EELT-7035 – Processos Estocásticos em Engenharia

Conceitos Básicos de Teoria das Probabilidades

Evelio M. G. Fernández

11 de março de 2020

Notes

Informação sobre a disciplina

- Terças e Quintas feiras das 15:30 às 17:20 horas
- Professor: Evelio Martín García Fernández
- Gabinete 9, Tel: 3361-3221, 99194-3363
- e-mail: evelio@ufpr.br
- Página da Disciplina na Internet: www.eletrica.ufpr.br/evelio/TE802/index.htm

`http://www.eletrica.ufpr.br/evelio/TE802/index.htm`

Notes

Processos Estocásticos em Engenharia – Conteúdo

1. Conceitos Básicos de Teoria das Probabilidades
2. Variáveis Aleatórias Discretas
3. Variáveis Aleatórias Contínuas
4. Duas Variáveis Aleatórias
5. Vetores de Variáveis Aleatórias
6. Soma de Variáveis Aleatórias
7. Processos Estocásticos
8. Processamento de Sinais Aleatórios
9. Processos Markovianos

Notes

Processos Estocásticos em Engenharia – Bibliografia

- Roy D. Yates, David J. Goodman, "*Probability and Stochastic Processes for Electrical and Computer Engineers*". Second Edition, John Wiley & Sons, Inc, 2005.
- Alberto Leon-Garcia, "*Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering*". Third Edition, Pearson Prentice Hall, 2008.
- Scott L. Miller, Donald G. Childers "*Probability and Random Processes*", Elsevier Academic Press, 2004.
- Ross, S., "*Probabilidade, um curso moderno*", 8ª edição, Bookman, 2010.
- Papoulis, A., "*Probability, Random Variables and Stochastic Processes*". 4th Edition, McGraw Hill, 2002.

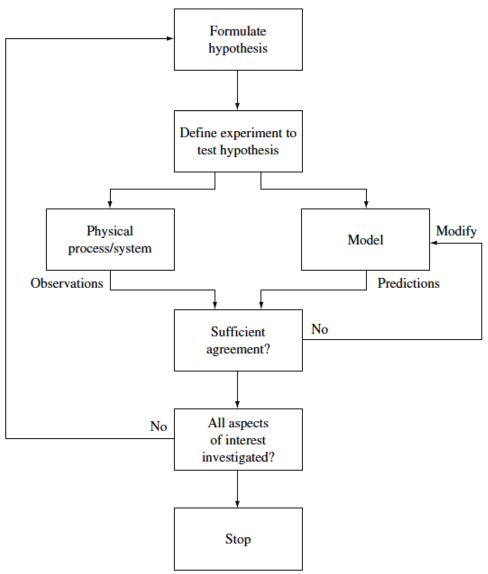
Notes

Processos Estocásticos em Engenharia – Avaliação

- Listas de Exercícios 60% da nota final
- Apresentação de Trabalho: 40% da nota final

Notes

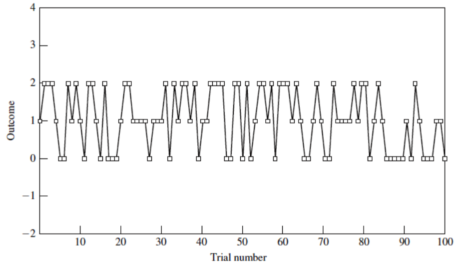
Modelos Matemáticos para Análise e Projeto de Sistemas



Notes

Tipos de Modelos Matemáticos

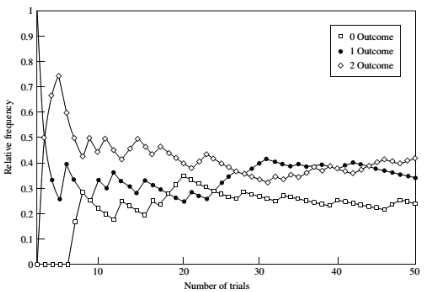
- **Determinísticos**
  - As condições nas quais uma experiência é realizada determinam o resultado exato do experimento;
  - A solução de um conjunto de equações matemáticas especifica o resultado exato do experimento;
  - Ex: Modelos envolvendo teoria de circuitos elétricos.
- **Probabilísticos**
  - Experimento aleatório: os resultados variam de forma impredizível quando o experimento é repetido sob as mesmas condições.

