

EELT-7035 – Processos Estocásticos em Engenharia

Lista de Exercícios N° 3 (devolver 14/05/2019)

2 de maio de 2019

Evelio M. G. Fernández

Exercício 1 (2,0 pontos)

Um arqueiro atira uma flecha num alvo de raio 50cm. A flecha acerta o alvo aleatoriamente na posição (X,Y) medida em centímetros a partir do centro do alvo localizado em $(X,Y) = (0,0)$. O círculo central do alvo tem 2cm de raio. Calcule a probabilidade $\mathcal{P}[B]$ do evento: o arqueiro “acertar na mosca” (mandar a flecha bem no círculo central do alvo) para cada um dos seguintes modelos:

- (a) X e Y são variáveis aleatórias iid, contínuas uniformes $(-50,50)$.
- (b) A PDF $f_{X,Y}(x,y)$ é uniforme em toda a superfície do alvo.
- (c) X e Y são variáveis aleatórias iid, Gaussianas $(\mu = 0, \sigma = 10)$.

Exercício 2 (2,0 pontos)

Numa regata de iatismo participam 10 veleiros sendo que o tempo de chegada para todos os veleiros pode ser modelado por variáveis aleatórias Gaussianas independentes e identicamente distribuídas com valor esperado 35 minutos e desvio padrão 5 minutos.

- (a) Determine a probabilidade do veleiro ganhador finalizar a regata em menos de 25 minutos.
- (b) Determine a probabilidade do último veleiro finalizar a regata em mais de 50 minutos.

Exercício 3 (3,0 pontos)

MATLAB (e outras linguagens de programação) tem a possibilidade de gerar números aleatórios de forma simples e direta para um grande número de distribuições de probabilidade. Porém, essas PDFs são restritas às mais conhecidas e estudadas. Exponha de forma resumida os seguintes dois métodos para geração de amostras de variáveis aleatórias com distribuição arbitrária:

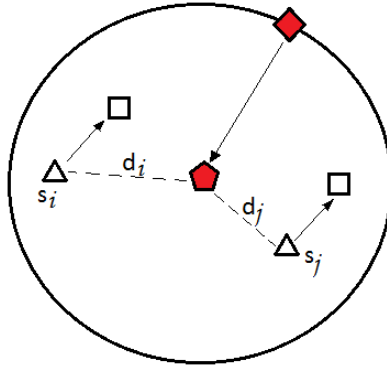
- Método da Transformação Inversa (Inversion Method)
- Método de Aceitação-Rejeição (Rejection Method)

Considere a variável aleatória X com a seguinte função densidade de probabilidade:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, x > \ln\left(\frac{2\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}\right) \\ 1, & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ e^{-x}, & \frac{1}{2} \leq x \leq \ln\left(\frac{2\sqrt{e}}{2-\sqrt{e}}\right) \end{cases} \quad (1)$$

Utilizando o método da Transformação Inversa gere 10^5 amostras de X , faça o histograma das amostras e compare com a curva analítica da PDF.

Exercício 4 (3,0 pontos)



Rádio cognitivo é uma tecnologia de rede em que usuários secundários (cognitivos) operam na mesma região de cobertura e sem causar interferência nos detentores primários dos canais de comunicação, como mostrado na figura. Os usuários primários (nós em vermelho na figura) não podem sofrer interferência, enquanto que os usuários secundários (pares triângulo - quadrado na figura) utilizam concorrentemente o espectro de forma tal que a interferência ocasionada ao receptor primário seja inferior a um determinado limiar. Considere o seguinte problema: no centro de uma área circular de rádio $r = 1$ está situado o receptor primário (único na topologia). Cada nó transmissor secundário s_i , $i = 1, 2, \dots, 10$, encontra-se a d_i unidades de distância do receptor primário. Cada um deles tem duas alternativas, não transmitir e permanecer em silêncio ou transmitir ocasionando uma interferência de $I_i = 1/d_i$ unidades ao receptor primário. A interferência máxima permitida pelo receptor primário é

$I_{\max} = 15$ unidades ($\sum_{i=1}^{10} I_i \leq I_{\max} = 15$). A decisão de quais nós transmitem e quais não é tomada centralizadamente de forma tal que sempre o maior número possível de nós secundários estão transmitindo. Gere 3000 topologias diferentes onde os nós secundários são distribuídos uniformemente na região circular e determine a probabilidade de um usuário secundário qualquer (sem saber a sua localização) conseguir transmitir nesse cenário. Note que a probabilidade pedida é $p = \frac{\bar{n}_t}{10}$, onde \bar{n}_t é o número médio de usuários que conseguem transmitir.

Algumas Respostas

Exercício 1

- (a) $\mathcal{P}[B] \approx 0,0013$ (b) $\mathcal{P}[B] \approx 0,0016$ (c) $\mathcal{P}[B] \approx 0,0198$

Exercício 2

- (a) $\Pr(\cdot) = 0,2056$ (b) $\Pr(\cdot) = 0,0134$.

Exercício 4

$p \approx 0,88$.