EELT-7035 – Processos Estocásticos em Engenharia

Vetores Aleatórios

Evelio M. G. Fernández

2 de maio de 2019

Notes

Modelos Probabilísticos para N Variáveis Aleatórias

- $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \mathcal{P}[X_1 \leq x_1,\dots,X_n \leq x_n]$
- $P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \mathcal{P}[X_1 = x_1,\dots,X_n = x_n]$
- $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \dfrac{\partial^n F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$

Se $X_1,\dots,X_n$ são V.A.s discretas com PMF: $P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$,

- $P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) \geq 0$
- $\displaystyle\sum_{x_1\in S_{X_1}} \cdots \sum_{x_n\in S_{X_n}} P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = 1$

Se $X_1,\dots,X_n$ são V.A.s contínuas com PDF: $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$,

- $f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) \geq 0$
- $F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\dots,X_n}(u_1,\dots,u_n)du_1 \cdots du_n$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)dx_1 \cdots dx_n = 1$

Notes

Modelos Probabilísticos para N Variáveis Aleatórias

- $\mathcal{P}[A] = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in A} \cdots \sum P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$
- $\mathcal{P}[A] = \int_A \cdots \int f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)dx_1 \cdots dx_n$

Exemplo 1: Considere um conjunto de n tentativas sendo que, para cada tentativa, r resultados $s_1,\dots,s_r$ são possíveis. Em cada tentativa, $\mathcal{P}[s_i] = p_i$. Seja N_i a V.A. que representa o número de vezes que o resultado s_i acontece nas n tentativas. Determine a PMF conjunta das V.A.s $N_1,\dots,N_r$.

Lembrar que: $\binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!} \rightarrow$ número de divisões possíveis de n objetos distintos em r grupos distintos de tamanhos $n_1,n_2,\dots,n_r$, respectivamente.

$$\Rightarrow P_{N_1,\dots,N_r}(n_1,\dots,n_r) = \binom{n}{n_1,n_2,\dots,n_r} p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_r^{n_r}$$

Notes

Notação Vetorial

- **Vetor Aleatório:** $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_n \end{bmatrix}'$
- **Amostra de um Vetor Aleatório:** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}'$
- **Funções de Probabilidade de um Vetor Aleatório:**
  - $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = F_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$
  - $P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = P_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$
  - $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n)$
- **Funções de Probabilidade de Dois Vetores Aleatórios:**
  - $F_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = F_{X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$
  - $P_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = P_{X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$
  - $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_{X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m}(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$

Notes

Exemplos

Exemplo 2: Seja o vetor aleatório $\mathbf{X}$ com PDF dada por:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 6e^{-\mathbf{a}'\mathbf{x}}, & \mathbf{x} \geq 0, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

onde $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}'$. Determine a CDF de $\mathbf{X}$.

Exemplo 3: Os vetores aleatórios discretos $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}'$ e $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}'$ ralacionam-se através de $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$. Determine a PMF conjunta $P_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$ sabendo que $\mathbf{X}$ tem PMF conjunta dada por,

$$P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (1-p)p^{x_3}, & x_1 < x_2 < x_3; \\ & x_1,x_2,x_3 \in \{1,2,\ldots\}, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

e que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Notes

Funções de Probabilidade Marginais

Algumas PMFs marginais considerando as V.A.s discretas W,X,Y,Z com PMF conjunta $P_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)$:

- $P_{X,Y,Z}(x,y,z) = \sum_{w \in S_W} P_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)$
    - $P_{W,Z}(w,z) = \sum_{x \in S_X} \sum_{y \in S_Y} P_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)$
        - $P_X(x) = \sum_{w \in S_W} \sum_{y \in S_Y} \sum_{z \in S_Z} P_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)$

Notes

Funções de Probabilidade Marginais

Algumas PDFs marginais considerando as V.A.s contínuas W,X,Y,Z com PDF conjunta $f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)$:

- $f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)dw$
  - $f_{W,Z}(w,z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)dxdy$
    - $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)dwdydz$

Exemplo 4: As variáveis aletórias $Y_1, \ldots, Y_4$ têm PDF conjunta dada por:

$$f_{Y_1,\ldots,Y_4}(y_1, \ldots, y_4) = \begin{cases} 4, & 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1, 0 \leq y_3 \leq y_4 \leq 1, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

Determine as PDFs marginais $f_{Y_1,Y_4}(y_1,y_4)$, $f_{Y_2,Y_3}(y_2,y_3)$ e $f_{Y_3}(y_3)$.

