EELT-7035 – Processos Estocásticos em Engenharia

Conceitos Básicos de Teoria de Probabilidade

Evelio M. G. Fernández

12 de março de 2019

Notes

Informação sobre a disciplina

- Terças e Quintas feiras das 13:30 às 15:20 horas
- Professor: Evelio Martín García Fernández
- Gabinete 9, Tel: 3361-3221, 99194-3363
- e-mail: evelio@eletrica.ufpr.br
- Página da Disciplina na Internet: www.eletrica.ufpr.br/evelio/TE802/index.htm

Notes

Processos Estocásticos em Engenharia – Conteúdo

Notes

Processos Estocásticos em Engenharia – Bibliografia

- Roy D. Yates, David J. Goodman, "*Probability and Stochastic Processes for Electrical and Computer Engineers*". Second Edition, John Wiley & Sons, Inc, 2005.
- Alberto Leon-Garcia, "*Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*". Third Edition, Pearson Prentice Hall, 2008.
- Scott L. Miller, Donald G. Childers "*Probability and Random Processes*", Elsevier Academic Press, 2004.
- Ross, S., "*Probabilidade, um curso moderno*", 8ª edição, Bookman, 2010.
- Papoulis, A., "*Probability, Random Variables and Stochastic Processes*". 4th Edition, McGraw Hill, 2002.

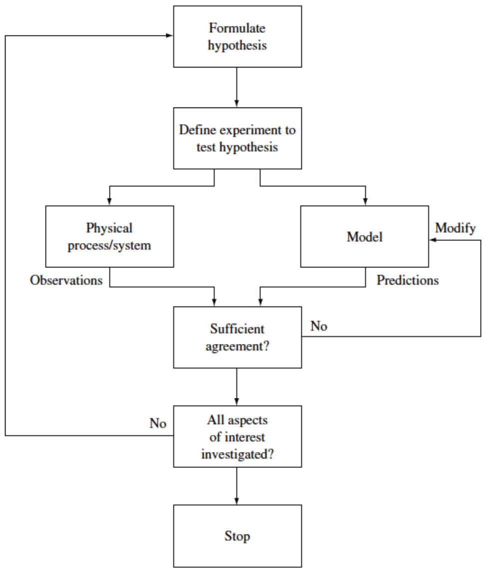
Notes

Processos Estocásticos em Engenharia – Avaliação

- Listas de Exercícios 60% da nota final
- Apresentação de Trabalho: 40% da nota final

Notes

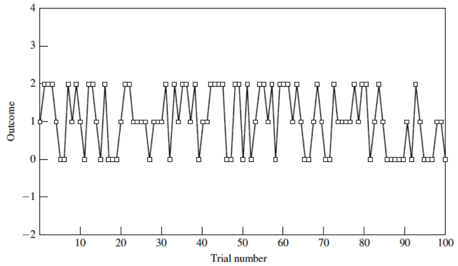
Modelos Matemáticos para Análise e Projeto de Sistemas



Notes

Tipos de Modelos Matemáticos

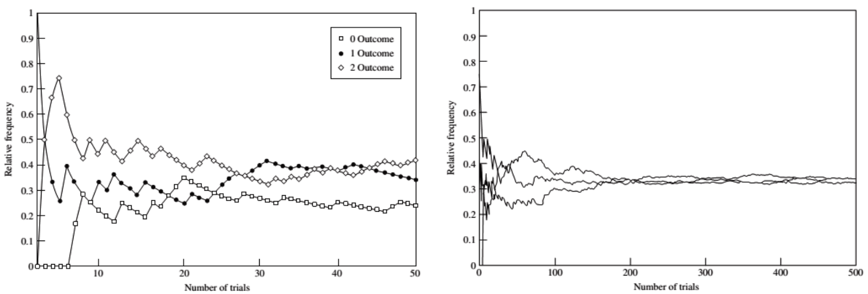
- **Determinísticos**
  - As condições nas quais uma experiência é realizada determinam o resultado exacto do experimento;
  - A solução de um conjunto de equações matemáticas especifica o resultado exacto do experimento;
  - Ex: Modelos envolvendo teoria de circuitos elétricos.
- **Probabilísticos**
  - Experimento aleatório: os resultados variam de forma impredizível quando o experimento é repetido sob as mesmas condições.



