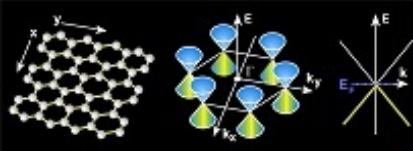


02 - TEORIAS DE DRUDE E SOMMERFELD DOS METAIS

PROF. CÉSAR AUGUSTO DARTORA - UFPR

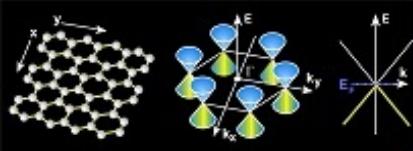
E-MAIL: CADARTORA@ELETTRICA.UFPR.BR

CURITIBA-PR



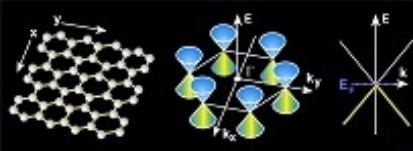
Roteiro do Capítulo:

- Teoria de Drude dos Metais
- O Modelo de Sommerfeld
- As falhas desses modelos



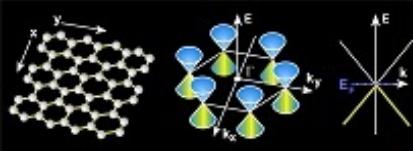
Teoria de Drude dos Metais

- ⇒ É um modelo dos metais baseado na Mecânica Clássica.
- ⇒ Proposto por Paul Drude em 1900, 3 anos após a descoberta do elétron por J.J. Thomson.
- ⇒ Trata o metal como um gás de elétrons livres movendo-se sobre um fundo de carga positiva, que deve-se aos íons positivos e muito mais pesados.
- ⇒ Não leva em conta detalhes da estrutura cristalina do material e do tipo de átomo que compõe o metal.



- O metal é constituído de íons com carga $Q = +Z_a e$, onde Z_a é o número atômico do átomo que constitui o material.
- Cada átomo tem Z_a elétrons porém apenas Z elétrons das camadas de valência formam a banda de condução, estando relativamente livres para se mover. Esses elétrons de valência vão constituir o gás de elétrons.
- Dada a densidade de massa do metal ρ_m e a massa de um único átomo m_A , obtém-se a densidade do gás de elétrons n :

$$n = Z \frac{\rho_m}{m_A} .$$



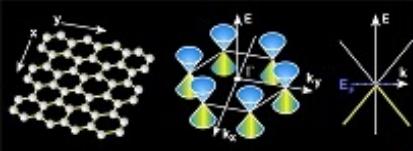
Além disso o volume ocupado por um elétron é dado por:

$$\frac{V}{N} = \frac{1}{n} = \frac{4\pi r_s^3}{3}$$

onde V é o volume total do sólido, N o número total de elétrons livres e r_s o raio da esfera cujo volume é equivalente ao volume ocupado por um único elétron.

- Invertendo a última relação, obtemos:

$$r_s = \left(\frac{3}{4\pi n} \right)^{1/3}. \quad (1)$$

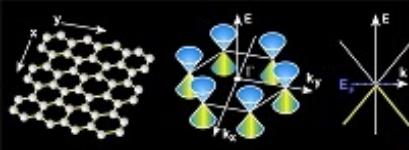


~ É comum normalizar r_s com relação ao raio atômico de Bohr

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \times 10^{-10} \text{m} .$$

~ Na maioria dos metais r_s/a_0 fica na faixa de 2 a 3.

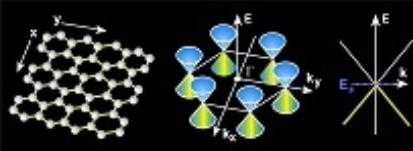
Em metais alcalinos r_s/a_0 está entre 3 e 6 e para alguns compostos pode ir até 10.



Densidades Eletrônicas de Alguns Metais

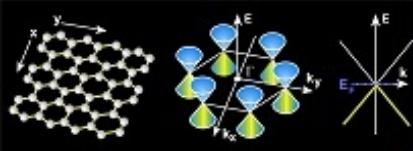
(A 300K exceto quando indicado. Fonte: Aschcroft/Mermin SSP)

Elemento	Z	$n(10^{28}/\text{m}^3)$	$r_s(\text{\AA})$	r_s/a_0
Li (78K)	1	4.70	1.72	3.25
Na (5K)	1	2.65	2.08	3.93
K (5K)	1	1.40	2.57	4.86
Cu	1	8.47	1.41	2.67
Ag	1	5.86	1.60	3.02
Au	1	5.90	1.59	3.01
Mg	2	8.61	1.41	2.67
Ca	2	4.61	1.73	3.27
Fe	2	17.0	1.12	2.12
Mn	2	16.5	1.13	2.14
Zn	2	13.2	1.22	2.30
Al	3	18.1	1.10	2.07
Sn	4	14.8	1.17	2.22



⇒ O modelo de Drude usa a teoria cinética de um gás de partículas dilutas neutras:

- 1- No intervalo entre colisões as interações de um dado elétron com os outros elétrons e com os íons é negligenciada. Os elétrons movem-se sob a ação dos campos eletromagnéticos externamente aplicados.
- 2- Colisões são eventos instantâneos. No modelo original os elétrons são espalhados pelos íons considerados esferas rígidas e impenetráveis, embora uma análise mais realista deva considerar interações elétron-elétron, etc.