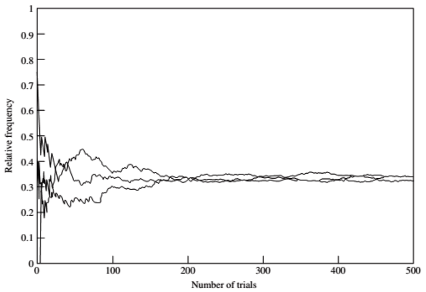


Notes

Regularidade Estatística

- Eventos aleatórios apresentam regularidade quando os resultados são obtidos promediando longas sequências de repetições de experimentos aleatórios
- $\Rightarrow$ Frequência relativa de ocorrência de eventos

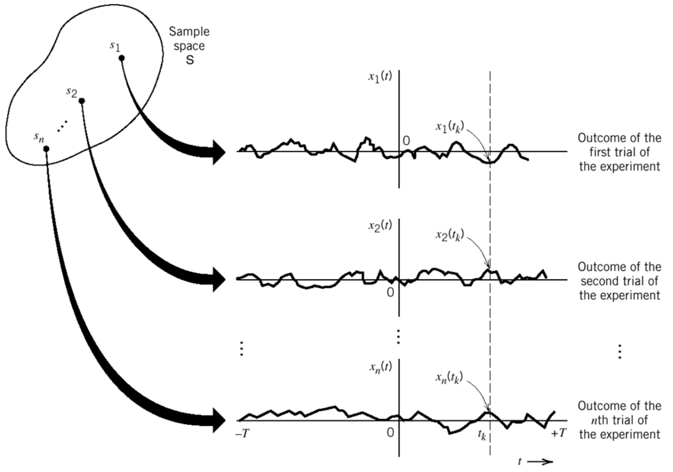




Notes

Processo Aleatório

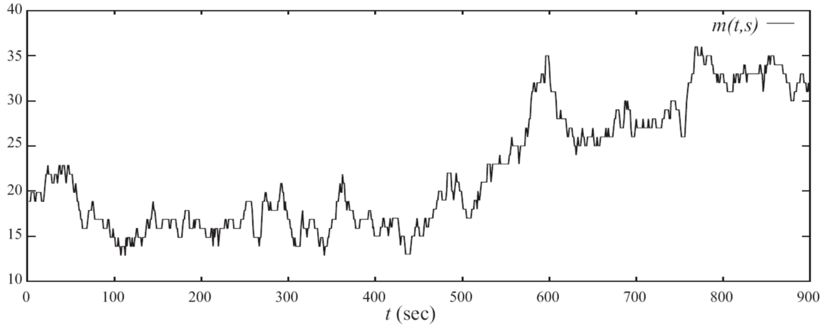
Processo Aleatório (ou Estocástico): Função aleatória do tempo para modelar formas de onda desconhecidas.



Notes

Exemplo

Registro, $M(t)$, do número de chamadas em andamento contabilizadas num comutador telefônico a cada segundo sobre um intervalo de 15 minutos:



Média de ensemble: Número médio de chamadas em andamento em, por exemplo, $t = 403$ segundos.
Média temporal: Número médio de chamadas em andamento durante um determinado intervalo de 15 minutos.

Notes

Introdução à Probabilidade

Interpretações de probabilidade:

- Como uma propriedade física (ex. massa, volume, temperatura) que pode ser medida.
- Interpretação baseada no conhecimento previo sobre algum fato.

Teoria de Probabilidade

Desenvolvida para descrever fenômenos que não podem ser previstos com certeza.

Notes

Revisão de Teoria de Conjuntos

Notação:

- Letras maiúsculas para denotar conjuntos;
- Letras minúsculas para identificar elementos de conjuntos. Ex: $x \in A$, $c \notin A$.