Notes

Regularidade Estatística

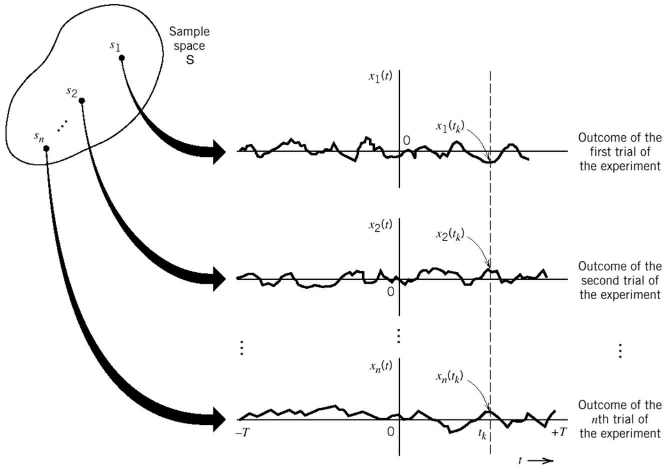
- Eventos aleatórios apresentam regularidade quando os resultados são obtidos promediando longas sequências de repetições de experimentos aleatórios
- ⇒ Frequência relativa de ocorrência de eventos



Notes

Processo Aleatório

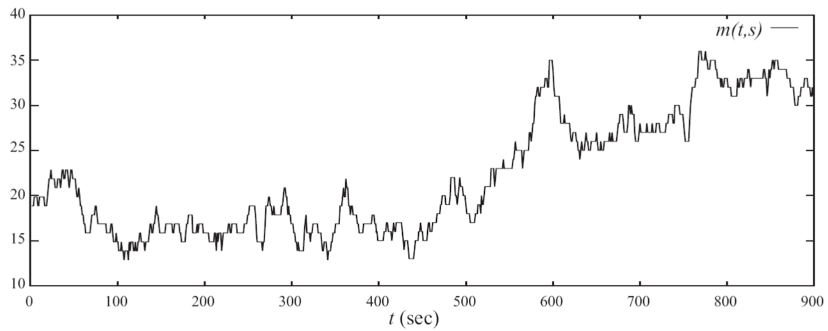
Processo Aleatório (ou Estocástico): Função aleatória do tempo para modelar formas de onda desconhecidas.



Notes

Exemplo

Registro, $M(t)$, do número de chamadas em andamento contabilizadas num comutador telefônico a cada segundo sobre um intervalo de 15 minutos:



Média de ensemble: Número médio de chamadas em andamento em, por exemplo, $t = 403$ segundos.
Média temporal: Número médio de chamadas em andamento durante um determinado intervalo de 15 minutos.

Notes

Introdução à Probabilidade

Interpretações de probabilidade:

- Como uma propriedade física (ex. massa, volume, temperatura) que pode ser medida.
- Interpretação baseada no conhecimento previo sobre algum fato.

Teoria de Probabilidade

Desenvolvida para descrever fenômenos que não podem ser previstos com certeza.

Notes

Revisão de Teoria de Conjuntos

Notação:

- Letras maiúsculas para denotar conjuntos;
- Letras minúsculas para identificar elementos de conjuntos. Ex: $x \in A$, $c \notin A$.

