EELT-7035 – Processos Estocásticos em Engenharia

Variáveis Aleatórias Discretas

Evelio M. G. Fernández

21 de março de 2019

Notes

Variáveis Aleatórias

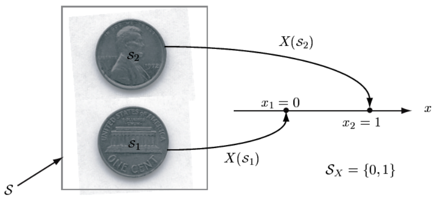
- **Variável aleatória, $X(\cdot)$:** função que mapeia o espaço amostral (S) em números pertencentes a um subconjunto dos números reais (S_X) que descrevem os valores das amostras (resultados) de um experimento aleatório.

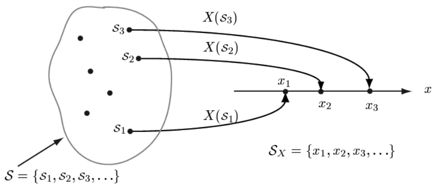
  Exemplo 1: Jogar uma moeda três vezes. Observar o número de caras.

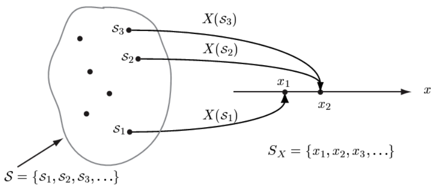
  Exemplo 2: Três bolas são selecionadas aleatoriamente e sem devolução de uma urna contendo 20 bolas numeradas de 1 a 20. Se apostamos que pelo menos uma das bolas selecionadas tem um número maior ou igual a 17, qual a probabilidade de vencermos a aposta?

- **Variável aleatória discreta:** Pode assumir um número contável de valores possíveis.

Notes







Notes

- **Função Massa de Probabilidade (PMF):**

$$P_X(x) = P[X = x]$$

- Para uma variável aleatória discreta X com PMF $P_X(x)$ e faixa de valores S_X:
  - a) $\forall x, P_X(x) \geq 0$.
  - b) $\sum_{x \in S_X} P_X(x) = 1$.
  - c) Para qualquer evento $B \subset S_X$, a probabilidade de X pertencer ao conjunto B é: $\mathcal{P}[B] = \sum_{x \in B} P_X(x)$

Exemplo 3: A PMF da variável aleatória N é dada por:

$$P_N(n) = \begin{cases} c/n, & n = 1,2,3 \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

Determine:

- a) O valor de c
- b) $\mathcal{P}[N = 1]$
- c) $\mathcal{P}[N \geq 2]$
- d) $\mathcal{P}[N > 3]$

Notes

Variável Aleatória de Bernoulli com parâmetro p

Notes

Exemplo: Testar um circuito integrado. O circuito é rejeitado com probabilidade p. Seja X o número de circuitos rejeitados em um teste $\rightarrow P_X(x)$?

$$P_X(x) = \begin{cases} 1-p, & x = 0 \\ p, & x = 1 \\ 0, & \text{fora} \end{cases}, \quad 0 < p < 1$$

.

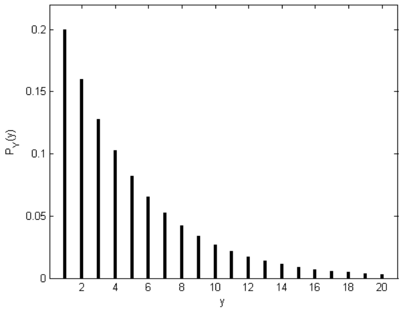
Variável Aleatória Geométrica com parâmetro p

Notes

Exemplo: Seja X o número de testes até que o primeiro CI defeituoso apareça, $\rightarrow P_X(x)$?

$$P_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1}, & x = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{fora} \end{cases}, \quad 0 < p < 1$$

.



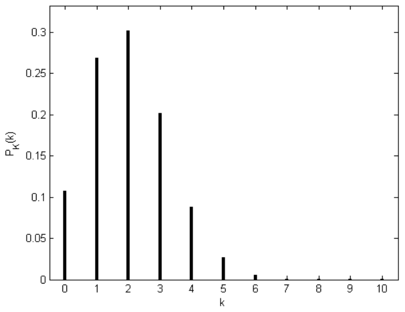
PMF geométrica com $p = 0{,}2$.

Variável Aleatória Binomial com parâmetros $(n,\ p)$

Exemplo: Teste de n CIs onde cada circuito é rejeitado com probabilidade p. Seja X o número de CIs rejeitados nos n testes, $\rightarrow P_X(x)$?

$$P_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{fora} \end{cases}, \quad 0 < p < 1$$

.



