

# TE342 – Fundamentos de Comunicação

## Sinais e Sistemas de Comunicação

Evelio M. G. Fernández

11 de março de 2020

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

Evelio M. G. Fernández

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Informação sobre a disciplina

- Terças e Quintas feiras das 13:30 às 15:20 horas
- Professor: Evelio Martín García Fernández
- Gabinete 9, Tel: 3361-3221, 99194-3363
- e-mail: [evelio@eletrica.ufpr.br](mailto:evelio@eletrica.ufpr.br)
- Página da Disciplina na Internet:

<http://www.eletrica.ufpr.br/evelio/TE060/index.htm>

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

Evelio M. G. Fernández

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Notes

### ① Sinais e Sistemas de Comunicação;

- Representação de Sinais Determinísticos no Domínio do Tempo e no Domínio da Frequência;
- Sinais Aleatórios. Revisão de Processos Estocásticos;
- Transmissão de Sinais através de Sistemas Lineares;
- Sinais Passa-Banda;

### ② Sistemas de Modulação de Onda Contínua;

- Modulação de Amplitude;
- Modulação Angular;
- Efeito do Ruído em Sistemas com Modulação de Onda Contínua;

### ③ Modulação por Pulso;

- Modulação por Amplitude de Pulso (PAM);
- Modulação por Pulso Codificado (PAM);
- Transmissão Digital em Banda Base.

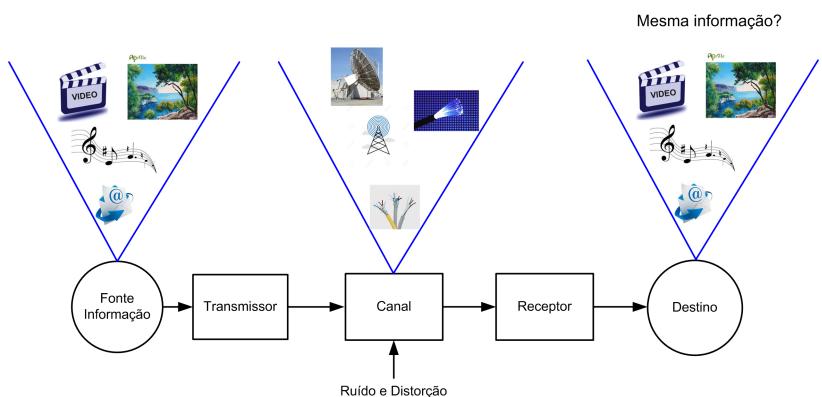
## Notes

- Simon Haykin, *Sistemas de Comunicação*, 4<sup>a</sup> Edição, Bookman, 2004.
- Simon Haykin e Michael Moher, *Sistemas de Comunicação*, 5<sup>a</sup> Edição, Bookman, 2009.
- Simon Haykin e Michael Moher, *Introdução aos Sistemas de Comunicações*, 2<sup>a</sup> Edição, Bookman, 2008.
- Leon W. Couch, *Digital and Analog Communication Systems*, 7th Edition, Prentice Hall, 2007.
- Bernard Sklar, *Digital Communications*, 2nd Edition, Prentice Hall 2004.

- 1<sup>a</sup> Prova (P1): 02/04/2020 13:30 Horas
- 2<sup>a</sup> Prova (P2): 12/05/2020 13:30 Horas
- 3<sup>a</sup> Prova (P3): 25/06/2020 13:30 Horas
- Provas de 2da Chamada: 30/06/2020 13:30 Horas
- Média Final =  $(P1 + P2 + P3)/3$
- Exame Final: 07/07/2020 13:30 Horas

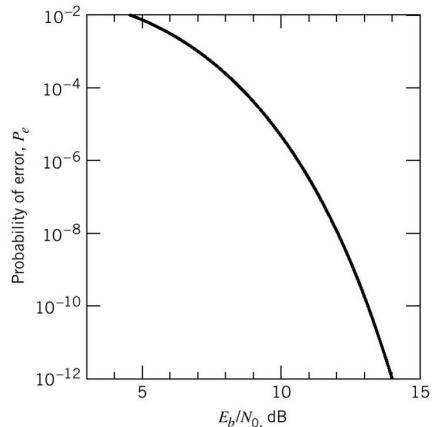
**Nas provas e no exame será permitido consultar 01 (um) livro (NÃO PODE SER FOTOCÓPIA) e uma folha A4 manuscrita.**

## Elementos de um Sistema de Comunicação



## Recursos e Fontes de Degradação de Sistemas de Comunicação

- Potência Transmitida → (SNR: *Signal-to-Noise Ratio*,  $C/N$ ,  $S/N$ ,  $E_b/N_0$ )
  - Eficiência de Potência → Taxa de Erro de Bits (BER: *Bit Error Rate*) vs SNR



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## Recursos e Fontes de Degradação de Sistemas de Comunicação

- Quanta energia o transmissor deve usar para garantir uma determinada confiabilidade na recepção? → *Link Budget*;
- ⇒ é necessário garantir um certo valor de SNR no receptor:

$$\text{SNR} = \frac{\text{Potência recebida}}{\text{Potência de ruído}} = \frac{P_r}{\sigma^2};$$

- A potência recebida é dada por,

$$P_r = \frac{P_t}{L},$$

onde  $P_t$  é a potência transmitida e  $L$  representa as perdas no canal;

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## Recursos e Fontes de Degradão de Sistemas de Comunicação

- Então, a potência transmitida requerida será

$$\text{SNR} = \frac{P_r}{\sigma^2} = \frac{P_t}{L \times \sigma^2},$$
$$\Rightarrow P_t = L \times \sigma^2 \times \text{SNR};$$

- Exemplo:** Se  $\text{SNR} = 100$ ,  $L = 10^{10}$  e  $\sigma^2 = 10^{-11} \text{ mW}$ , então a potência transmitida deverá ser

$$P_t = 10^{10} \times 10^{-11} \times 100 = 10 \text{ mW};$$

- Precisamos lidar com números muito grandes e muito pequenos → em telecomunicações trabalhamos com medidas em decibéis (dB);
- Exemplo anterior:**  $\text{SNR} = 100 \equiv 20 \text{ dB}$ ,  $L = 10^{10} \equiv 100 \text{ dB}$  e  $\sigma^2 = 10^{-11} \text{ mW} \equiv -110 \text{ dBm}$ , então

$$P_t[\text{dBm}] = L[\text{dB}] + \sigma^2[\text{dBm}] + \text{SNR}[\text{dB}]$$
$$= 100 \text{ dB} - 110 \text{ dBm} + 20 \text{ dB}$$
$$= 10 \text{ dBm}.$$

Notes

---

---

---

---

---

---

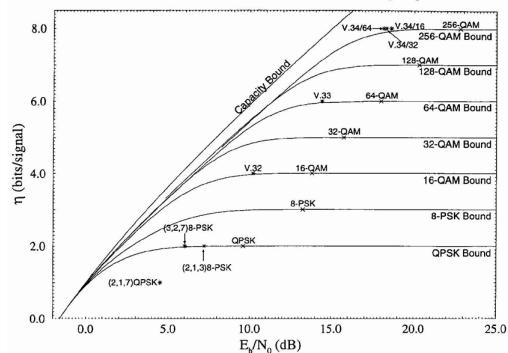
---

---

## Recursos e Fontes de Degradão de Sistemas de Comunicação

- Largura de Banda → Eficiência Espectral

Spectral Efficiency,  $\eta$ , versus  $E_b/N_0$



- Ruído
- Atenuação
- Distorção
- Interferências

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

- Fala, música, imagens, dados de computador, etc.
- Caracterizada em termos do sinal que carrega a informação

## Sinal

Função do tempo que contém informação sobre o comportamento de algum fenômeno

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

# Classificação de Sinais

- Sinais Determinísticos
- Sinais Aleatórios
- Sinais Periódicos
- Sinais não Periódicos
- Sinais Contínuos
- Sinais Discretos
- Sinais de Energia
- Sinais de Potência

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## • Sinais Determinísticos

- Não há incerteza em relação com o seu valor em qualquer instante de tempo. Ex:  $x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_0)$ ,  $A, f_0, \phi_0$  : constantes conhecidas.

## • Sinais Aleatórios

- Há algum grau de incerteza sobre o seu valor. Observado durante um longo período de tempo  $\Rightarrow$  **processo aleatório**: exibe determinadas regularidades que podem ser descritas em termos de probabilidades e médias estatísticas.

## • Sinais Periódicos: $x(t) = x(t + T_0)$ , $-\infty < t < \infty$

## • Sinais não Periódicos: Ex: pulsos, sinais digitais

## • Sinal Contínuo (Analógico):

- $x(t) \rightarrow$  função contínua do tempo  $\Rightarrow$  é unicamente definida para todo  $t$

## • Sinal Discreto:

- $x[nT]$  (ou simplesmente  $x[n]$ ),  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \rightarrow$  somente existe em valores discretos de tempo

- **Sinal Digital:** tempo e amplitude têm valores discretos

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Sinal elétrico,  $x(t)$ : tensão,  $v(t)$ , ou corrente,  $i(t)$ , com potência instantânea  $p(t)$  dada por:

$$p(t) = |v(t)|^2/R = |i(t)|^2R. \text{ Supondo } R = 1\Omega, \Rightarrow p(t) = |x(t)|^2$$

$$\text{para } x(t) \text{ real} \Rightarrow p(t) = x^2(t)$$

- A energia dissipada durante o intervalo de tempo  $(-T/2, T/2)$  por um sinal real com potência instantânea  $p(t)$  é,

$$E_X^T = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- A potência média dissipada pelo sinal durante esse intervalo é,

$$P_X^T = \frac{1}{T} E_X^T = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

### Potência Média

É a taxa à qual a energia é liberada ou consumida. → Determina a tensão (ou corrente) que deve ser aplicada a um transmissor, intensidade de campo magnético, ...