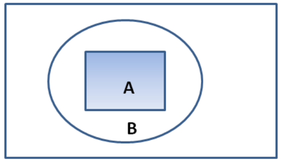
Definição do Conjunto:

- Por meio da listagem de seus elementos. Ex: $A = \{\text{UFPR, DELT, Planeta Marte}\}$
- Por meio de regras. Ex: $B = \{\text{Estudantes da UFPR cujo peso seja superior a 70kg}\}$
- Por meio de regras matemáticas. Ex: $C = \{x^2 | x = 1{,}2{,}3{,}4{,}5\} \Longrightarrow C = \{1{,}4{,}9{,}16{,}25\}$ $D = \{x^2 | x = 1{,}2{,}3, \ldots\}$

Notes

Conjuntos – Notações e Definições

- Subconjuntos $\longrightarrow A \subset B$
- Igualdade $\longrightarrow A = B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$
- Conjunto Universal $\longrightarrow S = \{\cdot\}$. Por definição, todo conjunto é um subconjunto do conjunto universal: $\rightarrow \forall X : X \subset S$
- Conjunto Nulo $\longrightarrow \emptyset \rightarrow \forall A : \emptyset \subset A$
- Diagramas de Venn



Notes

Operações com Conjuntos

- União: $x \in A \cup B$ se e somente se $x \in A$ ou $x \in B$
- Interseção: $x \in A \cap B$ se e somente se $x \in A$ e $x \in B$
- Complemento: $x \in \overline{A}$ se e somente se $x \notin A$
- Diferença: $x \in A - B$ se e somente se $x \in A$ e $x \notin B$. Note que $A - B = A \cap \overline{B}$ e $\overline{A} = S - A$
- Conjuntos Mutuamente Exclusivos: $A_1, A_2, \ldots A_n$ são mutuamente exclusivos se e somente se $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$
- A coleção de conjuntos: $A_1, A_2, \ldots A_n$ é coletivamente exaustiva se e somente se $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$
- Lei de De Morgan: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Evelio M. G. Fernández EELT-7035 – Conceitos Básicos de Teoria de Probabilidade

Notes

Experimento Aleatório

- Caracterizado através de Procedimento, Observações e Modelo
- O experimento pode ser repetido sob condições idênticas
- O resultado é sempre imprevisível
- Para um grande número de ensaios, os resultados exibem um padrão médio, isto é, uma regularidade estatística
- Geralmente usamos a palavra *experimento* para referirmos ao modelo de um experimento

Exemplo 1:

- **Procedimento:** Jogar uma Moeda.
- **Observação:** Observar a face voltada para cima.
- **Modelo:** Resultados (caras e coroas) igualmente prováveis. O resultado de cada jogada não guarda relação com os resultados de jogadas anteriores.

Notes

- **Exemplo 2:** Jogar uma moeda três vezes. Observar a sequência de caras e coroas.
- **Exemplo 3:** Jogar uma moeda três vezes. Observar o número de caras.

$\Rightarrow$ Mesmo procedimento porém, experimentos diferentes pois requerem observações diferentes.

- **Resultado** de um experimento: Qualquer observação possível do experimento.
- **Espaço Amostral:** Conjunto de todos os possíveis resultados.
- **Evento:** Um conjunto de resultados de um experimento.
- **Partição:** Os eventos $A_1, A_2, \dots$ formam uma partição do espaço amostral S se:
  - $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = S$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$

Notes

Axiomas de Probabilidade

Uma medida de probabilidade $\mathcal{P}[\cdot]$ é uma função que associa um número não negativo a um evento A no espaço amostral S e satisfaz os três axiomas seguintes:

1. $0 \leq \mathcal{P} \leq 1$
2. $\mathcal{P}[S] = 1$
3. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $\mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B]$

Propriedades:

1. $\mathcal{P}[\overline{A}] = 1 - \mathcal{P}[A]$
2. Quando A e B não são mutuamente exclusivos, então $\mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B] - \mathcal{P}[AB]$
3. Se $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são eventos mutuamente exclusivos que incluem todas as possibilidades de resultados de um experimento aleatório, então $\mathcal{P}[A_1] + \mathcal{P}[A_2] + \cdots + \mathcal{P}[A_m] = 1$