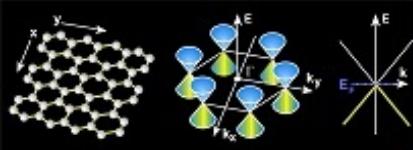


3- A probabilidade dP de um elétron sofrer uma colisão em um intervalo de tempo dt é dada por

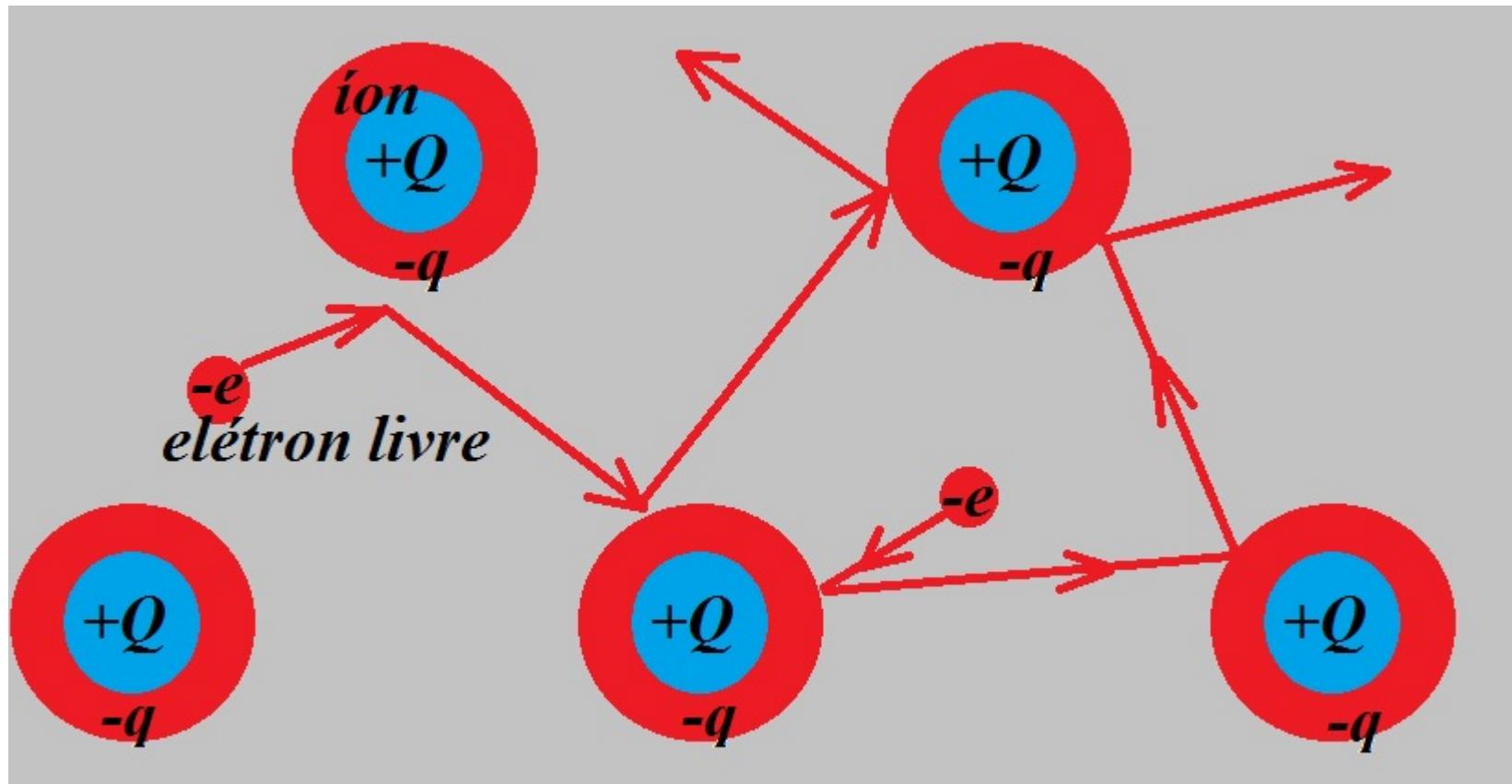
$$dP = \frac{dt}{\tau} .$$

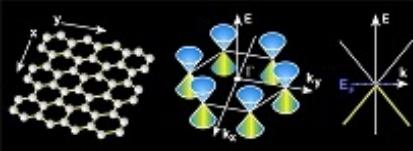
τ é denominado tempo de relaxação e não depende da posição e velocidade do elétron.

4- Elétrons estão em equilíbrio termodinâmico com o ambiente apenas devido a colisões. Desse modo os elétrons não tem “memória”. Após cada colisão a velocidade não é correlacionada ao movimento anterior. A velocidade após a colisão é orientada randômicamente e depende apenas da temperatura.



Colisões no Modelo de Drude





Modelo de Drude para Condutividade Elétrica

Considere a lei de Ohm vetorial:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} .$$

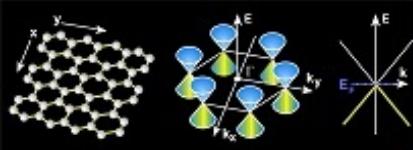
Além disso, a densidade de corrente de um gás de elétrons é dada por:

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v}$$

onde n é a densidade eletrônica, $q = -e$ é a carga eletrônica e \mathbf{v} a velocidade dos elétrons. Igualando as equações obtém-se a condutividade:

$$\sigma = \frac{\mathbf{J}}{\mathbf{E}} = nq \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{E}}$$

- A relação $\mathbf{v}/\mathbf{E} = \mu_q$ é denominada mobilidade.



