EELT-7035 – Processos Estocásticos em Engenharia

Duas Variáveis Aleatórias

Evelio M. G. Fernández

15 de abril de 2019

Notes

Duas Variáveis Aleatórias

- Função Distribuição Acumulada Conjunta:

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathcal{P}[X \leq x, Y \leq y]$$

- Propriedades:

(a) $0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1$,

(b) $F_X(x) = F_{X,Y}(x,\infty)$,

(c) $F_Y(y) = F_{X,Y}(\infty,y)$,

(d) $F_{X,Y}(-\infty,y) = F_{X,Y}(x,-\infty)$,

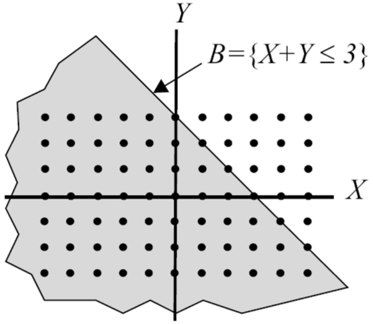
(e) Se $x \leq x_1$ e $y \leq y_1$, então $F_{X,Y}(x,y) \leq F_{X,Y}(x_1,y_1)$

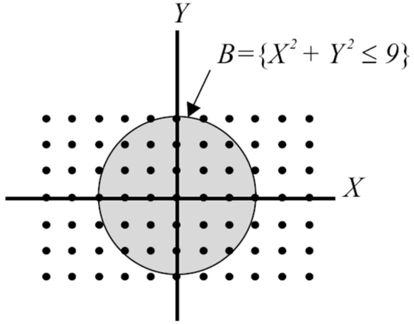
(f) $F_{X,Y}(\infty,\infty) = 1$.

Notes

Função Massa de Probabilidade Conjunta

- $P_{X,Y}(x,y) = \mathcal{P}[X = x, Y = y]$.
- $\sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} P_{X,Y}(x,y) = 1$.





- $\mathcal{P}[B] = \sum_{(x,y) \in B} P_{X,Y}(x,y)$.

Notes

Exemplo 1

A PMF conjunta, $P_{Q,G}(q,g)$, das variáveis aleatórias Q e G é dada pela seguinte tabela:

$P_{Q,G}(q,g)$	$g = 0$	$g = 1$	$g = 2$	$g = 3$
$q = 0$	0,06	0,18	0,24	0,12
$q = 1$	0,04	0,12	0,16	0,08

Determine:

1. $\mathcal{P}[Q = 0]$
2. $\mathcal{P}[Q = G]$
3. $\mathcal{P}[G > 1]$
4. $\mathcal{P}[G > Q]$

Notes

Função Massa de Probabilidade Marginal

Considerando as variáveis aleatórias X e Y com PMF conjunta, $P_{X,Y}(x,y)$, temos que

$$P_X(x) = \sum_{y \in S_Y} P_{X,Y}(x,y), \quad P_Y(y) = \sum_{x \in S_X} P_{X,Y}(x,y).$$

Exemplo 2:

$P_{X,Y}(x,y)$	$y=0$	$y=1$	$y=2$
$x=0$	0,01	0	0
$x=1$	0,09	0,09	0
$x=2$	0	0	0,81

Determine $P_X(x)$ e $P_Y(y)$.

Notes

Função Densidade de Probabilidade Conjunta

- $F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{X,Y}(u,v)dvdu$
- $\mathcal{P}[x < X \leq x + dx, y < Y \leq y + dy] = f_{X,Y}(x,y)dxdy$
- $f_{X,Y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = 1$
- $\mathcal{P}[A] = \iint_A f_{X,Y}(x,y)dxdy$

Notes

Função Densidade de Probabilidade Conjunta

Exemplo 3: As V.A.s X e Y tem PDF conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c, & 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{fora}. \end{cases}$$

Determine:

a) O valor da constante c;
b) $\mathcal{P}[A] = \mathcal{P}[2 \leq X < 3,\ 1 \leq Y < 3]$.

