec{\mathcal{H}}_{\perp,-n} = -\vec{\mathcal{H}}_{\perp,n} \\ \mathcal{E}_{z,-n} &= -\mathcal{E}_{z,n} \quad , \quad \mathcal{H}_{z,-n} = \mathcal{H}_{z,n} \end{aligned}$$

podemos mostrar facilmente que

$$C_{-n,n} = C_{n,n} = C_0 \cos(\gamma z)$$

$$C_{-n,-n} = C_{n,-n} = -C_0 \cos(\gamma z)$$

com a definição  $\gamma = 2\pi/\Lambda$  e:

$$C_0 = \frac{2\omega d(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\pi} \int_0^{L_y} \left| \vec{\mathcal{E}}_n(W, y) \right|^2 dy .$$

↪ Reescrevendo o conjunto de equações temos:

$$\frac{da_n}{dz} = -iC_0[a_n \cos(\gamma z) + a_{-n} \cos(\gamma z) e^{2i\beta_n z}] , \quad (47)$$

$$\frac{da_{-n}}{dz} = iC_0[a_{-n} \cos(\gamma z) + a_n \cos(\gamma z) e^{-2i\beta_n z}] , \quad (48)$$

↪ O problema todo agora está em resolver o conjunto de equações diferenciais, com condições de contorno previamente estabelecidas. Fisicamente, veja que se a rede tem comprimento total  $L$  ao longo de  $z$ , podemos assumir conhecido o modo incidente, e sabemos que não há o modo contra-propagante para além de  $z = L$  se a excitação do guia é o modo propagante, ou seja:

$$a_n(z = 0) = A_0 \quad , \quad a_{-n}(z = L) = 0 .$$

Utilizando a identidade:

$$\cos(\gamma z) = \frac{e^{i\gamma z} + e^{-i\gamma z}}{2},$$

podemos reescrever as equações

$$\frac{da_n}{dz} = -i\frac{C_0}{2} \left[ a_n \frac{e^{i\gamma z} + e^{-i\gamma z}}{2} + a_{-n} \frac{e^{i\gamma z} + e^{-i\gamma z}}{2} e^{2i\beta_n z} \right], \quad (49)$$

$$\frac{da_{-n}}{dz} = i\frac{C_0}{2} \left[ a_{-n} \frac{e^{i\gamma z} + e^{-i\gamma z}}{2} + a_n \frac{e^{i\gamma z} + e^{-i\gamma z}}{2} e^{-2i\beta_n z} \right], \quad (50)$$

↪ Realizando os produtos, observe que as frequências dos termos exponenciais serão:

$$\gamma, \gamma + 2\beta_n, \quad e^{2\beta_n - \gamma},$$

sendo  $\beta_n > 0$ . Se fizermos a integração em  $z$  do sistema acima, os termos de oscilação mais rápida serão aqueles com frequência  $\gamma, \gamma + 2\beta_n$ , e cuja contribuição para o resultado tende para zero.

Lembre-se que termos oscilatórios muito rápidos quando integrados (= somados) tendem a se cancelar!!

Podemos então reter somente os termos cuja frequência de oscilação é mais lenta, reduzindo nosso trabalho para um sistema de equações mais simples:

$$\frac{da_n}{dz} = -i\frac{C_0}{2}a_{-n}e^{i(2\beta_n-\gamma)z}, \quad (51)$$

$$\frac{da_{-n}}{dz} = i\frac{C_0}{2}a_n e^{-i(2\beta_n-\gamma)z}, \quad (52)$$

Vamos adotar uma solução da forma

$$a_n = A_0 e^{i\gamma_n z}, \quad a_{-n} = B_0 e^{i\gamma_{-n} z},$$

definindo ainda  $\delta\beta = 2\beta_n - \gamma$ . De modo a eliminar as exponenciais no sistema resultante devemos ter a seguinte relação

$$\gamma_n = \gamma_{-n} + \delta\beta,$$

permitindo obter o seguinte conjunto de equações, aqui colocado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \gamma_n & C_0/2 \\ -C_0/2 & \gamma_n - \delta\beta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = 0$$



↪ A equação matricial somente tem solução desde que seu determinante seja nulo, de onde obtemos  $\gamma_n$  e  $\gamma_{-n}$ :

$$\gamma_n = \frac{\delta\beta}{2} \pm iQ, \quad (53)$$

$$\gamma_{-n} = -\frac{\delta\beta}{2} \pm iQ, \quad (54)$$

$$Q = \sqrt{\left(\frac{C_0}{2}\right)^2 - \left(\frac{\delta\beta}{2}\right)^2}, \quad (55)$$