⇒ A equação de movimento para uma carga q na presença de um campo elétrico \mathbf{E} é dada pela 2a. Lei de Newton:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\mathbf{v} = \frac{q}{m}\mathbf{E}$$

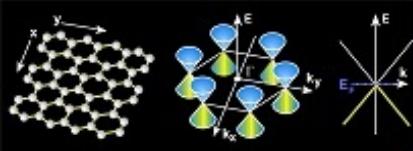
A força que o campo magnético realiza na carga é desprezada em 1^a aprox. já que em regime de baixas velocidades $v \ll c$ temos $|\mathbf{E}| \gg |\mathbf{v} \times \mathbf{B}|$.

- Resolvendo a eq. diferencial acima no regime harmônico, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, podemos supor $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-i\omega t}$ para obter:

$$\mathbf{v}_0 = \frac{q\tau}{m(1 - i\omega\tau)} \mathbf{E}_0 ,$$

Tem-se então para a condutividade elétrica do material:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m(1 + i\omega\tau)} . \quad (2)$$



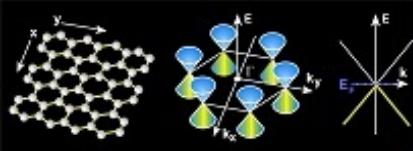
- Para $\omega = 0$ temos a condutividade DC do material:

$$\sigma_0 = \frac{ne^2\tau}{m} , \quad (3)$$

e por ela é possível medir o valor do tempo de relaxação τ .

⇒ O valor de τ depende da temperatura.

⇒ Para metais o valor situa-se tipicamente entre 10^{-14}s e 10^{-15}s .



⇒ Utilizando o livre caminho médio como

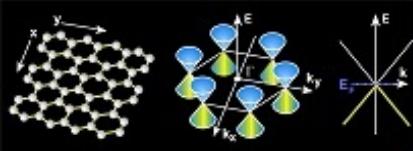
$$l = v_0 \tau$$

e da teoria cinética do gás não-interagente:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

com $v_0 \sim 10^5 \text{ m/s}$, obtém-se um livre caminho médio de 1 a 10 angstroms.

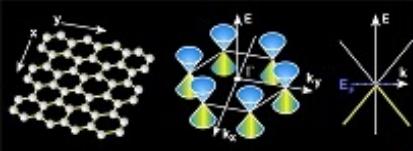
- Este valor é compatível com a distância interatômica e a visão de Drude de que os elétrons colidem com os íons da rede.



Condutividade Elétrica $\sigma(10^7 \text{S/m})$ de Alguns Metais

(Fonte: Aschcroft/Mermin SSP)

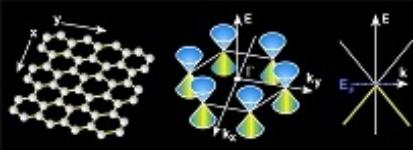
Elemento	77K	273K	373K
Li	9.62	1.17	0.81
Cu	50.0	6.41	4.46
Ag	33.3	6.62	4.69
Au	20.0	4.90	3.52
Mg	16.1	2.56	1.79
Ca		2.91	2.00
Fe	15.2	1.12	0.68
Zn	9.09	1.82	1.28
Al	33.3	4.08	2.82
Sn	4.76	0.94	0.63



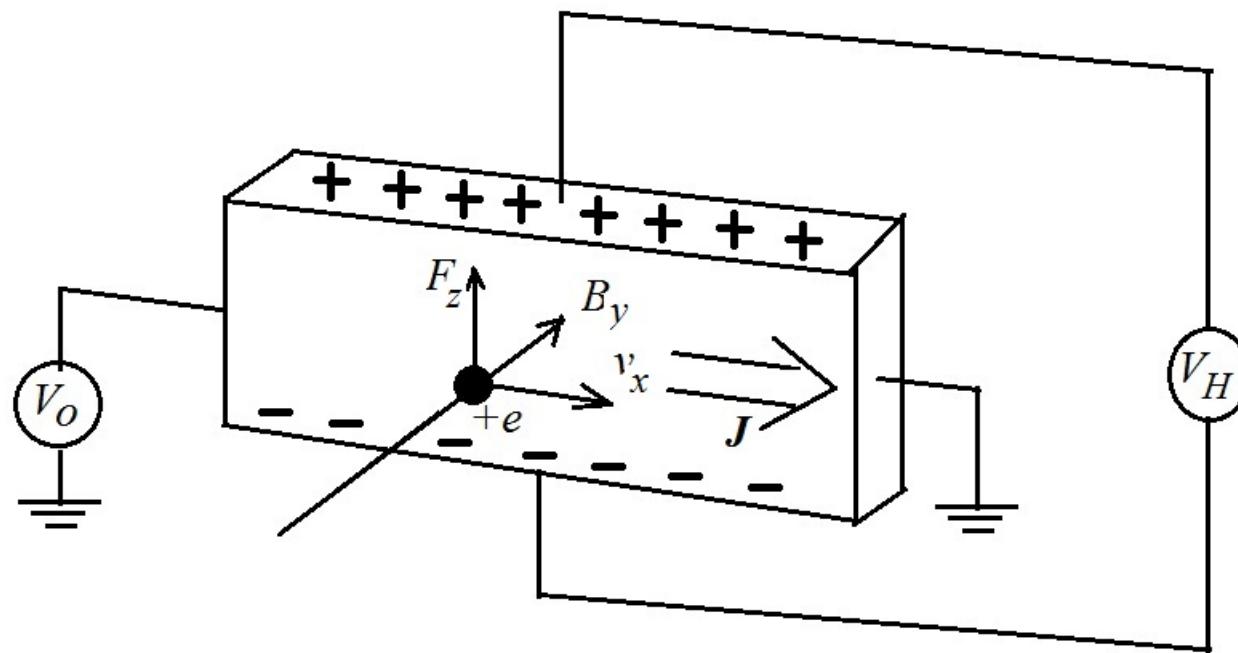
Efeito Hall e Coeficiente de Hall

- Pode ocorrer em qualquer material mas tem maior importância na Física do Semicondutores para determinar o tipo e a densidade efetiva de portador majoritário de uma certa amostra de semicondutor dopado.
- É utilizado em sensores de campo magnético (do tipo chave, usualmente).
- Sabemos que a densidade de força de Lorentz, considerando apenas um tipo de portador de carga cuja densidade vale ρ , é dada por:

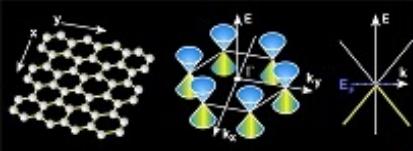
$$\mathcal{F} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} .$$



~ O aparato experimental básico para medir o efeito Hall é esboçado na figura abaixo:



- O voltímetro V_H mede uma tensão denominada tensão de Hall, enquanto V_0 é a tensão aplicada capaz de gerar uma corrente elétrica perpendicular à direção do campo magnético aplicado.



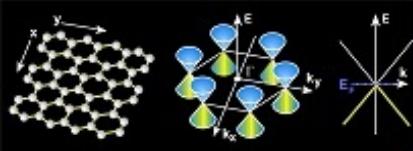
~ $V_H > 0$ se os portadores tem carga positiva e serão defletidos para cima.

~ $V_H < 0$ se as cargas negativas são majoritárias e a corrente está no mesmo sentido.

~ Para os materiais em que apenas um tipo de portador de carga ocorre, como é o caso dos metais, podemos escrever, para a densidade de corrente, a seguinte equação:

$$J_x = n_q q v_x ,$$

- n_q é a densidade de portadores de carga q .
- Em geral $q = -e$ é a carga do elétron nos metais, embora existam metais onde o portador é um buraco $q = +e$.



- A componente magnética da densidade de Força de Lorentz será dada por:

$$\mathcal{F}_z^m = J_x B_y .$$

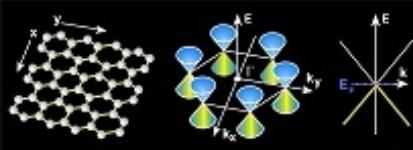
~ Essa força será contrabalanceada por uma outra de origem eletrostática de igual magnitude e sinal contrário, quando as cargas defletidas efeito de \mathcal{F}_z^m se acumulam nas superfícies do material.

- No equilíbrio a densidade de força de Lorentz total será nula:

$$\mathcal{F}_z = \rho E_z + J_x B_y = 0 \Rightarrow E_z = -\frac{J_x B_y}{\rho} ,$$

O fator $1/\rho$ é denominado coeficiente de Hall R_H , sendo $\rho = n_q q$:

$$R_H = \frac{1}{n_q q} . \quad (4)$$

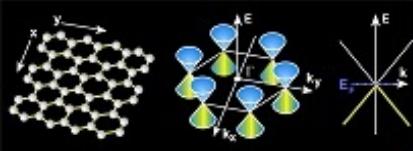


- Lembrando que $J_x = I_x/A$, onde I_x é a corrente gerada pela tensão V_0 aplicada aos terminais do material e $A = L \cdot d$ é a área de seção transversal.

Além disso, o campo eletrostático está associado à tensão Hall, $E_z = -V_H/d$, e podemos reescrever:

$$V_H = R_H \frac{I_x B_y}{L} \Rightarrow R_H = \frac{V_H L}{I_x B_y} = \frac{1}{nq} . \quad (5)$$

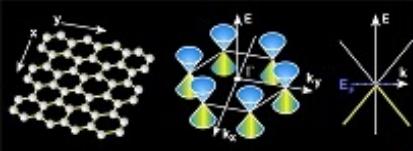
- Se os portadores de carga são positivos $R_H > 0$, ao passo que para portadores de carga negativos $R_H < 0$, permitindo determinar o sinal da carga do portador, bem como a sua densidade efetiva.



Coeficiente de Hall de alguns metais

Elemento	R_H ($\times 10^{-10}$ m ³ /C)	Portador
Li	-1.7	-e
Na	-2.1	-e
Cu	-0.54	-e
Ag	-0.9	-e
Au	-0.72	-e
Al	+1.02	+e

- Fonte: C. Kittel, Introduction to Solid State Theory, pg 167.
- Para o Al o portador é um buraco, em contraste com a grande maioria dos metais, onde o portador é o elétron.
- O Al admite um estado supercondutor em temperaturas baixas, ao contrário de alguns dos metais mais nobres como Ouro, Prata e Cobre.



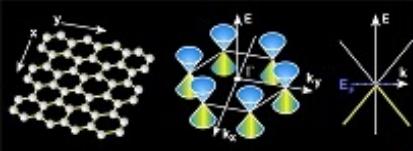
Propriedades Térmicas dos Metais no Modelo de Drude

⇒ Metais são bons condutores de eletricidade e também de calor. É natural associar o transporte de calor ao mesmo mecanismo que conduz eletricidade.

⇒ O transporte de calor é dado pela lei de Fourier:

$$\mathbf{J}_Q = -\kappa \nabla T \quad (6)$$

onde κ é a condutividade térmica do material e T a temperatura.



⇒ A corrente térmica \mathbf{J}_Q corresponde, por outro lado à densidade de fluxo de calor que vai de um ponto para outro.