Notes

Exercício 1

Considere que o aproveitamento dos alunos seja expresso por meio de um inteiro, N, com valores entre 0 e 100 correspondentes aos resultados experimentais $s_0, \ldots, s_{100}$. Valores de N entre 90 e 100 correspondem ao conceito A, de 80 a 89 ao conceito B e de 70 a 79 ao conceito C. Abaixo de 70 considera-se o aluno reprovado (conceito D). Supondo que notas entre 51 e 100 são equiprováveis e que notas abaixo de 50 nunca acontecem, determine as seguintes probabilidades:

a) $\mathcal{P}[s_{79}]$
b) $\mathcal{P}[s_{100}]$
c) $\mathcal{P}[A]$
d) $\mathcal{P}[D]$
e) $\mathcal{P}[N \geq 80]$
f) $\mathcal{P}[N < 90]$
g) $\mathcal{P}$[aluno ser aprovado]

Evelio M. G. Fernández EELT-7035 – Conceitos Básicos de Teoria de Probabilidade

Notes

Probabilidade Condicional

Probabilidade condicional:

- $\mathcal{P}[B|A] = \frac{\mathcal{P}[AB]}{\mathcal{P}[A]}$
- $\mathcal{P}[AB] = \mathcal{P}[B|A]\mathcal{P}[A] = \mathcal{P}[A|B]\mathcal{P}[B]$
- Se $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, sendo $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então $\mathcal{P}[A|B] = \mathcal{P}[A_1|B] + \mathcal{P}[A_2|B] + \cdots$

Lei da probabilidade Total:

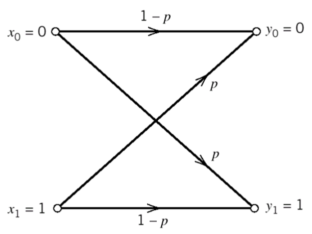
- Se $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ formam uma partição de S então
$$\mathcal{P}[A] = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}[A|B_i]\mathcal{P}[B_i]$$

Teorema de Bayes:

- $\mathcal{P}[B|A] = \dfrac{\mathcal{P}[A|B]\mathcal{P}[B]}{\mathcal{P}[A]} \qquad \mathcal{P}[B_i|A] = \dfrac{\mathcal{P}[A|B_i]\mathcal{P}[B_i]}{\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}[A|B_i]\mathcal{P}[B_i]}$

Notes

Exemplo: Canal Binário Simétrico (BSC)



Para descrever a natureza probabilística deste canal precisamos de dois conjuntos de probabilidades:

1. Probabilidades *a priori*: $\mathcal{P}[x_0] = p_0$ e $\mathcal{P}[x_1] = p_1$;
2. Probabilidades de transição: $\mathcal{P}[y_0|x_1] = \mathcal{P}[y_1|x_0] = p$.

Determinar as probabilidades *a posteriori*: $\mathcal{P}[x_0|y_0]$ e $\mathcal{P}[x_1|y_1]$ em função de p, p_0 e p_1.

Notes

Eventos Independentes

- Dois eventos A e B são independentes se e somente se $\mathcal{P}[AB] = \mathcal{P}[A]\mathcal{P}[B]$
- $\Rightarrow \mathcal{P}[A|B] = \mathcal{P}[A], \quad \mathcal{P}[B|A] = \mathcal{P}[B]$
- Três eventos A_1, A_2 e A_3 são independentes se e somente se
  - a) A_1 e A_2 são independentes,
  - b) A_2 e A_3 são independentes,
  - c) A_1 e A_3 são independentes,
  - d) $\mathcal{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \mathcal{P}[A_1]\mathcal{P}[A_2]\mathcal{P}[A_3]$.
- Para $n \geq 3$, os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes se e somente se
  - a) qualquer conjunto de $n-1$ eventos pertencentes a $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é independente,
  - b) $\mathcal{P}[A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n] = \mathcal{P}[A_1]\mathcal{P}[A_2] \cdots \mathcal{P}[A_n]$.