- **Sinais de Energia:**  $0 < E_X < \infty$ . Onde,

$$E_X = \lim_{T \rightarrow \infty} E_X^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$$

- **Sinais de Potência:**  $0 < P_X < \infty$ . Onde,

$$P_X = \lim_{T \rightarrow \infty} P_X^T = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t) dt$$

**Lembrar que:**  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [\cdot] dt = \langle [\cdot] \rangle \rightarrow$  média temporal.

**Para sinais periódicos:**  $\langle [\cdot] \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}+a}^{\frac{T_0}{2}+a} [\cdot] dt$

## Notes

Energia e Potência Média de Sinais

	<b>Tempo contínuo</b>	<b>Tempo discreto</b>
Energia total de sinal não periódicos	$E = \int_{-\infty}^{\infty}  x(t) ^2 dt$	$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2$
Potência média de sinal não periódicos	$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}  x(t) ^2 dt$	$P = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \sum_{n=-\infty}^{\infty}  x[n] ^2$
Potência média de sinal periódicos	$P = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}  x(t) ^2 dt$	$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1}  x[n] ^2$

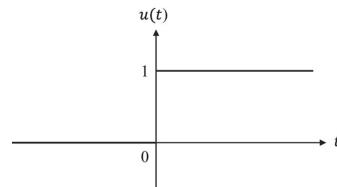
**Sinais de Energia:**  $0 < E_X < \infty$  e  $P = 0$

**Sinais de Potência:**  $0 < P_X < \infty$  e  $E = \infty$ .

## Notes

## Sinais Elementares

- **Degrau unitário:**  $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$



Notes

---

---

---

---

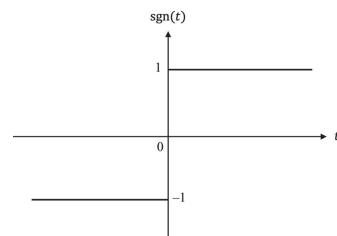
---

---

---

---

- **Função Sinal:**  $\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$



---

---

---

---

---

---

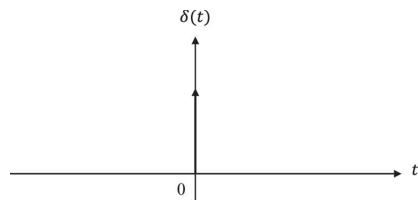
---

---

## Sinais Elementares

- **Pulso retangular:**  $\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2} \\ 0, & \text{fora} \end{cases}$

- **Impulso unitário:**



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

①  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

②  $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

③  $x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$

④  $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0) dt = x(t_0)$

---

---

---

---

---

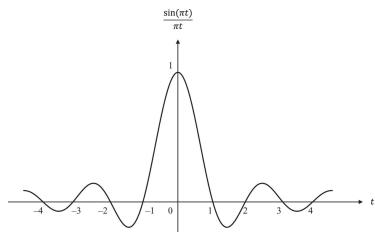
---

---

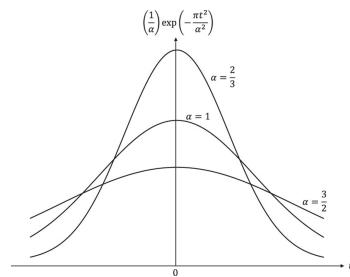
---

## Sinais Elementares

- **Função sinc:**  $\text{sinc}(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$



- **Pulso Gaussiano:**  $g(t) = \left(\frac{1}{\alpha}\right) \exp\left(-\frac{\pi t^2}{\alpha^2}\right), \quad \alpha > 0$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## Sinais Fisicamente Realizáveis

**Exercício 1:** Determine se os seguintes sinais são de energia ou de potência.

- $x_1(t) = e^{-2t}u(t);$
- $x_2(t) = e^{j(2t+\pi/4)};$
- $x_3(t) = \cos(t).$

**Sinais (formas de onda) fisicamente realizáveis satisfazem as seguintes condições:**

- Têm valores significativos de amplitude diferentes de zero sobre um intervalo finito de tempo;
- O espectro de frequências tem valores significativos sobre um intervalo finito de frequências;
- São funções contínuas do tempo;
- Têm um valor pico finito;
- Formas de onda fisicamente realizáveis somente têm valores reais.

Notes

---

---

---

---

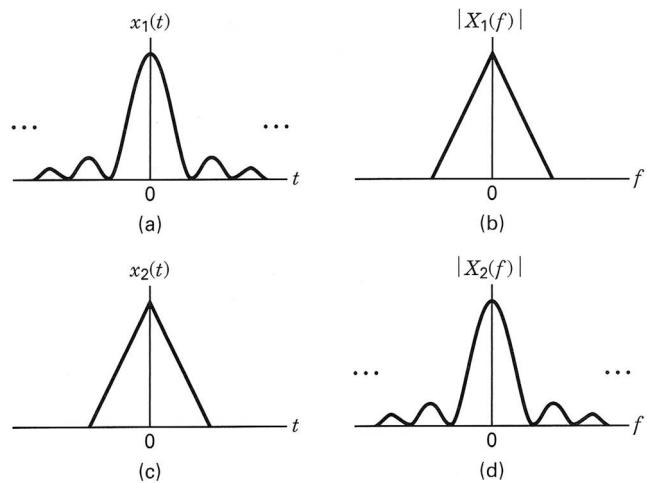
---

---

---

---

## Dependência Tempo-Frequêcia



Notes

---

---

---

---

---

---

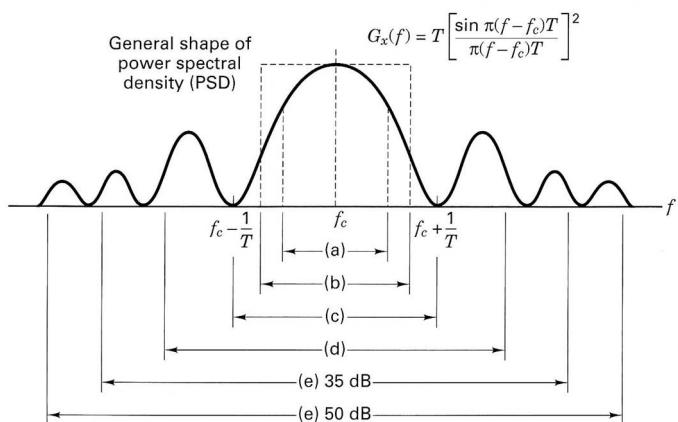
---

---

---

---

## O Dilema da Largura de Banda



Bandwidth of digital data. (a) Half-power. (b) Noise equivalent. (c) Null to null. (d) 99% of power. (e) Bounded PSD (defines attenuation outside bandwidth) at 35 and 50 dB.

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Série de Fourier (forma trigonométrica)

Seja:  $g_{T_0}(t) \rightarrow$  sinal periódico com período  $T_0 = \frac{1}{f_0}$ :

$$g_{T_0}(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(2\pi n f_0 t) + b_n \sin(2\pi n f_0 t)], \text{ onde:}$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t) dt,$$

$$a_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t) \cos(2\pi n f_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t) \sin(2\pi n f_0 t) dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Série de Fourier (forma exponencial)

$$g_{T_0}(t) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n - jb_n) \exp(j2\pi n f_0 t) + (a_n + jb_n) \exp(-j2\pi n f_0 t)]$$

$$\text{Seja, } c_n = \begin{cases} a_n - jb_n, & n > 0 \\ a_0, & n = 0 \\ a_n + jb_n, & n < 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(j2\pi n f_0 t)$$

onde,

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} g_{T_0}(t) \exp(-j2\pi n f_0 t) dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Algumas propriedades da série exponencial de Fourier

- ① Se  $g(t)$  é real,

$$c_n = c_{-n}^*, \quad \arg(c_n) = -\arg(c_{-n}), \quad c_n = |c_n| \exp[\arg(c_n)]$$

- ② Se  $g(t)$  é real e par [isto é,  $g(t) = g(-t)$ ],

$$\Im[c_n] = 0$$

- ③ Se  $g(t)$  é real e ímpar [isto é,  $g(t) = -g(-t)$ ],

$$\Re[c_n] = 0$$

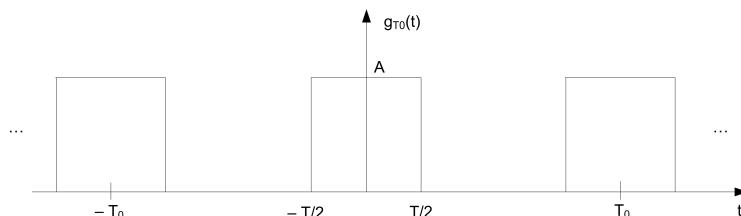
- #### ④ Teorema de Parseval:

$$\frac{1}{T_0} \int_a^{a+T_0} |g(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2.$$

Evelio M. G. Fernández TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Exemplo

Determinar o espectro de amplitudes de um trem periódico de pulsos retangulares de amplitude  $A$ , duração  $T$  e período  $T_0$