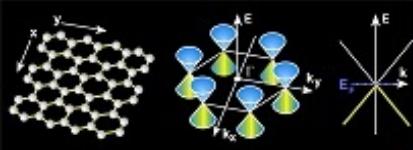
Considerando apenas a direção x : a troca de energia se dá por meio de colisões entre os pontos $x - v_x \tau$ e $x + v_x \tau$:

$$J_Q^x = n v_x \frac{E[T(x - v_x \tau) - E[T(x + v_x \tau)]]}{2} \approx -n v_x^2 \tau \frac{dE}{dT} \frac{dT}{dx}$$

⇒ Uma vez que o processo de colisão é randômico podemos substituir v_x^2 pelo seu valor médio, sendo que $\langle v_x^2 \rangle = v^2/3$ em três dimensões.

- Utilizando a definição para o calor específico a volume constante $c_v = n dE / dT$ obtemos:

$$\kappa = \frac{1}{3} v^2 \tau c_v .$$



- Utilizando as relações do gás ideal:

$$c_v = \frac{3}{2}nk_B, \quad E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

podemos obter a famosa lei de Wiedermann-Franz:

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{3k_B^2}{2e^2} \approx 1.116 \times 10^{-8} [\text{J}^2/(\text{K}^2\text{C}^2)] .$$

⇒ O valor acima é metade do valor experimental dado pela lei de WF. Por um erro de cálculo Drude obteve o valor correto e isso foi considerado inicialmente um sucesso enorme da teoria de Drude.

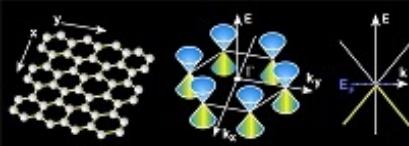


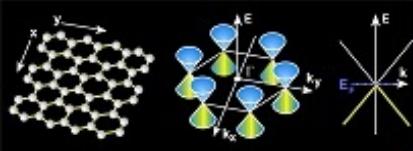
Table 1.6

EXPERIMENTAL THERMAL CONDUCTIVITIES AND LORENZ NUMBERS
OF SELECTED METALS

ELEMENT	273 K		373 K	
	κ (watt/cm-K)	$\kappa/\sigma T$ (watt-ohm/K ²)	κ (watt/cm-K)	$\kappa/\sigma T$ (watt-ohm/K ²)
Li	0.71	2.22×10^{-8}	0.73	2.43×10^{-8}
Na	1.38	2.12		
K	1.0	2.23		
Rb	0.6	2.42		
Cu	3.85	2.20	3.82	2.29
Ag	4.18	2.31	4.17	2.38
Au	3.1	2.32	3.1	2.36
Be	2.3	2.36	1.7	2.42
Mg	1.5	2.14	1.5	2.25
Nb	0.52	2.90	0.54	2.78
Fe	0.80	2.61	0.73	2.88
Zn	1.13	2.28	1.1	2.30
Cd	1.0	2.49	1.0	
Al	2.38	2.14	2.30	2.19
In	0.88	2.58	0.80	2.60
Tl	0.5	2.75	0.45	2.75
Sn	0.64	2.48	0.60	2.54
Pb	0.38	2.64	0.35	2.53
Bi	0.09	3.53	0.08	3.35
Sb	0.18	2.57	0.17	2.69

Source: G. W. C. Kaye and T. H. Laby, *Table of Physical and Chemical Constants*, Longmans Green, London, 1966.

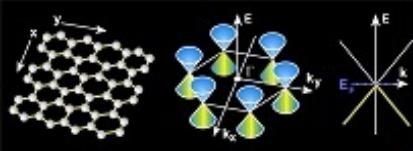
Fonte: Aschcroft/Mermin Solid State Physics



- Nos cálculos originais de Drude para κ , há dois erros de ordem de grandeza, que fortuitamente se cancelam.

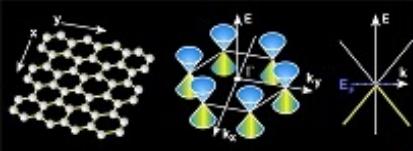
$$\kappa = \frac{1}{3} v^2 \tau c_v .$$

- O valor de v^2 é estimada em 100 vezes menor do que realmente é, enquanto o calor específico em 100 vezes maior.
- Além disso, em nenhum metal foi encontrado o valor para o calor específico da ordem de $\frac{3}{2} nk_B$.
- Mostra-se ainda que a contribuição eletrônica para c_v é desprezível.



O Modelo de Sommerfeld

- ⇒ Incorpora o princípio de exclusão de Pauli, aplicando ao modelo de gás de elétrons livres a estatística de Fermi-Dirac.
- ⇒ Corrigiu algumas deficiências do modelo de Drude, como a contribuição eletrônica para o calor específico dos metais, mostrando-a quase desprezível.
- ⇒ Ainda assim, não leva em conta a verdadeira estrutura do cristal.
- A acurácia do modelo do gás de elétrons livres fica restrita aos metais alcalinos.