Notes

Exercício 2

Num experimento, os eventos A, B, C e D tem probabilidades: $\mathcal{P}[A] = 1/4$, $\mathcal{P}[B] = 1/8$, $\mathcal{P}[C] = 5/8$ e $\mathcal{P}[D] = 3/8$. Sabe-se ainda que A e B são disjuntos, enquanto C e D são independentes.

a) Determine $\mathcal{P}[A \cap B]$, $\mathcal{P}[A \cup B]$, $\mathcal{P}[A \cap \bar{B}], \mathcal{P}[A \cup \bar{B}]$.

b) São os eventos A e B independentes?

c) Determine $\mathcal{P}[C \cap D]$, $\mathcal{P}[C \cap \bar{D}]$, $\mathcal{P}[\bar{C} \cap \bar{D}]$.

d) São os eventos C e D independentes?

Notes

Análise Combinatória e Probabilidade

Exemplo: Urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 bolas pretas. Duas bolas são tiradas sequencialmente da urna. A primeira bola é colocada de volta na urna antes de retirar a segunda bola. Qual a probabilidade da primeira bola ser vermelha e a segunda ser preta?

Supor: bolas vermelhas $\rightarrow$ 1,2,3 e bolas pretas $\rightarrow$ 4,5

Espaço amostral, $S = ?$ $\quad S = \{(i,j) : i = 1,2,3,4,5;\ j = 1,2,3,4,5\}$

Evento de interesse, $E = ?$ $\ E = \{(i,j) : i = 1,2,3;\ j = 4,5\}$

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$i=1$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)^*$	$(1,5)^*$
$i=2$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)^*$	$(2,5)^*$
$i=3$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)^*$	$(3,5)^*$
$i=4$	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$
$i=5$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$

Notes

Análise Combinatória e Probabilidade

- **Princípio Fundamental da Contagem:** Se um experimento E consiste de k subexperimentos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ onde E_i pode ter n_i resultados diferentes, então o número total de alternativas é: $\prod_{i=1}^{k} n_i$.

  Exemplo: Quantas diferentes placas de automóvel com 7 caracteres são possíveis se os três primeiros campos forem ocupados por letras e os 4 campos finais por números?

- **Permutação:** Número de permutações considerando n objetos diferentes: $P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$

  Exemplo: Permutações dos objetos **a**, **b** e **c**?

Notes

Análise Combinatória e Probabilidade

- **Arranjo:** Número de arranjos de n objetos, tomados k a k (a ordem de escolha É importante):

  $(n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

  Exemplo: Arranjos de três objetos (**a**, **b**, **c**) em grupos de dois elementos de cada vez?

- **Combinação:** Combinações de n objetos, tomados k a k (a ordem de escolha NÃO É importante):

  $\dbinom{n}{k} = \dfrac{(n)_k}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} \quad \rightarrow$ (coeficiente binomial)

  Exemplo: Número de combinações de três objetos (**a**, **b**, **c**) em grupos de dois elementos de cada vez?

Notes

Coeficientes Multinomiais

Se $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, define-se $\dbinom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ como

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}.$$

Assim, $\dbinom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ representa o número de divisões possíveis de n objetos distintos em r grupos distintos de tamanhos $n_1, n_2, \ldots, n_r$, respectivamente.

Notes

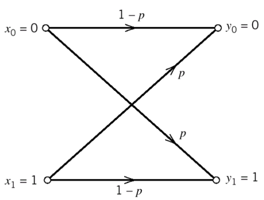
Exercício 3

Tiram-se duas cartas de um baralho e observa-se a sequência de duas cartas na ordem em que aparecem:

a) Número de elementos do espaço amostral?
b) Probabilidade do evento: as duas cartas serem iguais porém de naipes diferentes?
c) Repetir (a) e (b) se a ordem não for importante.

Notes

Exemplo: BSC com Codificação de Canal



- Supor probabilidades *a priori*: $p_0 = p_1 = 0{,}5$;
- Considerar probabilidade de transição: $p = 0{,}25$.

a) Determine a probabilidade média de erro de bit, $\mathcal{P}_e$.
b) Considere agora a utilização de um esquema de codificação de canal que utiliza um código de repetição $C(1{,}n)$ com $n = 2m + 1$, m inteiro. Obtenha uma expressão para a probabilidade média de erro de bit neste caso.
c) Determine o valor da probabilidade média de erro de bit se for usado um código de repetição com $n = 5$.

Notes