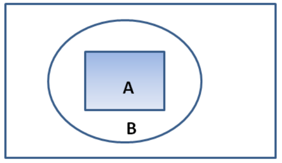
Definição do Conjunto:

- Por meio da listagem de seus elementos. Ex: $A = \{$UFPR, DELT, Planeta Marte$\}$
- Por meio de regras. Ex: $B = \{$Estudantes da UFPR cujo peso seja superior a 70kg$\}$
- Por meio de regras matemáticas. Ex: $C = \{x^2 | x = 1,2,3,4,5\} \Longrightarrow C = \{1,4,9,16,25\}$ $D = \{x^2 | x = 1,2,3,\ldots\}$

Notes

Conjuntos – Notações e Definições

- Subconjuntos $\longrightarrow A \subset B$
- Igualdade $\longrightarrow A = B$ se e somente se $A \subset B$ e $B \subset A$
- Conjunto Universal $\longrightarrow S = \{\cdot\}$. Por definição, todo conjunto é um subconjunto do conjunto universal: $\rightarrow \forall X : X \subset S$
- Conjunto Nulo $\longrightarrow \emptyset \rightarrow \forall A : \emptyset \subset A$
- Diagramas de Venn



Notes

Operações com Conjuntos

- União: $x \in A \cup B$ se e somente se $x \in A$ ou $x \in B$
- Interseção: $x \in A \cap B$ se e somente se $x \in A$ e $x \in B$
- Complemento: $x \in \overline{A}$ se e somente se $x \notin A$
- Diferença: $x \in A - B$ se e somente se $x \in A$ e $x \notin B$. Note que $A - B = A \cap \overline{B}$ e $\overline{A} = S - A$
- Conjuntos Mutuamente Exclusivos: $A_1, A_2, \ldots A_n$ são mutuamente exclusivos se e somente se $A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j$
- A coleção de conjuntos: $A_1, A_2, \ldots A_n$ é coletivamente exaustiva se e somente se $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = S$
- Lei de De Morgan: $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Notes

Experimento Aleatório

- Caracterizado através de Procedimento, Observações e Modelo
- O experimento pode ser repetido sob condições idênticas
- O resultado é sempre imprevisível
- Para um grande número de ensaios, os resultados exibem um padrão médio, isto é, uma regularidade estatística
- Geralmente usamos a palavra *experimento* para referirmos ao modelo de um experimento

Exemplo 1:

- **Procedimento:** Jogar uma Moeda.
- **Observação:** Observar a face voltada para cima.
- **Modelo:** Resultados (caras e coroas) igualmente prováveis. O resultado de cada jogada não guarda relação com os resultados de jogadas anteriores.

Notes

- **Exemplo 2:** Jogar uma moeda três vezes. Observar a sequência de caras e coroas.
- **Exemplo 3:** Jogar uma moeda três vezes. Observar o número de caras.

⇒ Mesmo procedimento porém, experimentos diferentes pois requerem observações diferentes.

- **Resultado** de um experimento: Qualquer observação possível do experimento.
- **Espaço Amostral:** Conjunto de todos os possíveis resultados.
- **Evento:** Um conjunto de resultados de um experimento.
- **Partição:** Os eventos $A_1, A_2, \ldots$ formam uma partição do espaço amostral S se:
  - $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots = S$
  - $A_i \cap A_j = \emptyset$ se $i \neq j$

Notes

Axiomas de Probabilidade

Uma medida de probabilidade $\mathcal{P}[\cdot]$ é uma função que associa um número não negativo a um evento A no espaço amostral S e satisfaz os três axiomas seguintes:

1. $0 \leq \mathcal{P} \leq 1$
2. $\mathcal{P}[S] = 1$
3. Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $\mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B]$

Propriedades:

1. $\mathcal{P}[\overline{A}] = 1 - \mathcal{P}[A]$
2. Quando A e B não são mutuamente exclusivos, então $\mathcal{P}[A \cup B] = \mathcal{P}[A] + \mathcal{P}[B] - \mathcal{P}[AB]$
3. Se $A_1, A_2, \ldots, A_m$ são eventos mutuamente exclusivos que incluem todas as possibilidades de resultados de um experimento aleatório, então $\mathcal{P}[A_1] + \mathcal{P}[A_2] + \cdots + \mathcal{P}[A_m] = 1$

Notes

Exercício 1

Considere que o aproveitamento dos alunos seja expresso por meio de um inteiro, N, com valores entre 0 e 100 correspondentes aos resultados experimentais $s_0, \ldots, s_{100}$. Valores de N entre 90 e 100 correspondem ao conceito A, de 80 a 89 ao conceito B e de 70 a 79 ao conceito C. Abaixo de 70 considera-se o aluno reprovado (conceito D). Supondo que notas entre 51 e 100 são equiprováveis e que notas abaixo de 50 nunca acontecem, determine as seguintes probabilidades:

a) $\mathcal{P}[s_{79}]$
b) $\mathcal{P}[s_{100}]$
c) $\mathcal{P}[A]$
d) $\mathcal{P}[D]$
e) $\mathcal{P}[N \geq 80]$
f) $\mathcal{P}[N < 90]$
g) $\mathcal{P}[\text{aluno ser aprovado}]$

Notes

Exercício 2

Considere um dado viciado de modo que a probabilidade de aparecer um número par é o dobro da probabilidade de sair um número ímpar. Qual a probabilidade de sair um número par, um número ímpar, um número par ou ímpar e um um número par e ímpar.