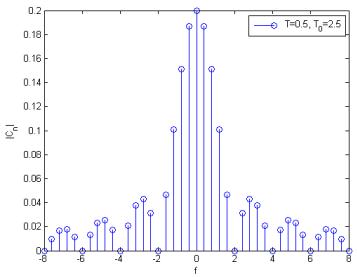
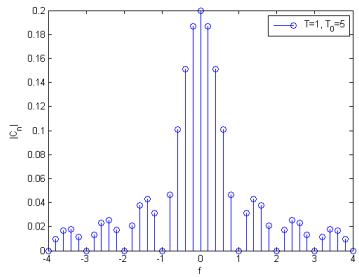
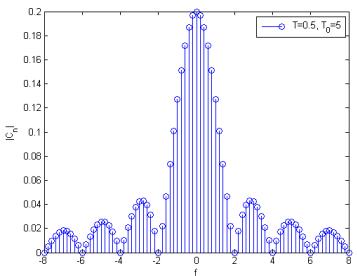
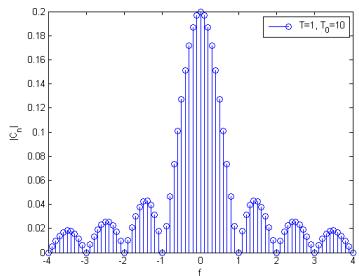
$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{-T/2}^{T/2} A \exp(-j2\pi n f_0 t) dt = \frac{A}{T_0} \left[ -\frac{1}{j2\pi n f_0 t} \exp(-j2\pi n f_0 t) \right]_{-T/2}^{T/2}$$

$$= \frac{TA}{T_0} \operatorname{sinc}\left(\frac{nT}{T_0}\right)$$

## Notes

## Notes

## Notes



Notes

---



---



---



---



---



---

## Transformada de Fourier

$$g(t) = G(f)$$

$$G(f) = \mathcal{F}[g(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}[G(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi ft} df$$

$$G(f) = X(f) + jY(f)$$

$$G(f) = |G(f)| e^{j\theta(f)}$$

$$|G(f)| = \sqrt{X^2(f) + Y^2(f)} \text{ e } \theta(f) = \tan^{-1} \left( \frac{Y(f)}{X(f)} \right)$$

Notes

---



---



---



---



---



---

## Notes

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

- ① Se  $g(t)$  é real, então

$$\begin{aligned} G(-f) &= G^*(f) \\ |G(-f)| &= |G(f)| \\ \theta(-f) &= -\theta(f) \end{aligned}$$

- ② Teorema de Parseval:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_1(t)g_2^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} G_1(f)G_2^*(f) df$$

Se  $g_1(t) = g_2(t) = g(t) \Rightarrow$  Teorema da Energia de Rayleigh:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df.$$

## Pares de Transformadas de Fourier

Fourier Transform Pairs			
Pair Number	$x(t)$	$X(f)$	Comments on Derivation
1.	$\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc} \frac{\pi f}{\tau}$	Direct evaluation
2.	$2W \operatorname{sinc} 2Wt$	$\Pi\left(\frac{f}{2W}\right)$	Duality with pair 1, Example 4-7
3.	$\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi f}{\tau}$	Convolution using pair 1
4.	$\exp(-\alpha t)u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha + j2\pi f}$	Direct evaluation
5.	$t \exp(-\alpha t)u(t), \alpha > 0$	$\frac{1}{(\alpha + j2\pi f)^2}$	Differentiation of pair 4 with respect to $\alpha$
6.	$\exp(-\alpha t ), \alpha > 0$	$\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (2\pi f)^2}$	Direct evaluation
7.	$e^{-\pi i \phi t}$	$\pi e^{-\pi i \phi f}$	Direct evaluation
8.	$\delta(t)$	$1$	Example 4-9
9.	$1$	$\delta(f)$	Duality with pair 7
10.	$\delta(t - t_0)$	$\exp(-j2\pi f t_0)$	Shift and pair 7
11.	$\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f - f_0)$	Duality with pair 9
12.	$\cos 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{2}\delta(f - f_0) + \frac{1}{2}\delta(f + f_0)$	Exponential representation of cos and sin and pair 10
13.	$\sin 2\pi f_0 t$	$\frac{1}{j}\delta(f - f_0) - \frac{1}{j}\delta(f + f_0)$	
14.	$u(t)$	$(j2\pi f)^{-1} + \frac{1}{2}\delta(f)$	Integration and pair 7
15.	$\operatorname{sgn} t$	$(j\pi f)^{-1}$	Pair 8 and pair 13 with superposition
16.	$\frac{1}{\pi t}$	$-j \operatorname{sgn}(f)$	Duality with pair 14
17.	$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\lambda)}{t - \lambda} d\lambda$	$-j \operatorname{sgn}(f)X(f)$	Convolution and pair 15
18.	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_i)$	$f_i \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - mf_i)$ , $f_i = T_i^{-1}$	Example 4-10

## Notes

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

# Propriedades da Transformadas de Fourier

## Notes

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---

### Fourier Transform Theorems<sup>a</sup>

Name of Theorem		
1. Superposition ( $a_1$ and $a_2$ arbitrary constants)	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(f) + a_2X_2(f)$
2. Time delay	$x(t - t_0)$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$
3a. Scale change	$x(at)$	$ a ^{-1}X\left(\frac{f}{a}\right)$
b. Time reversal	$x(-t)$	$X(-f) = X^*(f)$
4. Duality	$X(t)$	$x(-f)$
5a. Frequency translation	$x(t)e^{j\omega_0 t}$	$X(f - f_0)$
b. Modulation	$x(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2}X(f - f_0) + \frac{1}{2}X(f + f_0)$
6. Differentiation	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n X(f)$
7. Integration	$\int_{-\infty}^t x(t') dt'$	$(j2\pi f)^{-1}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$
8. Convolution	$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t - t')x_2(t') dt'$	$X_1(f)X_2(f)$
	$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t')x_2(t - t') dt'$	
9. Multiplication	$x_1(t)x_2(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X_1(f - f')X_2(f') df'$
		$= \int_{-\infty}^{\infty} X_1(f')X_2(f - f') df'$

<sup>a</sup> $\omega_0 = 2\pi f_0$ ;  $x(t)$  is assumed to be real in 3b.

Evelio M. G. Fernández

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

# Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

## Notes

---



---



---



---



---



---



---

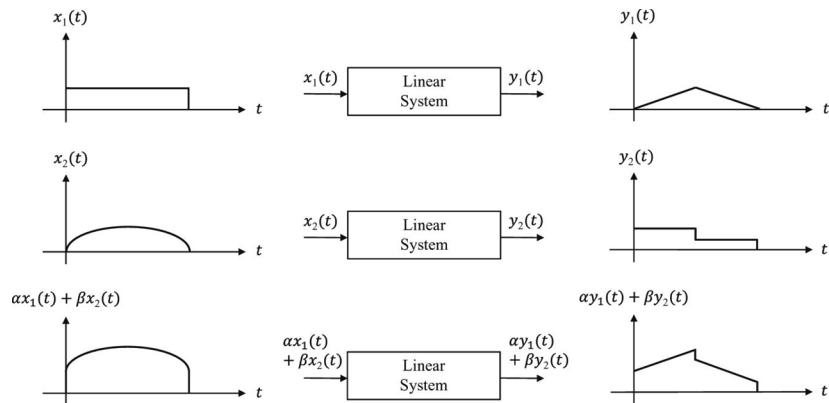


---



---

### Lineariedade:

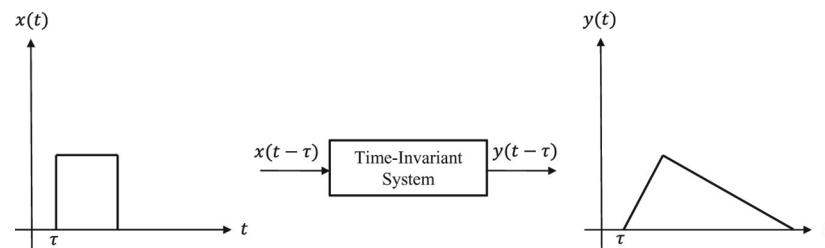
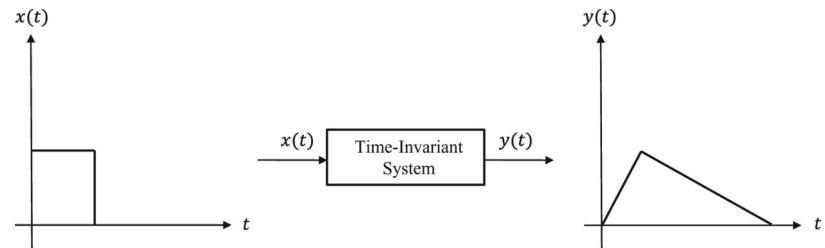


