UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ - UFPR
Setor de Tecnologia
Departamento de Engenharia Elétrica

4^a LISTA DE EXERCÍCIOS

Disciplina: TEM728 - Física do Estado Sólido

Professor: César Augusto Dartora[1]

Esta lista de exercícios refere-se ao Teorema de Bloch, Teoria Semiclássica dos Elétrons no Potencial Periódico e Vibrações da Rede Cristalina.

1) Problemas do Capítulo 8 do livro **Solid State Physics**, Aschcroft/Mermin (1976): 1.

2) Problemas do Capítulo 9 do livro **Solid State Physics**, Aschcroft/Mermin (1976): 1, 3, 5.

3) O hamiltoniano efetivo que descreve a vibração dos íons em um cristal unidimensional, próximo do equilíbrio é dado abaixo:

$$H = \sum_i \frac{P_i^2}{2M} + \sum_i \frac{1}{2} M\omega_0^2 (X_i - X_{i-1})^2$$

a) Faça a quantização do mesmo através do procedimento canônico de quantização, que corresponde a transformar as funções P_i e X_i em operadores satisfazendo as relações canônicas:

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0, \quad (1)$$
$$[\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0, \quad (2)$$
$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad (3)$$

Utilize a representação dos operadores posição e momento em termos de operadores de criação e aniquilação, na forma:

$$\hat{X}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_0}}(\hat{a}_i + \hat{a}_i^\dagger) \quad (4)$$

$$\hat{P}_i = \frac{1}{i}\sqrt{\frac{\hbar M\omega_0}{2}}(\hat{a}_i - \hat{a}_i^\dagger) \quad (5)$$

onde os operadores $\hat{a}_i$(aniquilação) e $\hat{a}_i^\dagger$ (criação) satisfazem:

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j] = 0 \ , \ [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0 \ , \ [\hat{a}_i, \hat{a}_j{}^\dagger] = \delta_{ij}$$

e proceda, expressando os operadores $\hat{a}_i$ em termos dos modos normais (transformação de Fourier):

$$\hat{a}_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{a}_k e^{ikx_i} \quad (6)$$

$$\hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i \hat{a}_i e^{-ikx_i} \ , \quad (7)$$

[1]cadartora@eletrica.ufpr.br

O seu resultado final deverá ser o seguinte:

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega(k)\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}\sum_k \hbar\omega(k) \ . \tag{8}$$

Encontre a relação de dispersão $\omega(k)$.

b) Negligenciando o termo de energia do vácuo o hamiltoniano pode ser expresso como:

$$\hat{H} = \sum_k \hbar\omega(k)\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \ .$$

Obtenha o valor médio da energia e o calor específico nesse gás de fônons unidimensional.

c) Encontre o valor médio da energia e o calor específico em três dimensões de acordo com o modelo de Debye. Compare com o resultado do calor específico do gás de elétrons no modelo de Sommerfeld.