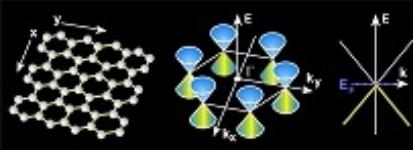
Para um elétron livre em um metal, $\mathbf{p} = m^* \mathbf{v}$ e $H_0 = \mathbf{p}^2/(2m^*)$, onde m^* é a massa efetiva, podendo diferir do elétron no vácuo, temos:

$$E(\mathbf{k}) = \frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m^*} .$$

Nesse caso é fácil mostrar que $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$, a velocidade e a massa serão dadas por:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} E$$

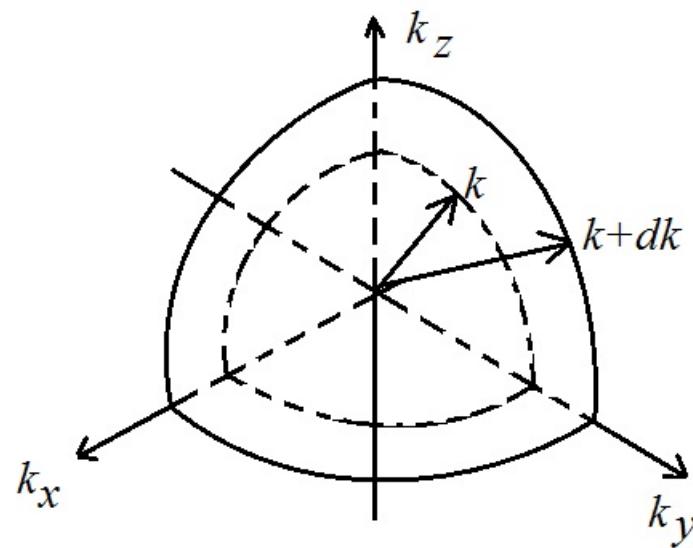
$$m^* = \frac{\hbar^2}{\partial^2 E / \partial \mathbf{k}^2} .$$

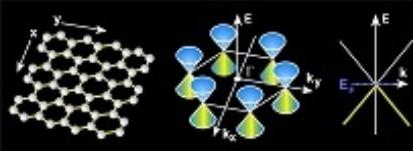


~ Alguns parâmetros importantes nesse modelo do gás de elétrons livres:

1) Densidade de Estados $D(E) = dN/dE$

Primeiro queremos determinar dN no intervalo entre k e $k + dk$. Considere a figura, para o caso em três dimensões:

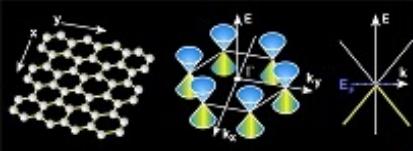




~ Lembre-se que do ponto de vista ondulatório, o número de onda mínimo de um elétron, Δk , em uma cavidade cúbica de lado L deve valer $2\pi/L$. O volume infinitesimal ocupado no espaço recíproco é dado por $(\Delta k)^3 = (2\pi/L)^3$.

~ Já o número de estados no intervalo entre k e $k + dk$ corresponderá ao volume ocupado pela camada esférica contida entre as superfícies k e $k + dk$, dividido pelo volume infinitesimal $(\Delta k)^3$, ou seja:

$$dN = \frac{\frac{4\pi}{3}[(k + dk)^3 - k^3]}{(2\pi/L)^3} = \frac{4\pi L^3}{(2\pi)^3} k^2 dk ,$$

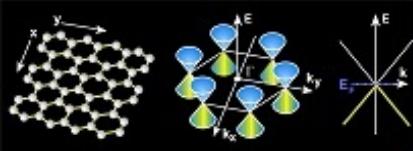


~ Para estados de energia degenerados em spin o resultado acima deverá ser multiplicado por 2, pois cada estado pode ser preenchido por dois elétrons de spins contrários.

~ Dessa forma temos o resultado desejado em três dimensões:

$$D(\varepsilon) = \frac{\text{Vol}}{\pi^2} \frac{k^2}{d\varepsilon/dk} = \frac{\text{Vol}}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\varepsilon}$$

- Utilizando o resultado anterior podemos determinar o número de elétrons total em um certo volume de sólido, uma vez que $dN = D(\varepsilon)f(\varepsilon)d\varepsilon$ é o número de elétrons com energia ε no intervalo $d\varepsilon$.

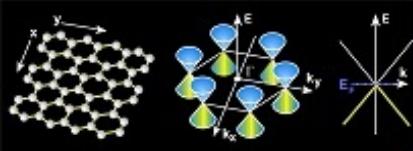


Temos então:

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon . \quad (7)$$

→ Para o gás de elétrons livres $D(\varepsilon)$ está limitada a $\varepsilon \geq 0$, e em $T = 0$ a função de Fermi-Dirac é um degrau de valor unitário para $\varepsilon < \varepsilon_F$ e anula-se para energias maiores do que a energia de Fermi, então:

$$N = \frac{\text{Vol}}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{1/2} d\varepsilon . \quad (8)$$



- Realizando a integração obtemos a densidade de elétrons $n = N/\text{Vol}$:

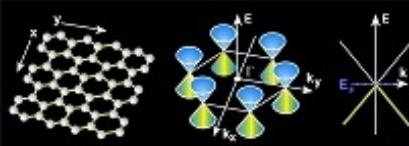
$$n = \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon_F^{3/2} \quad (9)$$

A energia total do gás de elétrons em $T = 0\text{K}$,

$$E_T = \int \varepsilon D(\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon,$$

é dada por:

$$E_T = \frac{\text{Vol}}{2\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon = \frac{\text{Vol}}{5\pi^2} \left(\frac{2m^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} \varepsilon_F^{5/2} = \frac{3}{5} N \varepsilon_F .$$