PMF binomial com $p = 0{,}2$ e $n = 10$.

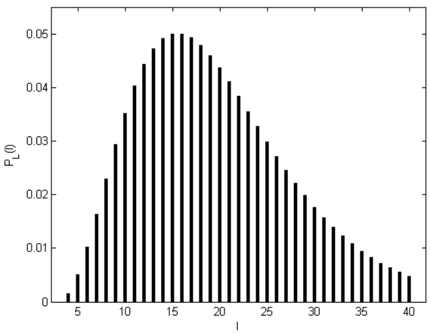
Notes

Variável Aleatória de Pascal com parâmetros $(k,\ p)$

Exemplo: CIs são testados até que k rejeições aconteçam. Seja X o número de testes que precisam ser realizados, $\rightarrow P_X(x)$?

$$P_X(x) = \binom{x-1}{k-1} p^k (1-p)^{x-k}, \quad 0 < p < 1$$

.



PMF de Pascal com $p = 0{,}2$ e $k = 4$.

Notes

Variáveis Aleatórias Uniforme e de Poisson

- Variável Aleatória Uniforme:

$$P_X(x) = \begin{cases} 1/(l-k+1), & x = k, k+1, k+2, \ldots, l \\ 0, & \text{fora} \end{cases}$$

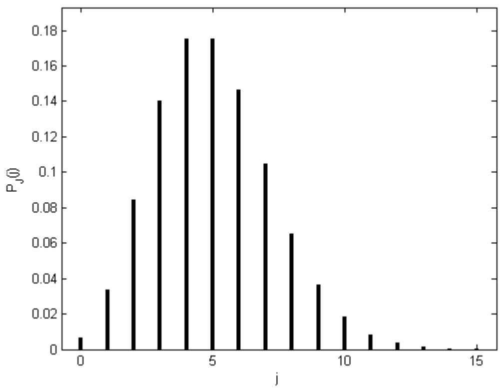
- Variável Aleatória de Poisson com parámetro α (descreve fenômenos que ocorrem aleatoriamente no tempo):

$$P_X(x) = \begin{cases} \alpha^x e^{-\alpha}/x!, & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{fora} \end{cases}, \quad \alpha > 0$$

Notes

Variável Aleatória de Poisson

Exemplo: Central telefônica com taxa de chegadas de $\lambda = 0{,}25$ chamadas por segundo. A PMF do número de chamadas que chegam em qualquer intervalo de $T = 20$ segundos é uma PMF de Poisson com $\alpha = 5$.



Notes

Exercício 1

Num sistema sem fio de medição automática de energia elétrica, uma estação base envia um sinal de "wake-up" aos medidores dentro da sua área de cobertura. Ao escutar este sinal, o medidor transmite uma mensagem informando o consumo de energia elétrica. Cada mensagem é repetida oito vezes.

a) Se a transmissão com sucesso de uma mensagem acontece com probabilidade p, qual é a PMF de N, o número de mensagens transmitidas com sucesso?

b) Seja o indicador I uma V.A. tal que $I = 1$ se pelo menos uma mensagem é transmitida com sucesso; caso contrário $I = 0$. Determine a PMF de I.

Notes

Exercício 2: Número de Acessos a uma Página Web

Considere uma página web com $\lambda = 2$ acessos por segundo.

a) Qual a probabilidade de não haver nenhum acesso num intervalo de 0,25 segundos?

b) Qual a probabilidade de não haver mais do que dois acessos no intervalo de um segundo?

Notes

Função de Distribuição Acumulada, CDF

- **Função de Distribuição Acumulada:** $F_X(x) = P[X \leq x]$

$$\Rightarrow F_X(x) = \sum_{x_k \leq x} P_X(x_k) = \sum_k P_X(x_k) u(x - x_k)$$

- Para uma variável aleatória discreta X com faixa de valores $S_X = x_1, x_2, \ldots, \quad x_1 \leq x_2 \leq, \ldots,$
  - a) $F_X(-\infty) = 0$ e $F_X(\infty) = 1$.
  - b) $\forall x' \geq x, \quad F_X(x') \geq F_X(x)$.
  - c) Para $x_i \in S_X$ e qualquer número arbitrariamente pequeno $\epsilon > 0$,
    $$F_X(x_i) - F_X(x_i - \epsilon) = P_X(x_i)$$
  - d) $F_X(x) = F_X(x_i)$ para todo x tal que $x_i \leq x < x_{i+1}$.
  - e) Para todo $b \geq a, \quad F_X(b) - F_X(a) = \mathcal{P}[a < X \leq b]$.