Evelio M. G. Fernández

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

# Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo

## Invariância no tempo:



Notes

---

---

---

---

---

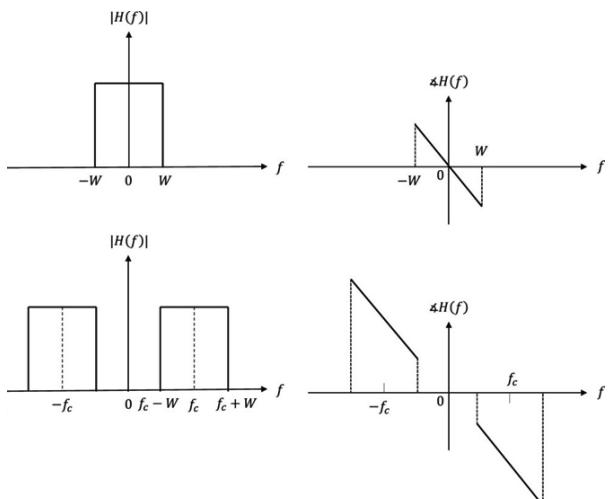
---

---

---

---

# Sistemas LIT - Filtros Ideais



Notes

---

---

---

---

---

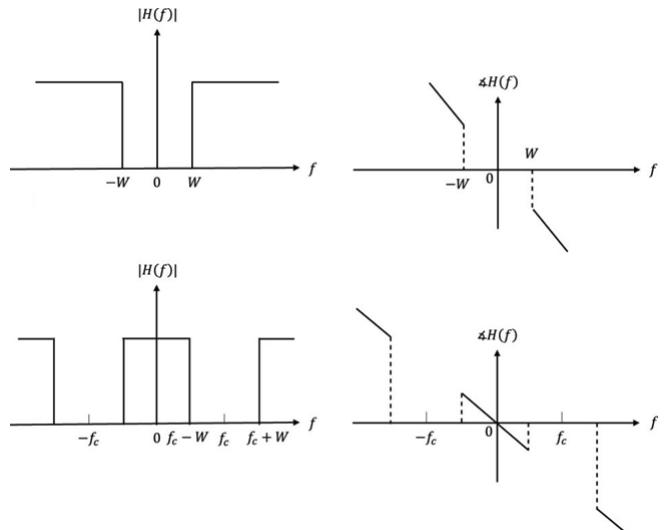
---

---

---

---

Sistemas LIT - Filtros Ideais

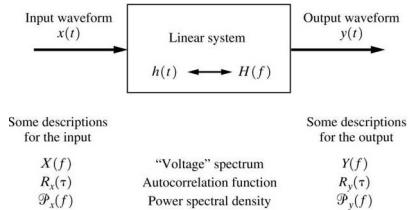


## Notes

Evelio M. G. Fernández TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

# Transmissão de Sinais através de Sistemas Lineares



- $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau) d\tau$

### Some descriptions for the output

$$\begin{array}{l} X(f) \\ R_x(\tau) \end{array}$$

“Voltage” spectrum  
autocorrelation function  
Power spectral density

$$\begin{array}{l} Y(f) \\ R_y(\tau) \end{array}$$

- $Y(f) = X(f)H(f)$

Integral de Convolução

Integral ponderada (de acordo com  $h(t)$ ) sobre a história passada do sinal de entrada onde,

- $\tau$  – tempo de excitação;
  - $t$  – tempo de resposta;
  - $(t - \tau)$  – memória do sistema.

## Notes

Evelio M. G. Fernández TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

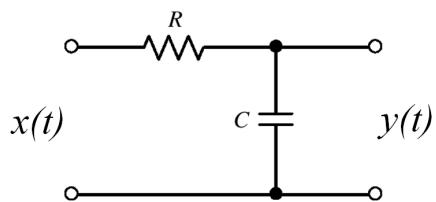
## Exercícios

**Exercício 2:** Considere o sinal  $g(t) = \frac{2a}{(2\pi t)^2 + a^2}$ ,  $a > 0$ .

Determine o valor de  $B$  tal que a faixa de frequências  $[-B, B]$  contenha 99% da energia total de  $g(t)$ .

**Exercício 3:** Considere o circuito RC mostrado na figura.

Determine  $H(f)$  e  $h(t)$ .



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Exercício 4

Considere o sinal  $x(t) = 10 \cos(2\pi f_1 t) + 5 \cos(4\pi f_1 t)$  onde  $f_1 = 2\text{kHz}$ . Este sinal é enviado através de um sistema linear invariante no tempo com resposta impulsiva  $h(t) = 1$  para  $t \in [0,1\text{ms}]$  e zero fora desse intervalo. Seja  $y(t)$  a saída do sistema linear. Determine:

- (a) A transformada de Fourier do sinal  $x(t)$ ;
- (b) A potência média de  $x(t)$ ;
- (c) A função de transferência do sistema, esboçando a resposta de amplitude;
- (d) O sinal de saída,  $y(t)$ ;
- (e) A potência média do sinal de saída  $y(t)$ .

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

- Variável aleatória,  $X$ : número que descreve o valor de uma amostra de um experimento aleatório;
- Função de distribuição cumulativa (cdf):  $F_X(x) = \mathcal{P}[X \leq x]$ ;
- Função densidade de probabilidade (pdf):  $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$ ;
- $\mathcal{P}[x_1 < X \leq x_2] = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$ ;
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ .

## Médias Estatísticas (Momentos)

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

**Momentos de ordem  $n$ :**  $E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f_X(x) dx$

- $n = 1 \rightarrow E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \mu_X$  (média)
- $n = 2 \rightarrow E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx$  (valor médio médio quadrático)

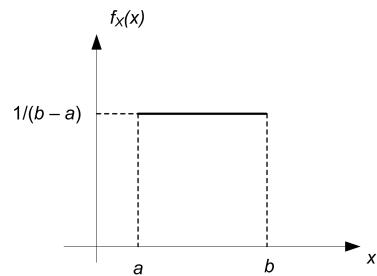
**Momentos centrais de ordem  $n$ :**  $E[(X - \mu_X)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^n f_X(x) dx$

- $n = 1 \rightarrow E[(X - \mu_X)] = 0$
- $n = 2 \rightarrow E[(X - \mu_X)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx$  (variância,  $\sigma_X^2$ )
  - $\sigma_X^2 = E[X^2] - \mu_X^2$

## Exercício 5

Determine a média e a variância da variável aleatória contínua  $X$  com distribuição uniforme dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Duas Variáveis Aleatórias

- $F_{X,Y}(x,y) = \mathcal{P}[X \leq x, Y \leq y];$
- $f_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y};$
- $\mathcal{P}[x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2] = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} f_{X,Y}(x,y) dx dy;$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dx dy = 1.$

Notes

---

---

---

---

---

---

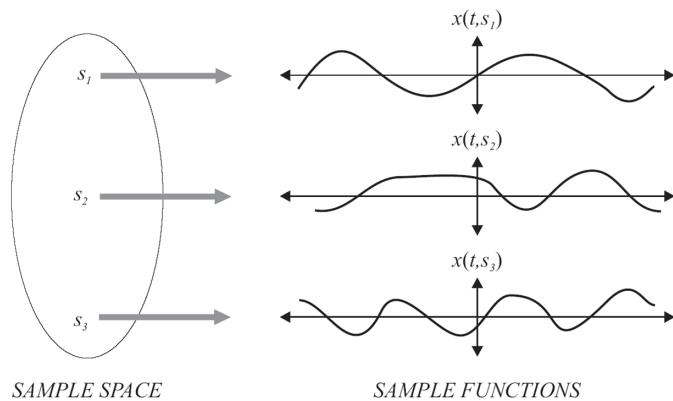
---

---

---

Processo Aleatório

**Processo Aleatório (ou Estocástico),  $X(t)$ :** Função aleatória do tempo para modelar formas de onda desconhecidas.



## Notes

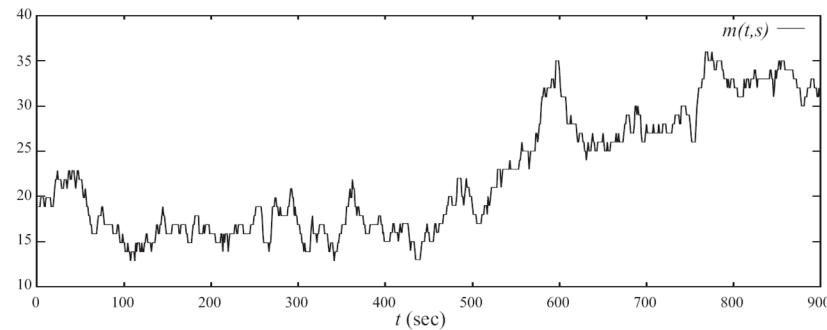
Processos Estocásticos – Definições

- **Processo Estocástico**,  $X(t)$ : Conjunto de funções temporais (realizações) com uma regra probabilística. Associa uma probabilidade a qualquer evento associado a uma observação destas funções.
  - **Função amostra**  $x(t,s)$ : Função do tempo associada com o resultado  $s$  de um experimento (**sinal aleatório**).
  - **Ensemble**: Conjunto de todas as possíveis funções do tempo que podem resultar de um experimento.