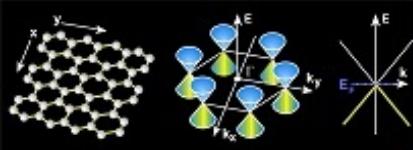
TEM728 - Física do Estado Sólido

FERMI ENERGIES, FERMI TEMPERATURES, FERMI WAVE VECTORS, AND FERMI VELOCITIES FOR REPRESENTATIVE METALS^a

ELEMENT	r_s/a_0	ϵ_F	T_F	k_F	v_F
Li	3.25	4.74 eV	5.51×10^4 K	1.12×10^8 cm $^{-1}$	1.29×10^8 cm/sec
Na	3.93	3.24	3.77	0.92	1.07
K	4.86	2.12	2.46	0.75	0.86
Rb	5.20	1.85	2.15	0.70	0.81
Cs	5.62	1.59	1.84	0.65	0.75
Cu	2.67	7.00	8.16	1.36	1.57
Ag	3.02	5.49	6.38	1.20	1.39
Au	3.01	5.53	6.42	1.21	1.40
Be	1.87	14.3	16.6	1.94	2.25
Mg	2.66	7.08	8.23	1.36	1.58
Ca	3.27	4.69	5.44	1.11	1.28
Sr	3.57	3.93	4.57	1.02	1.18
Ba	3.71	3.64	4.23	0.98	1.13
Nb	3.07	5.32	6.18	1.18	1.37
Fe	2.12	11.1	13.0	1.71	1.98
Mn	2.14	10.9	12.7	1.70	1.96
Zn	2.30	9.47	11.0	1.58	1.83
Cd	2.59	7.47	8.68	1.40	1.62
Hg	2.65	7.13	8.29	1.37	1.58
Al	2.07	11.7	13.6	1.75	2.03
Ga	2.19	10.4	12.1	1.66	1.92
In	2.41	8.63	10.0	1.51	1.74
Tl	2.48	8.15	9.46	1.46	1.69
Sn	2.22	10.2	11.8	1.64	1.90
Pb	2.30	9.47	11.0	1.58	1.83
Bi	2.25	9.90	11.5	1.61	1.87
Sb	2.14	10.9	12.7	1.70	1.96

^a The table entries are calculated from the values of r_s/a_0 given in Table 1.1 using $m = 9.11 \times 10^{-28}$ grams.

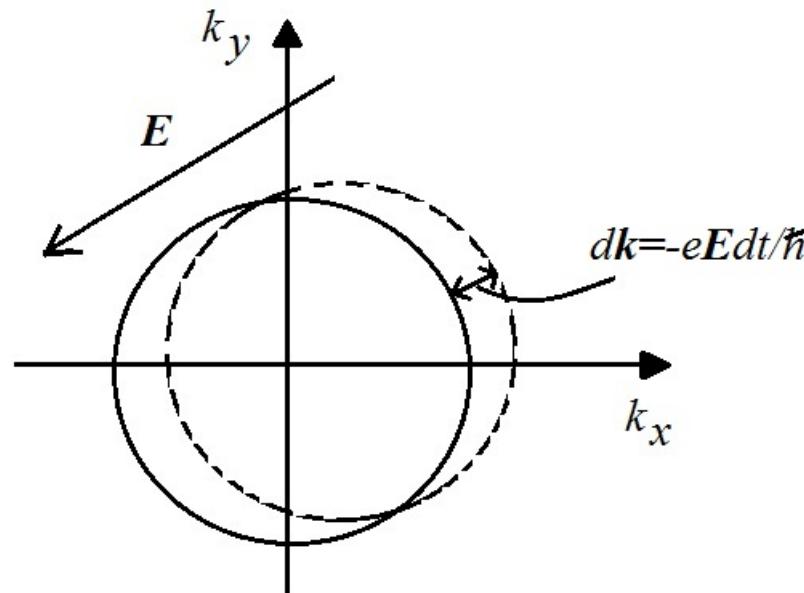
Fonte: Aschcroft/Mermin Solid State Physics

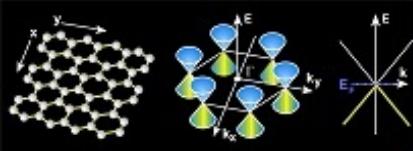


~ Consideremos agora condutividade DC em um metal. Se nenhum campo elétrico externo está aplicado, então:

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v} = -\frac{e}{m^* \text{Vol}} \sum_{\mathbf{k}} \hbar \mathbf{k} = 0$$

A aplicação de um campo elétrico produz uma força que desloca a esfera de Fermi, em relação ao centro simétrico, conforme pode-se observar na figura:





Observando que o momento de um elétron é dado por $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ e $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$ obtemos:

$$\hbar \frac{d\delta\mathbf{k}}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{\hbar}{\tau} \delta\mathbf{k} ,$$

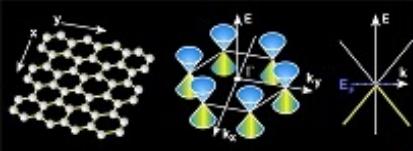
onde τ é o tempo de relaxação que leva em conta colisões.