Notes

Probabilidade Condicional

Probabilidade condicional:

- $\mathcal{P}[B|A] = \frac{\mathcal{P}[AB]}{\mathcal{P}[A]}$
- $\mathcal{P}[AB] = \mathcal{P}[B|A]\mathcal{P}[A] = \mathcal{P}[A|B]\mathcal{P}[B]$
- Se $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots$, sendo $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, então $\mathcal{P}[A|B] = \mathcal{P}[A_1|B] + \mathcal{P}[A_2|B] + \cdots$

Lei da probabilidade Total:

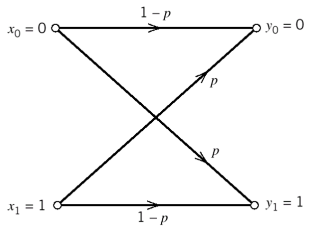
- Se $\{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$ formam uma partição de S então
$$\mathcal{P}[A] = \sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}[A|B_i]\mathcal{P}[B_i]$$

Teorema de Bayes:

- $\mathcal{P}[B|A] = \dfrac{\mathcal{P}[A|B]\mathcal{P}[B]}{\mathcal{P}[A]} \qquad \mathcal{P}[B_i|A] = \dfrac{\mathcal{P}[A|B_i]\mathcal{P}[B_i]}{\sum_{i=1}^{m} \mathcal{P}[A|B_i]\mathcal{P}[B_i]}$

Notes

Exemplo: Canal Binário Simétrico (BSC)



Para descrever a natureza probabilística deste canal precisamos de dois conjuntos de probabilidades:

1. Probabilidades *a priori*: $\mathcal{P}[x_0] = p_0$ e $\mathcal{P}[x_1] = p_1$;
2. Probabilidades de transição: $\mathcal{P}[y_0|x_1] = \mathcal{P}[y_1|x_0] = p$.

Determinar as probabilidades *a posteriori*: $\mathcal{P}[x_0|y_0]$ e $\mathcal{P}[x_1|y_1]$ em função de p, p_0 e p_1.

Notes

Eventos Independentes

- Dois eventos A e B são independentes se e somente se $\mathcal{P}[AB] = \mathcal{P}[A]\mathcal{P}[B]$
- $\Rightarrow \mathcal{P}[A|B] = \mathcal{P}[A], \quad \mathcal{P}[B|A] = \mathcal{P}[B]$
- Três eventos A_1, A_2 e A_3 são independentes se e somente se
  a. A_1 e A_2 são independentes,
  b. A_2 e A_3 são independentes,
  c. A_1 e A_3 são independentes,
  d. $\mathcal{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \mathcal{P}[A_1]\mathcal{P}[A_2]\mathcal{P}[A_3]$.
- Para $n \geq 3$, os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são independentes se e somente se
  a. qualquer conjunto de $n-1$ eventos pertencentes a $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é independente,
  b. $\mathcal{P}[A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n] = \mathcal{P}[A_1]\mathcal{P}[A_2]\cdots\mathcal{P}[A_n]$.

Notes

Exercício 3

Num experimento, os eventos A, B, C e D tem probabilidades: $\mathcal{P}[A] = 1/4$, $\mathcal{P}[B] = 1/8$, $\mathcal{P}[C] = 5/8$ e $\mathcal{P}[D] = 3/8$. Sabe-se ainda que A e B são disjuntos, enquanto C e D são independentes.

a) Determine $\mathcal{P}[A \cap B]$, $\mathcal{P}[A \cup B]$, $\mathcal{P}[A \cap \bar{B}], \mathcal{P}[A \cup \bar{B}]$.
b) São os eventos A e B independentes?
c) Determine $\mathcal{P}[C \cap D]$, $\mathcal{P}[C \cap \bar{D}]$, $\mathcal{P}[\bar{C} \cap \bar{D}]$.
d) São os eventos C e D independentes?