## Notes

## Exemplo

Registro,  $M(t)$ , do número de chamadas em andamento contabilizadas num comutador telefônico a cada segundo sobre um intervalo de 15 minutos:



**Média de ensemble:** Número médio de chamadas em andamento em, por exemplo,  $t = 403$  segundos.

**Média temporal:** Número médio de chamadas em andamento durante um determinado intervalo de 15 minutos.

Notes

---

---

---

---

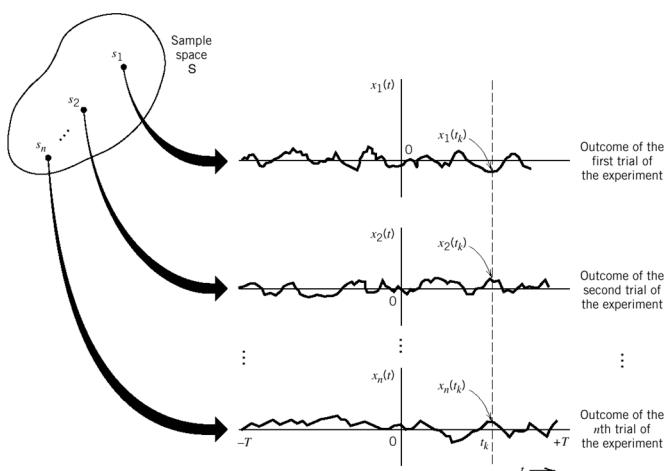
---

---

---

---

## Processo Aleatório



Notes

---

---

---

---

---

---

---

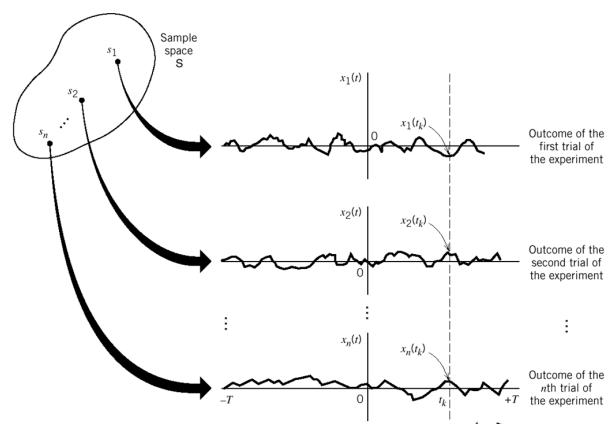
---

- Um processo aleatório, observado num instante de tempo é uma variável aleatória;
- Processo Aleatório: conjunto indexado de V.A. onde o índice é o tempo;
- Para uma V.A: o resultado de um experimento aleatório é associado a um número;
- Para um processo aleatório: o resultado de um experimento aleatório é associado a uma forma de onda que é uma função do tempo.

## Processos Aleatórios: Caracterização Estatística

### Função de Distribuição Conjunta:

$$F_{X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

- O **valor esperado** de um processo estocástico  $X(t)$  é a função determinística do tempo

$$\mu_X(t) = E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X(t)}(x) dx$$

- A função de **autocorrelação** do processo estocástico  $X(t)$  é

$$R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

## Exercício 6

Notes

---

---

---

---

---

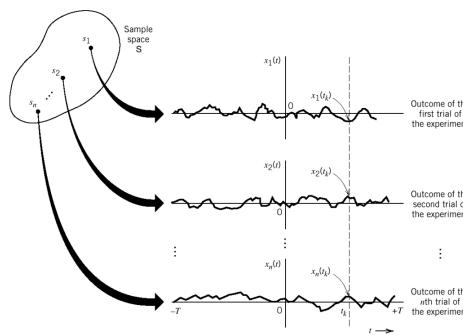
---

---

---

Dado um processo aleatório  $X(t)$  com valor esperado  $\mu_X(t)$  e autocorrelação  $R_X(t_1, t_2)$  considere a observação de  $Y(t) = X(t) + N(t)$  onde  $N(t)$  é um processo aleatório de ruído com  $\mu_N(t) = 0$  e autocorrelação  $R_N(t_1, t_2)$ . Supondo que o processo de ruído é independente de  $X(t)$ , determine o valor esperado e a autocorrelação de  $Y(t)$ .

# Processos Estacionários



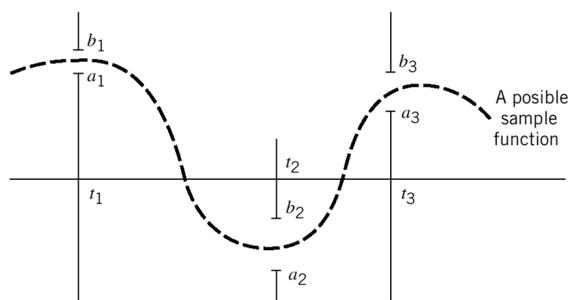
**Processo Aleatório Estacionário (no sentido estrito):** A sua caracterização estatística é independente do tempo em que a observação do processo é iniciada:

$$F_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)\cdots X(t_k+\tau)}(x_1, x_2, \dots, x_k) = F_{X(t_1)X(t_2)\cdots X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

## Notes

## Notes

## Processo Aleatório Estacionário



**Questão:** Avaliar a probabilidade de obtermos uma função amostra  $x(t)$  de um processo aleatório  $X(t)$  que ‘passe’ através deste conjunto de janelas de amplitude.

Evelio M. G. Fernández TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

Notes

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



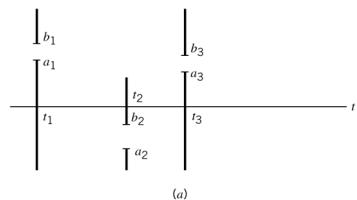
---



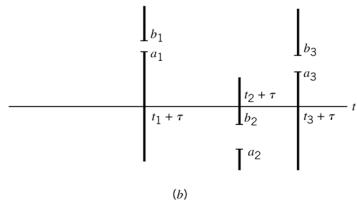
---



---



(a)

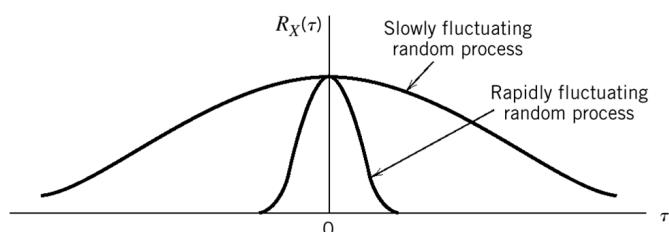


(b)

## Propriedades de Processos Estacionários

- Se  $X(t)$  é um processo aleatório estacionário, então  $Y(t) = aX(t) + b$  é também um processo estacionário;
- $\mu_X(t) = \mu_X$ ;
- $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_2 - t_1) = R_X(\tau)$ , onde  $\tau = t_2 - t_1$ ;
- $X(t)$  é um processo estocástico estacionário no sentido amplo se para todo  $t$ ,

$$E[X(t)] = \mu_X \text{ e } R_X(t_1, t_2) = R_X(\tau).$$



Notes

---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



---



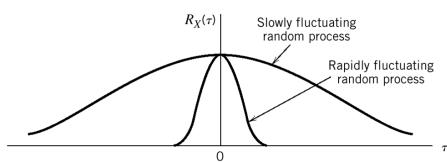
---

## Propriedades da Função de Autocorrelação

①  $R_X(0) = E[X^2(t)]$

②  $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

③  $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$



$R_X(\tau)$  —> descreve a interdependência de duas variáveis aleatórias obtidas observando-se um processo aleatório  $X(t)$  em instantes de tempo  $\tau$  segundos separados.

Notes

---

---

---

---

---

---

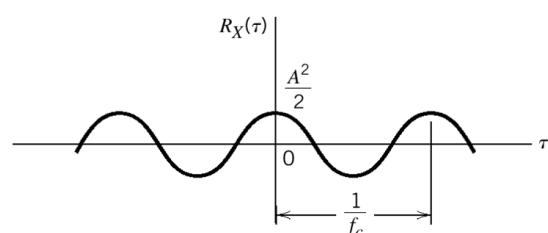
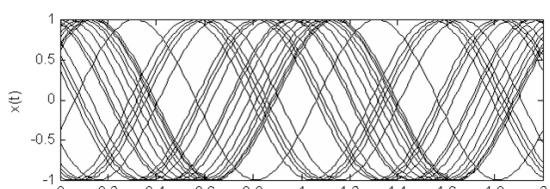
---

---

Evelio M. G. Fernández TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Exemplo: Onda Senoidal com Fase Aleatória

Considere o processo aleatório  $X(t) = A \cos(2\pi f_c t + \Theta)$ , onde  $\Theta$  é uma variável aleatória uniformemente distribuída no intervalo  $[0, 2\pi]$ . Determine o valor esperado e a autocorrelação deste processo.



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

Evelio M. G. Fernández TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

- Um processo aleatório  $X(t)$  é denominado ergódico, na sua forma mais geral, se todas as suas propriedades estatísticas puderem ser determinadas a partir de uma função amostra representante de uma possível realização do processo;
- Um processo aleatório para ser ergódico é necessário que seja estritamente estacionário;
- Entretanto, nem todo processo estacionário é ergódico;
- Em geral, não estamos interessados em todas as médias de ensemble de um processo aleatório  $\Rightarrow$  somente média e função de autocorrelação  $\Rightarrow$  definição de ergodicidade em um sentido mais limitado.

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Médias Temporais de Funções Amostra:

- $\bar{X}(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)dt$
- $\bar{X^2}(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t)dt$
- $R_X(\tau, T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau)x(t)dt$

O processo  $X(t)$  é **ergódico para a média** se,

- $\lim_{T \rightarrow \infty} \bar{X}(T) = \mu_X$
- $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}[\bar{X}(T)] = 0$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

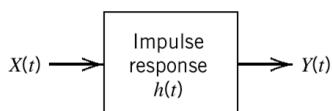
O processo  $X(t)$  é **ergódico na função de autocorrelação** se,

- $\lim_{T \rightarrow \infty} R_X(\tau, T) = R_X(\tau)$
- $\lim_{T \rightarrow \infty} \text{Var}[R_X(\tau, T)] = 0$

**Exemplo:** Considere o processo  $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$ , onde  $\Theta$  é uma variável aleatória com densidade uniforme no intervalo  $[0, 2\pi]$ , e  $A$  é uma V. A. discreta, sendo  $\mathcal{P}[A = 1] = \mathcal{P}[A = 2] = \frac{1}{2}$ .