↪ São duas raízes possíveis para as frequências  $\gamma_n$  e  $\gamma_{-n}$ !! Dessa forma podemos reescrever a solução:

$$a_{-n}(z) = e^{-i\delta\beta z/2} [B_1 e^{Qz} + B_2 e^{-Qz}]$$

Devemos anular o coeficiente  $a_{-n}(z)$  em  $z = L$ . Dessa forma obtém-se:

$$a_{-n}(z) = B_1 e^{-i\delta\beta z/2} \sinh[Q(z - L)].$$

↪ Uma vez conhecido  $a_{-n}(z)$  devemos determinar  $a_n(z)$  voltando ao sistema, que nos mostra que:

$$a_n(z) = -\frac{2ie^{i\delta\beta z}}{C_0} \frac{da_{-n}}{dz}$$

Tem-se finalmente:

$$a_{-n}(z) = B_1 e^{-i\delta\beta z/2} \sinh[Q(z-L)] , \quad (56)$$

$$a_n(z) = \frac{B_1}{C_0} e^{i\delta\beta z/2} [\delta\beta \sinh[Q(z-L)] - 2iQ \cosh[Q(z-L)]] , \quad (57)$$

Definindo as potências contidas na onda propagante e contra-propagante na forma abaixo:

$$P_+(z) = |a_n(z)|^2 , \quad P_-(z) = |a_{-n}(z)|^2 ,$$

Podemos definir o coeficiente de reflexão em  $z = 0$  e o coeficiente de transmissão para  $z = L$  na forma:

$$R = \frac{P_-(0)}{P_+(0)} ,$$

$$T = \frac{P_+(L)}{P_+(0)},$$

e temos:

$$R = \frac{(C_0/2)^2 \sinh^2(QL)}{Q^2 \cosh^2(QL) + (\delta\beta/2)^2 \sinh^2(QL)}.$$

Na condição de casamento de fase  $\delta\beta = 0$  e nesse caso tem-se:

$$R = \tanh^2(C_0L/2).$$

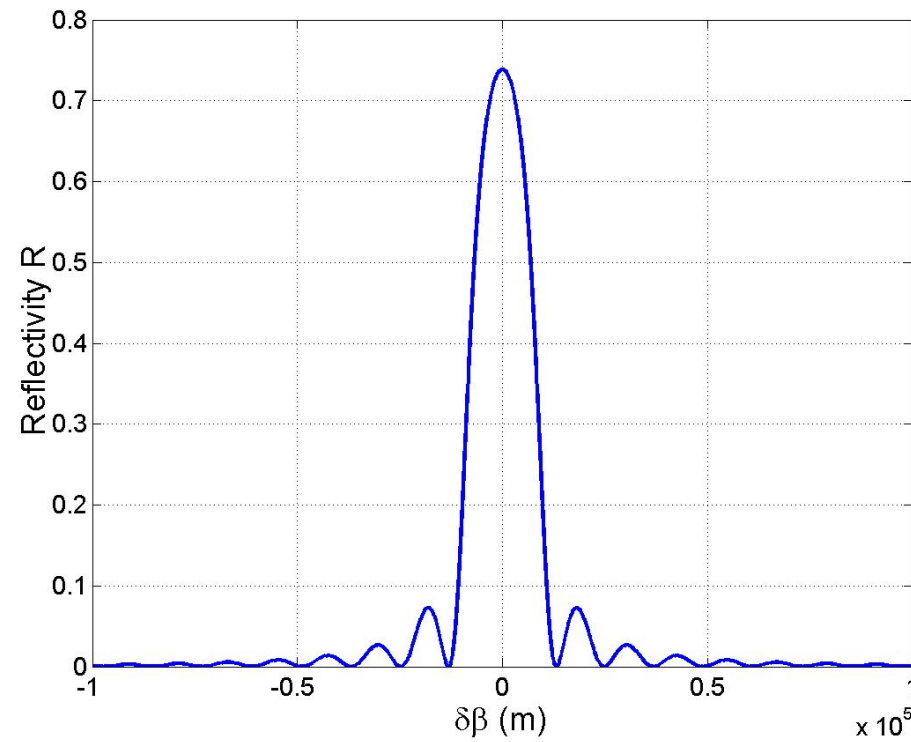


Figure 8: Refletividade de uma rede em função de  $\delta\beta$  com os seguintes parâmetros:  $C_0L = 5000$ ,  $L = 1000\Lambda$  e  $\Lambda = \lambda/3$ , sendo  $\lambda = 1.55\mu\text{m}$ .

↪ Observe que a refletividade máxima ocorre para  $\delta\beta = 0$ , que corresponde a fazer:

$$2\beta_n - \gamma = 0 ,$$

Uma vez que para o modo  $n$  podemos escrever  $\beta_n = k_0 n_{eff}$ , então:

$$2\frac{2\pi}{\lambda_0}n_{eff} - \frac{2\pi}{\Lambda} = 0$$

o que implica na relação

$$\lambda_0 = 2n_{eff}\Lambda ,$$

com o  $\lambda_0$  que satisfaz a equação acima denominado comprimento de onda de Bragg.

