UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR
Setor de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Disciplina: TEM728 - Física do Estado Sólido

Professor: César Augusto Dartora[1]

Esta lista de exercícios tem por objetivo a revisão dos conceitos fundamentais da Mecânica Quântica. Sugere-se fortemente a leitura dos Capítulos 1, 2 e 3 do livro Modern Quantum Mechanics de J.J. Sakurai.

1) Suponha que uma matriz 2×2 M seja escrita na forma abaixo:

$$M = a_0 + i\vec{\sigma} \cdot \mathbf{a} \ ,$$

sendo a_0 um número, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ as matrizes de Pauli e $\mathbf{a}$ um vetor no espaço tridimensional.
a) Determine a relação entre a_0 e a_k, onde o índice k representa $k = x, y, z = 1, 2, 3$, e os traços $\mathrm{Tr}(M)$ e $\mathrm{Tr}(\sigma_k M)$. Lembre-se que o traço de uma matriz corresponde à soma dos elementos da diagonal principal.
b) Obtenha a_0 e $\mathbf{a}$ em termos dos elementos M_{ij} da matriz M.

2) Considere os ket-estados $|+\rangle$ e $|-\rangle$, na forma

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

a)Demonstre que as matrizes de Pauli podem ser representadas na forma abaixo:

$$\sigma_x = |+\rangle\langle-| + |-\rangle\langle+| \ ,$$
$$\sigma_y = -i|+\rangle\langle-| + i|-\rangle\langle+| \ ,$$
$$\sigma_z = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \ ,$$

b) Demonstre que:

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta}$$

com os índices α e β escolhidos entre $+, -$.
c) Demonstre que:

$$\sum_{\alpha=+,-} |\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbf{1}$$

onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade de ordem 2.
d) Definindo $S_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i$, onde $i = x, y, z$ mostre que

$$[S_x, S_y] = i\hbar S_z$$

$$\{S_i, S_j\} = \frac{\hbar^2}{2}\delta_{ij}$$

onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker.

[1] cadartora@eletrica.ufpr.br

3) Demonstre que para um dado um vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$ formando um ângulo β com o eixo z e α com o eixo x, ou seja $\mathbf{n} = (\sin\beta\cos\alpha, \sin\beta\sin\alpha, \cos\beta)$, temos:

$$\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}|\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},\pm\rangle = \pm|\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},\pm\rangle \ ,$$
$$|\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},+\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle + e^{i\alpha}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|-\rangle \ ,$$
$$|\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},-\rangle = \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle - e^{i\alpha}\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|-\rangle \ ,$$

Verifique ainda que:

$$\langle\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},+|\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},+\rangle = \langle\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},-|\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},-\rangle = 1$$
$$\langle\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},+|\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},-\rangle = \langle\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},-|\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},+\rangle = 0$$

4) Sendo o operador de spin $\mathbf{S} = \hbar\vec{\sigma}/2$ para um dado sistema físico de spin 1/2 que sabe-se, está inicialmente num auto-estado de spin $\mathbf{S}\cdot\mathbf{n}$, na direção $\hat{\mathbf{n}}$, cujo auto-valor vale $\hbar/2$, ou seja:

$$|\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}},+\rangle = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right)|+\rangle + e^{i\alpha}\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)|-\rangle$$

sendo $|+\rangle$ e $|-\rangle$ os autoestados da matriz S_z com autovalores $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$, respectivamente, e estando $\hat{\mathbf{n}}$ contido no plano xz. Qual a probabilidade de que uma medida de S_x, ou seja, do spin na direção x, tenha como resultado $+\hbar/2$?

5) Considere um sistema físico de três níveis $|1\rangle$, $|2\rangle$ e $|3\rangle$ e A um operador físico que pode ser representado nessa base de autovetores pela seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix} .$$

Observe que A tem espectro degenerado. Dado outro operador B representado nessa base na forma abaixo:

$$B = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ib \\ 0 & -ib & 0 \end{pmatrix} ,$$

a) O operador B também tem espectro degenerado?
b) mostre que A e B comutam.
c) encontre uma base que diagonalize A e B simultaneamente.

6) Dado o operador Hamiltoniano de um sistema de dois níveis:

$$\hat{H} = \varepsilon(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|) + \Delta(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

onde ε e Δ são dois valores reais com dimensão de energia. Encontre os auto-valores e autovetores de energia. O que acontece para $\Delta \to 0$?

7) Dado o operador Hamiltoniano de um sistema de dois níveis:

$$\hat{H} = \varepsilon(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + \Delta(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$$

onde ε e Δ são dois valores reais com dimensão de energia. Encontre os auto-valores e autovetores de energia. O que acontece para $\Delta \to 0$? O que se pode inferir sobre a presença de Δ no espectro de energias do Hamiltoniano acima?

8) Mostre que

$$\exp\left[-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta}{2}\right] = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - i\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

sendo $\hat{\mathbf{n}}$ um vetor unitário e θ um número real.