- a) Calcule  $E[X(t)]$ ,  $R_X(t_1, t_2)$ , e  $\sigma_X^2(t)$ .
- b) Esse processo é ergódico na média? E na autocorrelação?

## Transmissão de um Sinal Aleatório através de um Sistema Linear



- $Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u) du = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)X(u) du$
- $E[Y(t)] = E \left[ \int_{-\infty}^{\infty} h(u)X(t-u) du \right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)E[X(t-u)] du$

Se  $X(t) \rightarrow$  estacionário no sentido amplo:

- $\mu_Y = E[Y(t)] = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(u) du = \mu_X H(0)$
- $R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) \int_{-\infty}^{\infty} h(v)R_X(\tau+u-v)dvdu$

## Densidade Espectral de Potência

Seja  $X_T(f) = \int_{-T}^T x(t)e^{-j2\pi ft}dt$  a transformada de Fourier da versão truncada de uma função amostra  $x(t)$  de um processo aleatório estacionário no sentido amplo  $X(t)$ .

### Densidade Espectral de Potência:

$$S_X(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E [|X_T(f)|^2] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[ \left| \int_{-T}^T x(t)e^{-j2\pi ft} dt \right|^2 \right]$$

#### Teorema de Wiener-Khintchine

$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau, \quad R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Propriedades de $S_X(f)$

①  $S_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) d\tau$

②  $E [X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df$

③  $S_X(f) \geq 0$

④  $S_X(-f) = S_X(f)$  se o processo aleatório for real

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Exemplo: Onda senoidal com fase aleatória

Notes

---



---



---



---



---



---



---



---



---



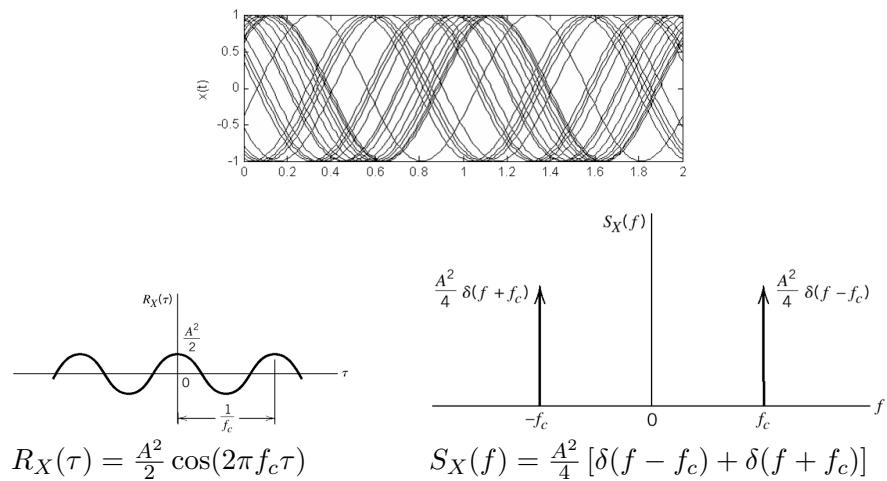
---



---



---



Evelio M. G. Fernández

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Exemplo: Sequência Binária Aleatória

Notes

---



---



---



---



---



---



---



---



---



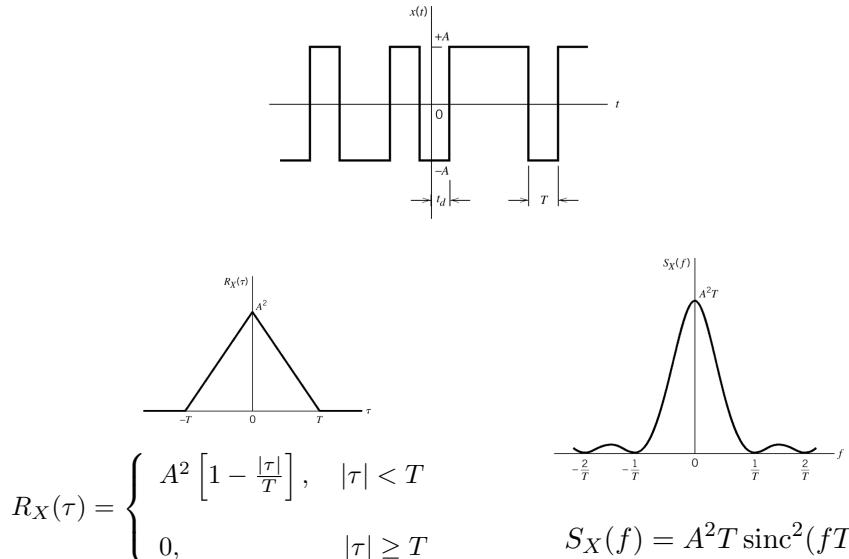
---



---



---

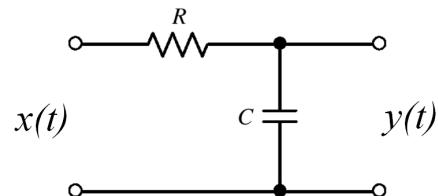


Evelio M. G. Fernández

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

$$S_Y(f) = |H(f)|^2 S_X(f)$$

**Exercício 7:** Uma função amostra de processo aleatório estacionário no sentido amplo  $X(t)$  com função de autocorrelação  $R_X(\tau) = e^{-b|\tau|}$  é o sinal de entrada de um filtro RC passa-baixas. Supondo  $b > 0$  e  $b \neq 1$ , determine  $S_Y(f)$  e  $R_Y(\tau)$ . Determine a potência média do processo de saída.



---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Processos Gaussianos

- ①  $X(t)$  é um processo Gaussiano se  $\mathbf{X} = [X(t_1) \quad \dots \quad X(t_k)]'$  é um vetor Gaussiano.
  - ② Se  $X(t)$  é um processo Gaussiano estacionário no sentido amplo, então  $X(t)$  é um processo Gaussiano estacionário.
  - ③ Se as V.A.s  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  de um processo Gaussiano não são correlacionadas, ou seja, se

$$E \left[ (X(t_k) - \mu_{X(t_k)}) (X(t_i) - \mu_{X(t_i)}) \right] = 0, \quad i \neq k$$

então essas V.A.s são estatisticamente independentes.

- 4 Seja  $X(t)$  um processo Gaussiano na entrada de um sistema linear invariante no tempo, então o processo na saída do sistema continua sendo Gaussiano.

---

---

---

---

---

---

---

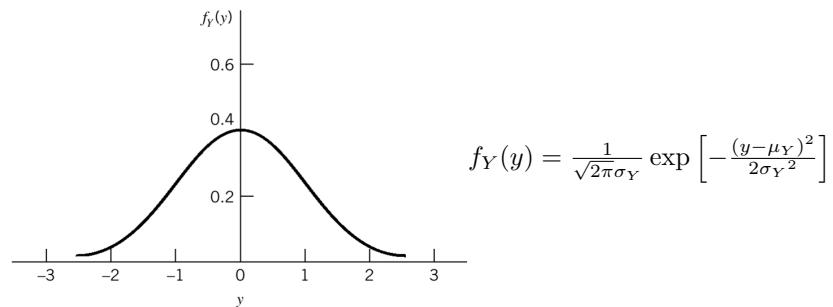
---

---

---

---

---



## Teorema do Limite Central

O efeito soma devido a um grande número de causas independentes tende a um processo Gaussiano:

$$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n \approx \text{Gaussiana para } n \rightarrow \infty$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

# Ruído

## Ruído

Sinais indesejáveis que perturbam a transmissão e o processamento de sinais no receptor e que são incontroláveis.

- Fontes externas: ruído atmosférico, galáctico e ruído provocado pelo homem;
- Fontes internas: flutuações espontâneas de corrente ou tensão em circuitos elétricos;
  - Ruído Impulsivo: Resulta da natureza discreta da corrente;
  - Ruído Térmico: Resulta do movimento aleatório de elétrons em um condutor.

Notes

---

---

---

---

---

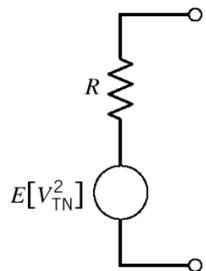
---

---

---

---

## Modelo Equivalente de Ruído Térmico



$$E[V_{TN}^2] = 4kTR\Delta f(\text{Volts})^2$$

$k$  – Constante de Boltzmann  
( $k = 1,38 \times 10^{-23}$  Joules/K)  
 $T$  – Temperatura em K  
 $R$  – Resistência em Ohms  
 $\Delta f$  – Largura de banda em Hz

Notes

---

---

---

---

---

---

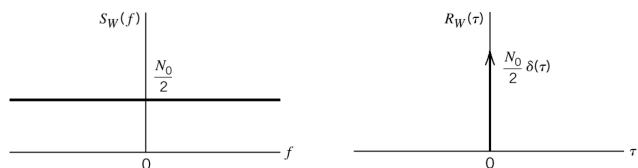
---

---

---

## Ruído Branco

**Ruído Branco:** Forma idealizada cuja densidade espectral de potência é independente da frequência de operação



Temperatura equivalente de ruído do receptor ( $N_0 = kT_e$ )

Temperatura na qual um resistor ruidoso tem de ser mantido a fim de que, conectando-se o resistor à entrada de uma versão sem ruído, ele produza a mesma potência disponível de ruído na saída do sistema que a produzida por todas as fontes de ruído do sistema real.