↪ O comprimento de onda  $\lambda_0$  que satisfaz a relação acima terá a máxima refletividade da rede.

↪ Guias Acoplados:

A geometria geral do problema é mostrada na figura abaixo:

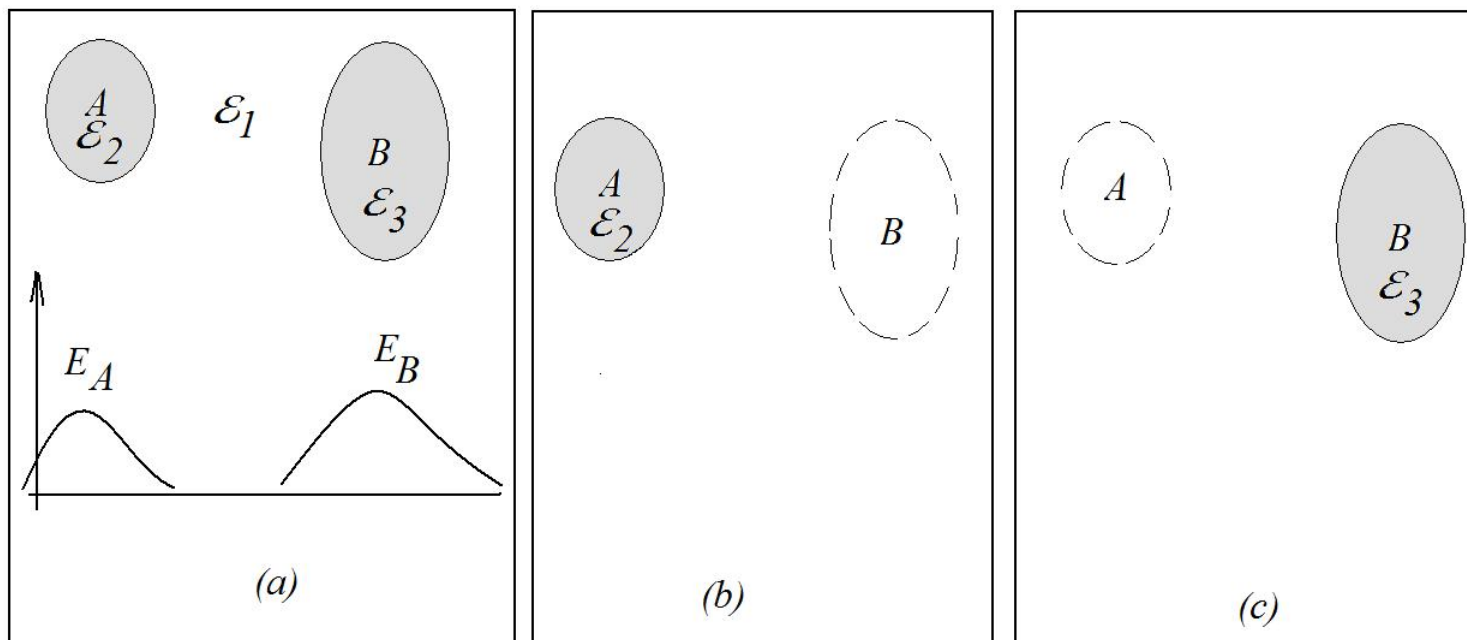


Figure 9: (a) Dois guias de onda próximos, sendo conhecidos os modos de A e B separadamente; (b) O guia A é a perturbação no espaço do guia B; (c) O guia B é a perturbação no espaço do guia A.

↪ Guias acoplados podem ser utilizados em várias aplicações como splitters, acopladores de potência, ou até mesmo moduladores ópticos.

↪ Para a solução do problema são necessários o conhecimento dos modos dos dois guias de ondas.

↪ Este problema deverá ser resolvido e está colocado na lista de exercícios. Por simplicidade assume-se que dois modos, um em cada guia apenas, acoplam-se e podemos expandir os campos na forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}' \\ \mathbf{H}' \end{pmatrix} = a_A(z) \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_A \\ \vec{\mathcal{H}}_A \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \beta_A z)} + a_B(z) \begin{pmatrix} \vec{\mathcal{E}}_B \\ \vec{\mathcal{H}}_B \end{pmatrix} e^{i(\omega t - \beta_B z)},$$

Pede-se para determinar os coeficientes  $a_A(z)$  e  $a_B(z)$ , com a condição inicial  $a_A(0) = A_0$  e  $a_B(0) = 0$ .