9) Prove que

$$\vec{\sigma}\cdot\mathbf{a}\,\vec{\sigma}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + i\vec{\sigma}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b}\ .$$

Dica: utilize as relações de comutação de matrizes de Pauli e o fato de que

$$\sigma_i\sigma_j = \frac{1}{2}[\sigma_i,\sigma_j] + \frac{1}{2}\{\sigma_i,\sigma_j\}\ .$$

10) Demonstre que para a seguinte transformação

$$\vec{\sigma}\cdot\mathbf{a}' = S^\dagger\vec{\sigma}\cdot\mathbf{a}S$$

onde

$$S = \exp\left[-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\theta}{2}\right]$$

sendo $\hat{\mathbf{n}}$ um vetor unitário e θ um número real e $SS^\dagger = S^\dagger S = \mathbf{1}$, o determinante de $\vec{\sigma}\cdot\mathbf{a}$ fica invariante. Encontre a'_k em função de a_k. O que representa essa transformação?

11) Discuta as versões de Schroedinger, Heisenberg e Dirac da Mecânica Quântica.

12) Considere o problema de precessão de spin, representado pelo Hamiltoniano abaixo:

$$\hat{H} = -\omega S_z$$

onde $\omega = eB/m$, que descreve um sistema de spin 1/2 na presença de campo magnético na direção z. Se o estado inicial corresponde à projeção de spin positiva na direção x, ou seja:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle)\ ,$$

determine o estado $|\psi(t)\rangle$, resolvendo a equação de Schroedinger dependente do tempo e determine os valores médios de S_x, S_y e S_z

13) Considerando o mesmo Hamiltoniano do exercício anterior

$$\hat{H} = -\omega S_z$$

escreva as equações de movimento de Heisenberg e encontre $S_x(t)$, $S_y(t)$ e $S_z(t)$, para todo instante de tempo. Encontre os valores médios de S_x, S_y e S_z para o mesmo estado inicial do problema anterior:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(|+\rangle + |-\rangle)\ .$$

14) Obtenha a equação de Liouville para a matriz densidade na versão de Schroedinger. Você pode utilizar

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi_0\rangle\ ,$$

onde $U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t}$ é o operador unitário de evolução temporal, $\hat{H}$ é o hamiltoniano do sistema. A matriz densidade pode ser escrita em uma base completa na forma

$$\rho = \sum_{m,n} w_{mn}|m\rangle\langle n|$$

com a condição $\mathrm{Tr}(\rho) = \sum_m w_{mm} = 1$.

15) Obtenha as equações de Bloch para um sistema de dois níveis cujo hamiltoniano possa ser escrito na forma:

$$\hat{H} = -\mu_B B_0 \sigma_z - B_1 \cos(\omega t)\sigma_x \ ,$$

sendo B_0 um campo magnético constante aplicado na direção z e B_1 um campo magnético variante no tempo aplicado na direção x.

Encontre a solução do sistema para a matriz densidade no instante inicial na forma:

$$\rho_0 = \frac{1}{2}(|+\rangle\langle+| + |-\rangle\langle-|) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Discuta as relações entre ω e B_0. O que acontece se $\omega = 2\mu_B B_0$?

16) Considere um sistema de bósons livres:

$$\hat{H} = \hbar\omega a^\dagger a \ .$$

Dada a relação de comutação bosônica mais geral:

$$[a_i, a_j] = [a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \ ,$$
$$\left[a_i, a_j^\dagger\right] = \delta_{ij} \ ,$$

onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker e as relações acima aparecem em sistemas com graus de liberdade adicionais, representados pelos índices i, j:
a) o que representam os operadores a, $a^\dagger$ e $\hat{n} = a^\dagger a$?
b) encontre a partir do Hamiltoniano acima, a função de Bose-Einstein considerando:

$$\rho = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta\hat{H}})} \ ,$$

e $f(\omega) = \langle\hat{n}\rangle = \mathrm{Tr}(\rho\hat{n})$.
c) Obtenha as equações de Heisenberg para a e $a^\dagger$.

17) Considere um sistema de férmions livres:

$$\hat{H} = \varepsilon c^\dagger c \ .$$

Dada a relação de comutação fermiônica mais geral:

$$\{c_i, c_j\} = \{c_i^\dagger, c_j^\dagger\} = 0 \ ,$$
$$\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij} \ ,$$

onde δ_{ij} é a função delta de Kronecker e as relações acima aparecem em sistemas com graus de liberdade adicionais, representados pelos índices i, j:
a) o que representam os operadores c, $c^\dagger$ e $\hat{n} = c^\dagger c$?
b) encontre a partir do Hamiltoniano acima, a função de Fermi-Dirac considerando:

$$\rho = \frac{e^{-\beta\hat{H}}}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta\hat{H}})} \ ,$$

e $f(\varepsilon) = \langle\hat{n}\rangle = \mathrm{Tr}(\rho\hat{n})$.
c) Obtenha as equações de Heisenberg para c e $c^\dagger$.