**Figura de Ruído:**  $NF = \frac{T + T_e}{T}$  (medida com entrada casada e com a fonte de ruído à temperatura  $T$ ).

Notes

---

---

---

---

---

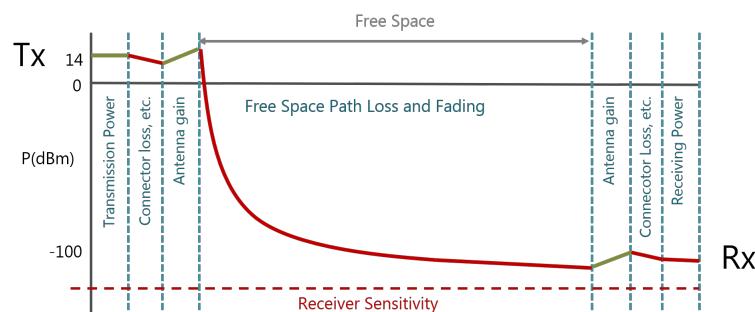
---

---

---

---

## Exemplo: Sensibilidade do Receptor LoRaWAN



► LoRaWAN world record

Notes

---

---

---

---

---

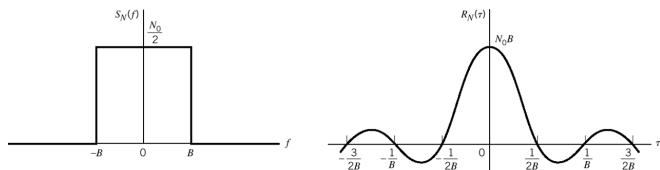
---

---

---

Evelio M. G. Fernández TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Exemplo: Ruído na saída de um filtro passa-baixas ideal



$$S_N(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2}, & -B < f < B \\ 0, & |f| > B \end{cases} \quad R_N(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_0}{2} e^{j2\pi f\tau} df = N_0 B \operatorname{sinc}(2B\tau)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

Evelio M. G. Fernández TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Sinais de Banda Estreita e Envoltória Complexa

Notes

---

---

---

---

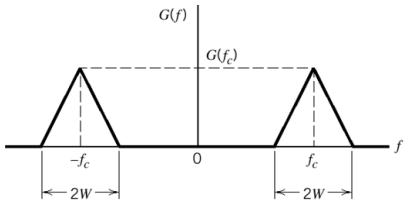
---

---

---

---

$g(t) \rightarrow$  sinal de banda estreita ou sinal passa-faixa,



$g(t) = \Re[\tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t)]$ , onde  $\tilde{g}(t) \rightarrow$  Envoltória Complexa de  $g(t)$

$\tilde{g}(t) = g_I(t) + jg_Q(t) \Rightarrow g(t) = g_I(t) \cos(2\pi f_c t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$  onde,

$g_I(t)$  : componente em fase  
 $g_Q(t)$  : componente em quadratura

} Sinais passa-baixas de valor real.

Evelio M. G. Fernández

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Transformada de Hilbert

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

$$g(t) \rightleftharpoons \hat{g}(t)$$

$$\hat{g}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{g}(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

**Transformada de Hilbert:** Desloca os ângulos de fase de todos os componentes de frequência de um determinado sinal em  $\pm 90$  graus.

Notar que  $\hat{g}(t)$  é a convolução de  $g(t)$  com a função  $\frac{1}{\pi t}$ .

Sabendo que  $\frac{1}{\pi t} \rightleftharpoons -j \operatorname{sgn}(f)$ ,

$$\Rightarrow \hat{G}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) G(f).$$

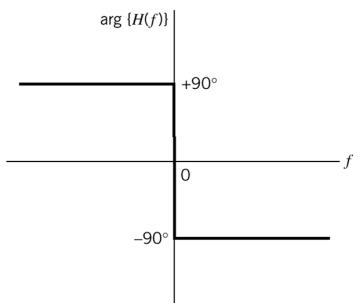
Evelio M. G. Fernández

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Característica de Fase de um Transformador de Hilbert

$\hat{G}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) G(f) \Rightarrow$  pode-se obter  $\hat{g}(t)$  fazendo-se passar  $g(t)$  por um sistema com função de transferência

$$H(f) = -j \operatorname{sgn}(f) :$$



Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

## Algumas propriedades da Trasformada de Hilbert

- ①  $g(t)$  (real) e  $\hat{g}(t)$  têm o mesmo espectro de magnitude;
- ② Se  $\hat{g}(t)$  é a T.H de  $g(t)$ , então a T.H de  $\hat{g}(t)$  será  $-g(t)$ ;
- ③  $g(t)$  e  $\hat{g}(t)$  são ortogonais ao longo do intervalo  $(-\infty, \infty)$ ,

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\hat{g}(t) dt = 0.$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

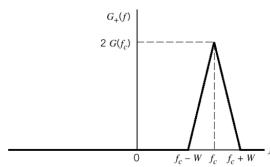
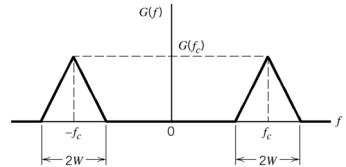
---

## Envoltória Complexa

**Definir:**  $g_+(t) = g(t) + j\hat{g}(t) \rightarrow$  pré-envoltória ou sinal analítico.

**No domínio da frequência:**  $G_+(f) = G(f) + \text{sgn}(f)G(f)$ ,

$$\Rightarrow G_+(f) = \begin{cases} 2G(f), & 0f > 0, \\ G(0), & f = 0, \\ 0, & f < 0. \end{cases}$$

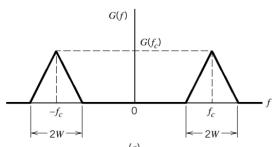


**Pré-envoltória na forma polar:**

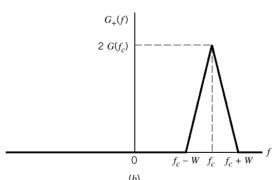
$$g_+(t) = \tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t) \Rightarrow \tilde{g}(t) = g_+(t) \exp(-j2\pi f_c t)$$

**Lembrando que:**  $x(t) \exp(j2\pi f_c t) \rightleftharpoons X(f - f_c)$ ,

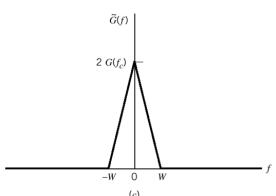
## Envoltória Complexa



(a) Espectro de magnitude de  $g(t)$



(b) Espectro de magnitude da pré-envoltória  $g_+(t)$



(c) Espectro de magnitude da envoltória complexa  $\tilde{g}(t)$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

Notes

---

---

---

---

---

---

---

## Representação Canônica de Sinais Passa-Faixa

Notes

---



---



---



---



---



---



---



---

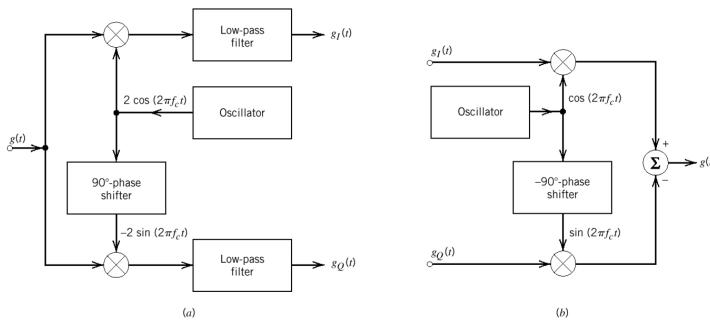


---



---

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \Re[\tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t)] \\
 &= \Re\{[g_I(t) + jg_Q(t)] \exp(j2\pi f_c t)\} \\
 &= \Re\{[g_I(t) + jg_Q(t)][\cos(2\pi f_c t) + j \sin(2\pi f_c t)]\} \\
 &= g_I(t) \cos(2\pi f_c t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_c t).
 \end{aligned}$$



Evelio M. G. Fernández

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Formas Lineares de Modulação

$$\tilde{g}(t) = g_I(t) + jg_Q(t) = a(t) \exp[j\phi(t)],$$

$a(t)$  e  $\phi(t)$  → funções passa-baixas de valor real.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow g(t) &= \Re[\tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t)] = \Re[a(t) \exp(j[2\pi f_c t + \phi(t)])] \\
 &= a(t) \cos[2\pi f_c t + \phi(t)].
 \end{aligned}$$

**Modulação de Amplitude:** Informação transportada pela envoltória da portadora de RF:

$$a(t) = |\tilde{g}(t)| = \sqrt{g_I^2(t) + g_Q^2(t)}.$$

**Modulação de Fase:** Informação transportada pela fase da portadora de RF:

$$\phi(t) = \arctan \left[ \frac{g_Q(t)}{g_I(t)} \right] = \Im(\ln[\tilde{g}(t)]).$$

**Modulação de Frequência:** Informação transportada pela diferença entre o valor da frequência instantânea da portadora de RF modulada e o valor da frequência portadora,  $f_c$ :

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \arctan \left[ \frac{g_Q(t)}{g_I(t)} \right] \right).$$