Notes

Análise Combinatória e Probabilidade

Exemplo: Urna contendo 3 bolas vermelhas e 2 bolas pretas. Duas bolas são tiradas sequencialmente da urna. A primeira bola é colocada de volta na urna antes de retirar a segunda bola. Qual a probabilidade da primeira bola ser vermelha e a segunda ser preta?

Supor: bolas vermelhas $\rightarrow$ 1,2,3 e bolas pretas $\rightarrow$ 4,5

Espaço amostral, $S =?$ $\quad S = \{(i,j) : i = 1,2,3,4,5;\ j = 1,2,3,4,5\}$

Evento de interesse, $E =?$ $\quad E = \{(i,j) : i = 1,2,3;\ j = 4,5\}$

	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$
$i=1$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)^*$	$(1,5)^*$
$i=2$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(2,3)$	$(2,4)^*$	$(2,5)^*$
$i=3$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(3,4)^*$	$(3,5)^*$
$i=4$	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$	$(4,5)$
$i=5$	$(5,1)$	$(5,2)$	$(5,3)$	$(5,4)$	$(5,5)$

Notes

- **Princípio Fundamental da Contagem:** Se um experimento E consiste de k subexperimentos $E_1, E_2, \ldots, E_k$ onde E_i pode ter n_i resultados diferentes, então o número total de alternativas é: $\prod_{i=1}^{k} n_i$.

  Exemplo: Quantas diferentes placas de automóvel com 7 caracteres são possíveis se os três primeiros campos forem ocupados por letras e os 4 campos finais por números?

- **Permutação:** Número de permutações considerando n objetos diferentes: $P_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n!$

  Exemplo: Permutações dos objetos **a**, **b** e **c**?

Notes

- **Arranjo:** Número de arranjos de n objetos, tomados k a k (a ordem de escolha É importante):
  $$(n)_k = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

  Exemplo: Arranjos de três objetos (**a**, **b**, **c**) em grupos de dois elementos de cada vez?

- **Combinação:** Combinações de n objetos, tomados k a k (a ordem de escolha NÃO É importante):
  $$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \rightarrow \text{(coeficiente binomial)}$$

  Exemplo: Número de combinações de três objetos (**a**, **b**, **c**) em grupos de dois elementos de cada vez?

Notes

Exercício 4

Tiram-se duas cartas de um baralho e observa-se a sequência de duas cartas na ordem em que aparecem:

a) Número de elementos do espaço amostral?
b) Probabilidade do evento: as duas cartas serem iguais porém de naipes diferentes?
c) Repetir (a) e (b) se a ordem não for importante.

Notes

Coeficientes Multinomiais

Se $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$, define-se $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ como

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}.$$

Assim, $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}$ representa o número de divisões possíveis de n objetos distintos em r grupos distintos de tamanhos $n_1, n_2, \ldots, n_r$, respectivamente.

Notes

Lei de Probabilidade Multinomial

Suponha que um experimento multinomial consiste em n tentativas, e que cada tentativa pode resultar em qualquer um dos r resultados possíveis: $E_1, E_2, \ldots, E_r$. Suponha ainda que cada resultado possível possa ocorrer com probabilidades $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Então, a probabilidade $\mathcal{P}$ de o evento E_1 acontecer n_1 vezes, E_2 acontecer n_2 vezes, ..., e E_r acontecer n_r vezes é:

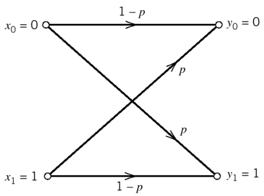
$$\mathcal{P} = \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r},$$

onde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$.

Exemplo: Selecionar aleatoriamente 12 letras do português com reposição. Qual a probabilidade de formar a palavra ESTOCASTICOS?

Notes

Exemplo: BSC com Codificação de Canal



- Supor probabilidades *a priori*: $p_0 = p_1 = 0{,}5$;
- Considerar probabilidade de transição: $p = 0{,}25$.

a) Determine a probabilidade média de erro de bit, $\mathcal{P}_e$.

b) Considere agora a utilização de um esquema de codificação de canal que utiliza um código de repetição $C(1,n)$ com $n = 2m + 1$, m inteiro. Obtenha uma expressão para a probabilidade média de erro de bit neste caso.

c) Determine o valor da probabilidade média de erro de bit se for usado um código de repetição com $n = 5$.

Notes