Exemplo 4: As V.A.s X e Y tem PDF conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/15, & 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{fora}. \end{cases}$$

Determine: $\mathcal{P}[A] = \mathcal{P}[Y > X]$.

Notes

Funções Densidade de Probabilidade Marginais

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx$

Exemplo 5: As V.A.s X e Y tem PDF conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 5y/4, & -1 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{fora}. \end{cases}$$

Determine as PDF marginais $f_X(x)$ e $f_Y(y)$.

Notes

Funções de Duas Variáveis Aleatórias

Sejam X e Y duas variáves aleatórias discretas. A variável aleatória $W = g(X,Y)$ tem PMF dada por,

$$P_W(w) = \sum_{(x,y):g(x,y)=w} P_{X,Y}(x,y).$$

Exemplo 6: As V.A.s X e Y tem PMF conjunta dada por:

$$P_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{28}xy, & x = 1,2,4;\ y = 1,3, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

Considerando a função $W = X - Y$, determine:

a) $P_W(w)$
b) $E[W]$
c) $\mathcal{P}[W > 0]$

Notes

Funções de Duas Variáveis Aleatórias

Sejam X e Y duas variáves aleatórias contínuas. A variável aleatória $W = g(X,Y)$ tem CDF dada por,

$$F_W(w) = \mathcal{P}[W \leq w] = \iint_{g(x,y)\leq w} f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

Exemplo 7: As V.A.s X e Y tem PDF conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \lambda\mu e^{-(\lambda x+\mu y)}, & x \geq 0,\ y \geq 0, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

Determine a PDF de $W = Y/X$

Notes

Valores Esperados

- Para duas variáveis aleatórias X e Y, o valor esperado de $W = g(X,Y)$ é:
  - Discreta: $E[W] = \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} g(x,y) P_{X,Y}(x,y)$,
  - Contínua: $E[W] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y}(x,y) dx dy$.
- $E[g_1(X,Y) + \cdots + g_n(X,Y)] = E[g_1(X,Y)] + \cdots + E[g_n(X,Y)]$
- $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$
- $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$

Notes

Valores Esperados

- **Covariância:** $\mathrm{Cov}[X,Y] = E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)]$
- **Correlação:** $r_{X,Y} = E[XY]$
  - $\mathrm{Cov}[X,Y] = r_{X,Y} - \mu_X \mu_Y$
  - $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Cov}[X,Y]$
  - Se $X = Y$, $\mathrm{Cov}[X,Y] = \mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y]$ e $r_{X,Y} = E[X^2] = E[Y^2]$
- X e Y são **ortogonais** se $r_{X,Y} = 0$
- X e Y são **descorrelacionadas** se $\mathrm{Cov}[X,Y] = 0$
- **Coeficiente de Correlação:**

$$\rho_{X,Y} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathrm{Var}[X]\mathrm{Var}[Y]}} = \frac{\mathrm{Cov}[X,Y]}{\sigma_X \sigma_Y}, \quad -1 \le \rho_{X,Y} \le 1$$

Notes

Coeficiente de Correlação

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias tal que $Y = aX + b$. Então,

$$\rho_{X,Y} = \begin{cases} -1, & a < 0, \\ 0, & a = 0, \\ 1, & a > 0. \end{cases}$$

Exemplos de V.A.s e seus coeficientes de correlação:

- X é a altura de um estudante e Y é o peso do mesmo estudante $\Rightarrow 0 < \rho_{X,Y} < 1$
- X é distância de um telefone celular até a estação rádio base e Y é a potência do sinal recebido pelo telefone $\Rightarrow -1 < \rho_{X,Y} < 0$
- X é a temperatura de um resistor medida em graus Celsius e Y é a temperatura do mesmo resistor medida em graus Kelvin $\Rightarrow \rho_{X,Y} = 1$
- X é o ganho de um circuito elétrico medido em decibéis e Y é a atenuação, medida em decibéis, do mesmo circuito $\Rightarrow \rho_{X,Y} = -1$
- X é o número de um telefone celular e Y é o RG do dono do celular $\Rightarrow \rho_{X,Y} = 0$