Notes

Medidas Estatísticas

- **Moda:** A moda da V.A. X é um número x_{mod}, tal que $P_X(x_{\text{mod}}) \geq P_X(x), \ \forall x$.
- **Mediana:** A mediana, x_{med}, da V.A. X é um número que satisfaz $\mathcal{P}[x < x_{\text{med}}] = \mathcal{P}[x > x_{\text{med}}]$.

Exercício 3: Seja X uma V.A. com PMF uniforme dada por:

$$P_X(x) = \begin{cases} 0{,}01, & x = 1, 2, \ldots, 100, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

a) Determine a moda (x_{mod}) de X. Se a moda não for única, determine o conjunto X_{mod} de todas as modas de X.

b) Determine a mediana de X. Se a mediana não for única, determine o conjunto X_{med} contendo todos os números x que são medianas de X.

Notes

Valor Esperado

$$E[X] = \mu_X = \sum_{x \in S_X} x P_X(x).$$

- V.A. de Bernoulli: $E[X] = p$.
- V.A. Geométrica: $E[X] = 1/p$.
- V.A. de Poisson: $E[X] = \alpha$.
- V.A. Binomial: $E[X] = np$.
- V.A. de Pascal: $E[X] = k/p$.
- V.A. Uniforme: $E[X] = (k + l)/2$.

Notes

Funções de uma Variável Aleatória

- Para uma V.A. discreta X, a PMF de $Y = g(X)$ é dada por:

$$P_Y(y) = \sum_{x:g(x)=y} P_X(x)$$

Exemplo: A amplitude, V de uma forma de onda senoidal é uma V.A. com PMF:

$$P_V(v) = \begin{cases} 1/7, & v = -3, -2, \ldots, 3, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

Seja $Y = V^2/2$ a potência média deste sinal. Determine $P_Y(y)$.

Notes

Valor Esperado da Função de uma Variável Aleatória

- Dada a V.A. X com PMF $P_X(x)$ e $Y = g(X)$, o valor esperado de Y é dado por:

$$E[Y] = \mu_Y = \sum_{x \in S_X} g(x) P_X(x)$$

Exemplo: O número de placas de memória, M, necessárias em um PC depende de quantos programas, A, desejam-se rodar simultaneamente. Considere que M e A sejam descritas por:

$$M = \begin{cases} 4 \text{ placas para 1 programa,} \\ 4 \text{ placas para 2 programas,} \\ 6 \text{ placas para 3 programas,} \\ 8 \text{ placas para 4 programas.} \end{cases} \qquad P_A(a) = \begin{cases} 0{,}1(5-a), & a = 1{,}2{,}3{,}4, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

a) Determine $\mu_A = E[A]$
b) Expresse M na forma $M = g(A)$
c) Determine $E[M]$. Verifique se $E[M] = g(E[A])$

Notes

Variância e Desvio Padrão

- Momentos:
  a) Momento de ordem n: $E[X^n]$.
  b) Momento central de ordem n: $E[(X - \mu_X)^n]$.
- Variância: $\mathrm{Var}[X] = E\left[(X - \mu_X)^2\right]$.
- Desvio Padrão: $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}[X]}$.
- $\mathrm{Var}[X] = \sigma_X^2 = \sum_{x \in S_X} (x - \mu_X)^2 P_X(x)$.
- $\mathrm{Var}[X] = E[X^2] - \mu_X^2 = E[X^2] - (E[X])^2$.
- $\mathrm{Var}[aX + b] = a^2 \mathrm{Var}[X]$.

Notes

Variância de Famílias de Variáveis Aleatórias

- V.A. de Bernoulli: $\mathrm{Var}[X] = p(1-p)$.
- V.A. Geométrica: $\mathrm{Var}[X] = (1-p)/p^2$.
- V.A. de Poisson: $\mathrm{Var}[X] = \alpha$.
- V.A. Binomial: $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.
- V.A. de Pascal: $\mathrm{Var}[X] = k(1-p)/p^2$.
- V.A. Uniforme: $\mathrm{Var}[X] = (l-k)(l-k+2)/12$.

Notes

Exercício 4

Circuitos integrados individuais são testados sequenciamente até ser achado o primeiro CI defeituoso. Seja N o número de testes. Todos os testes são independentes com probabilidade de falha $p = 0{,}1$. Considere a condição $B = \{N \geq 20\}$.

a) Determine $P_N(n)$;
b) Determine $P_{N|B}(n)$, a PMF condicional de N dado que tenham havido 20 testes consecutivos sem falha;
c) Determine $E[N|B]$, o número esperado de testes dado que tenham havido 20 testes consecutivos sem falha.

Notes