Na condição de equilíbrio $d\mathbf{p}/dt \rightarrow 0$ e temos

$$\delta\mathbf{k} = -\frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \tau ,$$

fazendo surgir uma densidade de corrente efetiva no metal:

$$\mathbf{j} = -\frac{e}{m^* \text{Vol}} \sum \hbar \delta\mathbf{k} = \frac{e^2 \tau}{m^* \text{Vol}} \mathbf{E} \int_0^{\varepsilon_F} D(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{ne^2 \tau}{m^*} \mathbf{E}$$



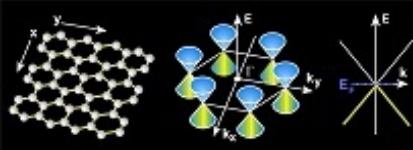
Tem-se então a condutividade de Boltzmann nessa análise simplificada:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*}$$

~ Nos metais $n \sim 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Mesmo em semimetais como o grafite esse valor chega a 10^{24} m^{-3}

~ Já o calor específico a volume constante é calculado a partir da seguinte fórmula:

$$c_v = \frac{1}{V} \frac{\partial E}{\partial T} \Big|_{N,V}$$



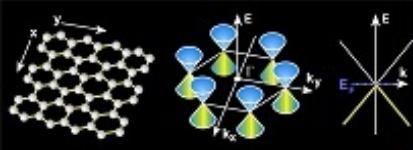
Para gás ideal clássico o resultado seria $c_v = (3/2)nk_B$, enquanto a teoria quântica prevê para o gás de elétrons:

$$c_v = \frac{\pi^2}{2} n k_B \frac{k_B T}{\varepsilon_F} . \quad (10)$$

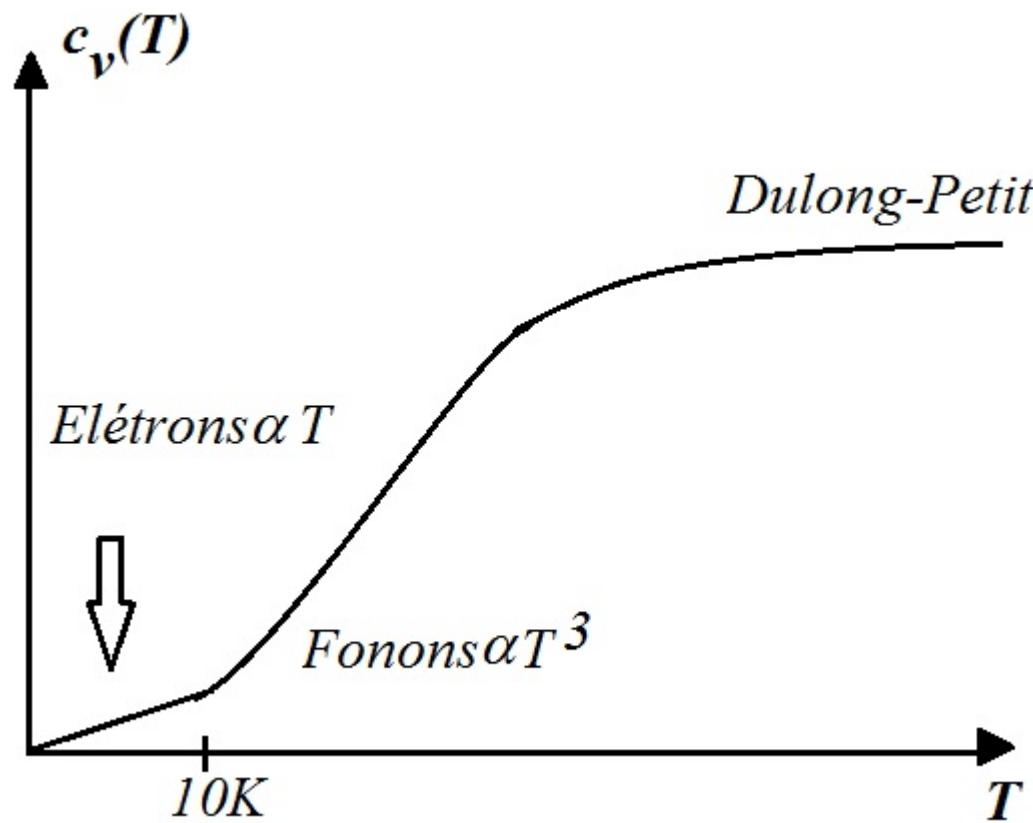
→ c_v depende linearmente de T e difere muito do valor clássico pois em temperatura ambiente $k_B T \ll \varepsilon_F$ nos metais.

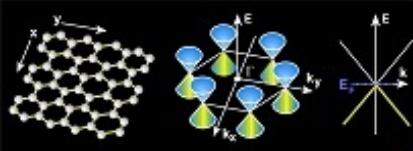
→ O gás de elétrons pouco contribui para c_v a partir de uns poucos kelvins. c_v deve-se sobretudo aos fônonos (vibrações da rede cristalina). Todavia utilizando $\kappa = \nu^2 \tau c_v / 3$ o modelo de Sommerfeld produz a lei de Wiedermann-Franz verificada experimentalmente:

$$\frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{\pi^2 k_B^2}{3 e^2} \approx 2.45 \times 10^{-8} \text{J}^2 / (\text{K}^2 \text{C}^2) . \quad (11)$$



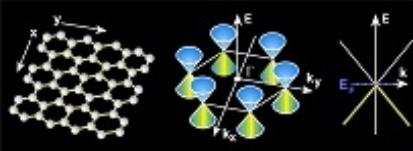
Comparação entre a contribuição eletrônica e da rede para c_v a baixas temperaturas.





Falhas do Modelo do Gás de Elétrons

- Não explica adequadamente os coeficientes de transporte: o coeficiente Hall em alguns casos tem o sinal e valor de R_H previsto pelo modelo incompatível com o valor medido
- Falha em descrever a Magnetoresistência e dependência de σ com a temperatura, anisotropia de σ , condutividade AC e propriedades ópticas;
- Não permite fazer boas estimativas das energias de coesão
- Não explica o número de elétrons de condução, nem porque alguns materiais tem comportamento não-metálico.



Referências deste Capítulo

- [1] Ashcroft/Mermin, *Solid State Physics*.
- [2] C. Kittel, *Introduction to Solid State Theory*.