Notes

Exemplo 8

As variáveis aleatórias L e T representam, respectivamente, o número de páginas e o tempo de transmissão por página de modelos de fax. A PMF conjunta destas V.A.s é dada pela seguinte tabela:

$P_{L,T}(l,t)$	$t = 40$s	$t = 60$s
$l = 1$ página	0,15	0,1
$l = 2$ páginas	0,30	0,2
$l = 3$ páginas	0,15	0,1

Determine:

1. $E[L]$ e $\text{Var}[L]$
2. $E[T]$ e $\text{Var}[T]$
3. $r_{L,T} = E[LT]$
4. $\text{Cov}[L,T]$
5. $\rho_{L,T}$

Notes

Exemplo 9

As V.A.s X e Y tem PDF conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} xy, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

Determine:

a) $E[X]$ e $\mathrm{Var}[X]$
b) $E[Y]$ e $\mathrm{Var}[Y]$
c) $r_{X,Y} = E[XY]$
d) $\mathrm{Cov}[X,Y]$
e) $\rho_{X,Y}$

Notes

Condicionamento por um Evento

- $P_{X,Y|B}(x,y) = \mathcal{P}[X = x, Y = y|B]$
- $P_{X,Y|B}(x,y) = \begin{cases} \frac{P_{X,Y}(x,y)}{\mathcal{P}[B]}, & (x,y) \in B, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$
- $f_{X,Y|B}(x,y) = \begin{cases} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{\mathcal{P}[B]}, & (x,y) \in B, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$
- $E[W|B] = \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} g(x,y) P_{X,Y|B}(x,y),$
- $E[W|B] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X,Y|B}(x,y)\,dx\,dy.$
- $\mathrm{Var}[W|B] = E\left[(W - \mu_{W|B})^2 | B\right] = E[W^2|B] - (\mu_{W|B})^2$

Notes

Exemplo 10

As V.A.s X e Y tem PDF conjunta dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/15, & 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 3, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

a) Determine a PDF condicional de X e Y dado o evento $B = \{X + Y \geq 4\}$

b) Determine o valor esperado condicional de $W = XY$ dado o evento $B = \{X + Y \geq 4\}$

Notes

Condicionamento por uma Variável Aleatória

- $P_{X|Y}(x|y) = \mathcal{P}[X = x|Y = y]$
- $P_{X,Y}(x,y) = P_{X|Y}(x|y)P_Y(y) = P_{Y|X}(y|x)P_X(x)$
- $E[g(X,Y)|Y = y] = \sum_{x \in S_X} g(x,y)P_{X|Y}(x|y)$
- $E[X|Y = y] = \sum_{x \in S_X} xP_{X|Y}(x|y)$
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$
- $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$

Exemplo 11: Dada $f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$,

determinar $f_{X|Y}(x|y)$ para $0 \leq y \leq 1$ e $f_{Y|X}(y|x)$ para $0 \leq x \leq 1$.

Notes

Condicionamento por uma Variável Aleatória

- $E[g(X,Y)|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x,y) f_{X|Y}(x|y) dx$
- $E[X|Y=y] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx$

  Exemplo 12: Com relação à PDF condicional, $f_{X|Y}(x|y)$, obtida no Exemplo 11, determinar $E[X|Y]$.
- $E[E[X|Y]] = E[X]$
- $E[E[g(X)|Y]] = E[g(X)]$

Notes

Variáveis Aleatórias Independentes

As variáveis aleatórias X e Y são independentes se e somente se:

- Caso Discreto: $P_{X,Y}(x,y) = P_X(x) P_Y(y)$
- Caso Contínuo: $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$

Propriedades:

(a) $E[g(X)h(Y)] = E[g(X)]E[h(Y)]$

(b) $r_{X,Y} = E[XY] = E[X]E[Y]$

(c) $\mathrm{Cov}[X,Y] = \rho_{X,Y} = 0$

(d) $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$

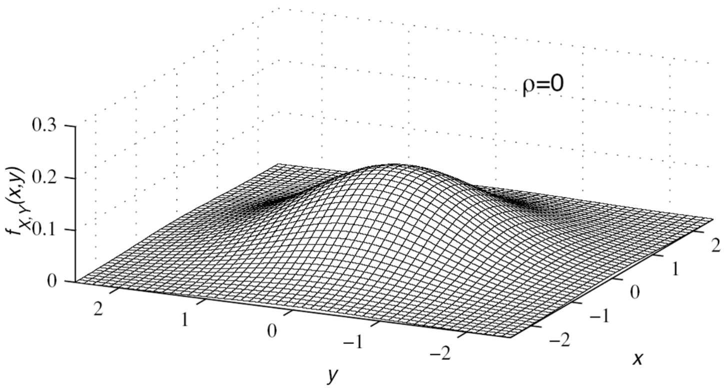
(e) $E[X|Y=y] = E[X] \, \forall y \in S_Y$

(f) $E[Y|X=x] = E[Y] \, \forall x \in S_X$

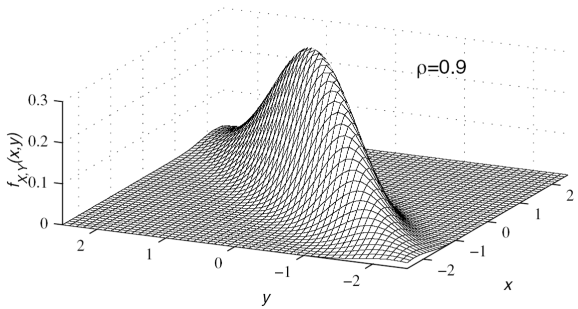
Notes

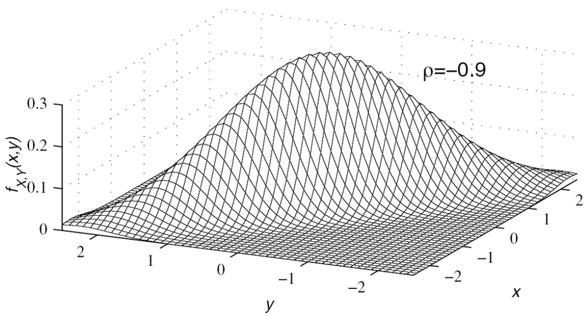
Distribuição Gaussiana Bivariada

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{\exp\left[-\frac{\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2}{2(1-\rho^2)}\right]}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$



Notes





Notes

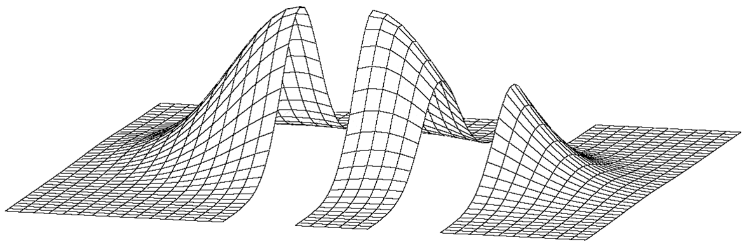
Distribuição Gaussiana Bivariada

Se X e Y são as V.A.s Gaussianas bivariadas definidas anteriormente,

- X é Gaussiana (μ_1,σ_1) e Y é Gaussiana (μ_2,σ_2)
- $f_{Y|X}(y|x) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_2\sqrt{2\pi}} e^{-(y-\tilde{\mu}_2(x))^2/2\tilde{\sigma}_2^2}$, onde, dado $X = x$,
  $\tilde{\mu}_2(x) = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1), \quad \tilde{\sigma}_2^2 = \sigma_2^2(1-\rho^2)$
- $f_{X|Y}(x|y) = \frac{1}{\tilde{\sigma}_1\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\tilde{\mu}_1(y))^2/2\tilde{\sigma}_1^2}$, onde, dado $Y = y$,
  $\tilde{\mu}_1(y) = \mu_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2), \quad \tilde{\sigma}_1^2 = \sigma_1^2(1-\rho^2)$
- $\rho_{X,Y} = \rho$

Notes

PDF Gaussiana Conjunta com $\mu_1 = \mu_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$ e $\rho = 0{,}9$



Notes