Notes

---



---



---



---



---



---



---



---

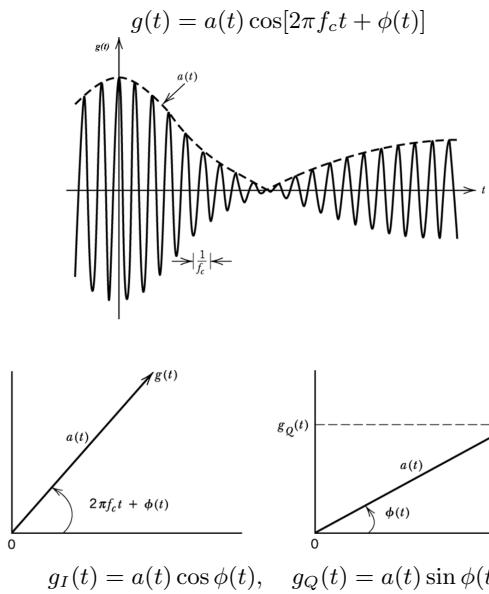


---



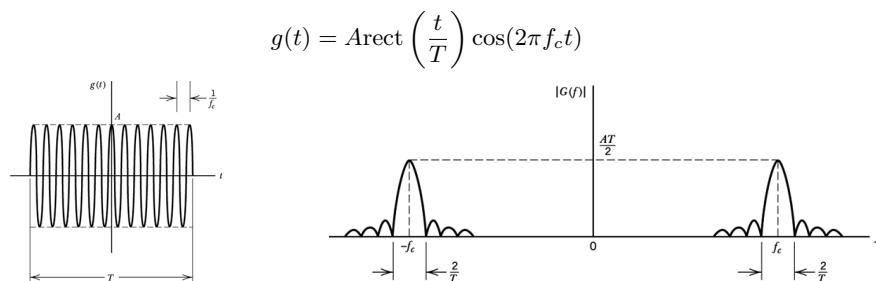
---

Sinais Passa-Faixas e Envoltória Complexa



Evelio M. G. Fernández TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Exemplo: Pulso de RF



$$g(t) = \Re[\tilde{g}(t) \exp(j2\pi f_c t)] = \Re \left[ \text{Arect} \left( \frac{t}{T} \right) \exp(j2\pi f_c t) \right]$$

$$\tilde{g}(t) = A \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right), \quad a(t) = |\tilde{g}(t)| = A \text{rect} \left( \frac{t}{T} \right)$$

## Notes

## Notes

## Ruído de Banda Estreita

Notes

---

---

---

---

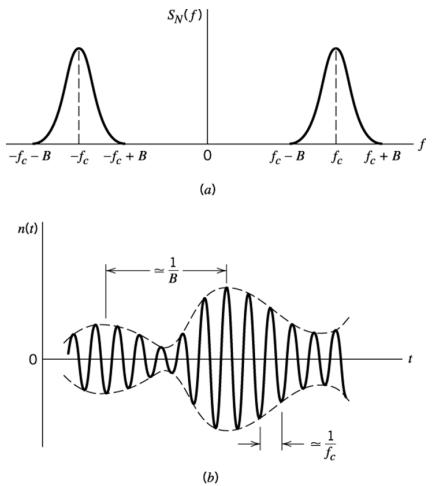
---

---

---

---

---



$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Evelio M. G. Fernández

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Ruído de Banda Estreita: Componentes em Fase e Quadratura

Notes

---

---

---

---

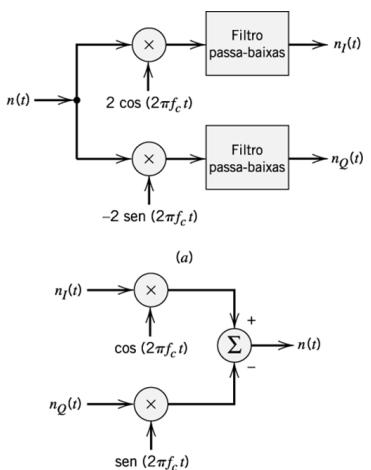
---

---

---

---

---



Evelio M. G. Fernández

TE342 – Sinais e Sistemas de Comunicação

## Propriedades de $n_I(t)$ e $n_Q(t)$

- ①  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  têm valor médio igual a zero.
- ② Se  $n(t)$  for Gaussiano, então  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  serão conjuntamente Gaussianas.
- ③ Se  $n(t)$  for estacionário, então  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  serão conjuntamente estacionárias.
- ④  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  têm a mesma densidade espectral de potência dada por

$$S_{N_I}(f) = S_{N_Q}(f) \begin{cases} S_N(f - f_c) + S_N(f + f_c), & -B < f < B \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

- ⑤  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  têm a mesma variância que o ruído de banda estreita  $n(t)$ .
- ⑥ Se  $n(t)$  for Gaussiano, e  $S_N(f)$  for simétrica em relação à frequência  $f_c$ , então  $n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  serão estatisticamente independentes.

Notes

---

---

---

---

---

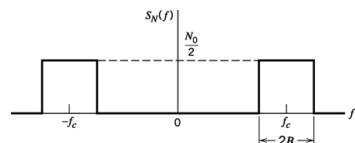
---

---

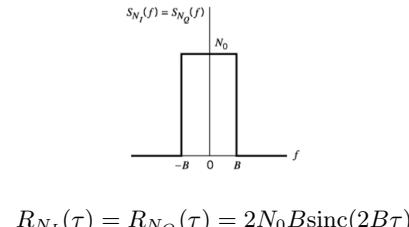
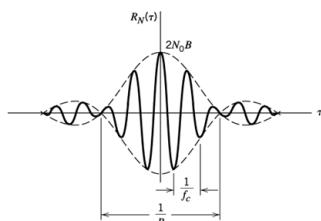
---

---

## Exemplo: Ruído Branco Processado por um Filtro Passa-Faixa Ideal



$$\begin{aligned} R_N(\tau) &= \int_{-f_c-B}^{-f_c+B} \frac{N_0}{2} \exp(j2\pi f\tau) df + \int_{f_c-B}^{f_c+B} \frac{N_0}{2} \exp(j2\pi f\tau) df \\ &= N_0 B \text{sinc}(2B\tau) [\exp(-j2\pi f_c\tau) + \exp(j2\pi f_c\tau)] \\ &= 2N_0 B \text{sinc}(2B\tau) \cos(2\pi f_c\tau). \end{aligned}$$



$$R_{N_I}(\tau) = R_{N_Q}(\tau) = 2N_0 B \text{sinc}(2B\tau)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ruído de Banda Estreita: Envoltória e Fase

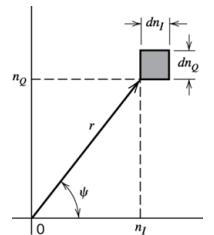
$$n(t) = n_I(t) \cos(2\pi f_c t) - n_Q(t) \sin(2\pi f_c t) = r(t) \cos[2\pi f_c t + \psi(t)]$$

onde,

$$r(t) = \sqrt{n_I^2(t) + n_Q^2(t)}, \quad \psi(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{n_Q(t)}{n_I(t)} \right]$$

$n_I(t)$  e  $n_Q(t)$  num instante  $t \rightarrow$  amostras de V.A.s Gaussianas independentes,  $N_I$  e  $N_Q$ , de média zero, variância  $\sigma^2$  e pdf conjunta dada por:

$$f_{N_I, N_Q}(n_I, n_Q) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left( -\frac{n_I^2 + n_Q^2}{2\sigma^2} \right)$$



A probabilidade de  $N_I$  e  $N_Q$  situarem-se conjuntamente dentro da área sobreada é:

$$f_{N_I, N_Q}(n_I, n_Q) dn_I dn_Q = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left( -\frac{n_I^2 + n_Q^2}{2\sigma^2} \right) dn_I dn_Q$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

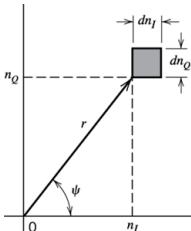
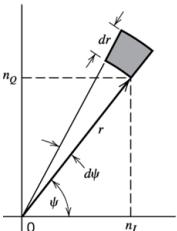
---

## Ruído de Banda Estreita: Envoltória e Fase

Definindo a transformação,

$$n_I = r \cos \psi, \quad n_Q = r \sin \psi$$

No limite  $\rightarrow dn_I dn_Q = r dr d\psi$



Sejam agora  $R$  e  $\Psi$  as V.A.s resultantes da observação (no mesmo tempo  $t$ ) dos processos representados  $r(t)$  e  $\psi(t)$ . Então, a probabilidade de  $R$  e  $\Psi$  situarem-se conjuntamente dentro da área sobreada é:

$$\frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp \left( -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right) dr d\psi$$

$$\Rightarrow f_{R,\Psi}(r,\psi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp \left( -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right)$$

Notes

---

---

---

---

---

---

---

---

---

## Ruído de Banda Estreita: Envoltória e Fase

Notes

---

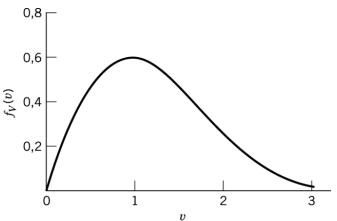
---

$$f_{R,\Psi}(r,\psi) = \frac{r}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$f_\Psi(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}, & 0 \leq \psi \leq 2\pi, \\ 0, & \text{fora} \end{cases}, \quad f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), & r \geq 0, \\ 0, & \text{fora} \end{cases}$$

Sejam

$$v = \frac{r}{\sigma}, \quad f_V(v) = \sigma f_R(r)$$
$$\Rightarrow f_V(v) = \begin{cases} v \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right), & v \geq 0, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$



Distribuição de Rayleigh normalizada

Notes

---

---