Notes

Independência de Variáveis Aleatórias e Vetores Aleatórios

As V.A.s $X_1, \ldots, X_n$ são independentes se para todo $x_1, \ldots, x_n$,

- $P_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P_{X_1}(x_1)P_{X_2}(x_2)\cdots P_{X_n}(x_n)$
- $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)$

Exemplo 5: Considerando as variáveis aletórias do Exemplo 4 cuja PDF conjunta é dada por:

$$f_{Y_1,\ldots,Y_4}(y_1, \ldots, y_4) = \begin{cases} 4, & 0 \leq y_1 \leq y_2 \leq 1, 0 \leq y_3 \leq y_4 \leq 1, \\ 0, & \text{fora.} \end{cases}$$

Determine se as variáveis aletórias $Y_1, \ldots, Y_4$ são independentes.

Notes

Independência de Variáveis Aleatórias e Vetores Aleatórios

As V.A.s $X_1, \ldots, X_n$ são independentes e identicamente distribuídas (iid) se para todo $x_1, \ldots, x_n$,

- $P_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P_X(x_1)P_X(x_2)\cdots P_X(x_n)$
- $f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_X(x_1)f_X(x_2)\cdots f_X(x_n)$

O vetores aleatórios $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ são independentes se,

- $P_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})P_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$
- $f_{\mathbf{X},\mathbf{Y}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y})$

Notes

Funções de Vetores Aleatórios

Para a variável aletória $W = g(\mathbf{X})$,

- $P_W(w) = \mathcal{P}[W = w] = \sum_{\mathbf{x}:g(\mathbf{x})=w} \cdots \sum P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$
- $F_W(w) = \mathcal{P}[W \leq w] = \int_{g(\mathbf{x})\leq w} \cdots \int f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})dx_1 \cdots dx_n$
- $E[W] = E[g(\mathbf{X})] = \sum_{x_1 \in S_{X_1}} \cdots \sum_{x_n \in S_{X_n}} g(\mathbf{x})P_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$
- $E[W] = E[g(\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})dx_1 \cdots dx_n$

Notes

Funções de Vetores Aleatórios

Dado o vetor aleatório contínuo $\mathbf{X}$, define-se o vetor $\mathbf{Y}$ de forma que $Y_k = aX_k + b$, a e b constantes, $a > 0$. A CDF e a PDF de $\mathbf{Y}$ são:

$$F_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = F_{\mathbf{X}}\left(\frac{y_1 - b}{a}, \ldots, \frac{y_n - b}{a}\right), \; f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{a^n} f_{\mathbf{X}}\left(\frac{y_1 - b}{a}, \ldots, \frac{y_n - b}{a}\right)$$

Seja $\mathbf{X}$ um vetor aleatório contínuo e $\mathbf{A}$ uma matriz inversível.

Então o vetor aleatório $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$ tem PDF dada por:

$$f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\det(\mathbf{A})|} f_{\mathbf{X}}\left(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{b})\right)$$

Notes

Valor Esperado e Matriz de Correlação

- $E[\mathbf{X}] = \mu_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} E[X_1] & E[X_2] & \cdots & E[X_n] \end{bmatrix}'$
- **Correlação:** $\mathbf{R}_{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}\mathbf{X}']$
- **Covariância:** $\mathbf{C}_{\mathbf{X}} = E[(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \mu_{\mathbf{X}})']$
- $\mathbf{C}_{\mathbf{X}} = \mathbf{R}_{\mathbf{X}} - \mu_{\mathbf{X}}\mu'_{\mathbf{X}}$

Exemplo 6: Determine o valor esperado, $E[\mathbf{X}]$, a matriz de correlação, $\mathbf{R}_{\mathbf{X}}$ e a matriz de covariância, $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$ do vetor bidimensional $\mathbf{X}$ cuja PDF é dada por:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 2, & 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1, \\ 0, & \text{fora}. \end{cases}$$

Notes

Correlação e Covariâncias Cruzadas

- **Correlação Cruzada:** $\mathbf{R_{XY}} = E[\mathbf{XY}']$
- **Covariância Cruzada:** $\mathbf{C_{XY}} = E[(\mathbf{X} - \mu_\mathbf{X})(\mathbf{Y} - \mu_\mathbf{Y})']$
- Considerando $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$,
  - $\mu_\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mu_\mathbf{X} + \mathbf{b}$
  - $\mathbf{R_Y} = \mathbf{AR_XA}' + (\mathbf{A}\mu_\mathbf{X})\mathbf{b}' + \mathbf{b}(\mathbf{A}\mu_\mathbf{X})' + \mathbf{bb}'$
  - $\mathbf{C_Y} = \mathbf{AC_XA}'$
  - $\mathbf{R_{XY}} = \mathbf{R_XA}' + \mu_\mathbf{X}\mathbf{b}'$
  - $\mathbf{C_{XY}} = \mathbf{C_XA}'$

Notes

Exemplo 7

Dado o vetor aleatório do Exemplo 6, seja $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$, onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) $\mu_\mathbf{Y}$
b) $\mathbf{R_Y}$
c) $\mathbf{C_Y}$
d) $\mathbf{R_{XY}}$
e) $\mathbf{C_{XY}}$
f) ρ_{Y_1,Y_3} e ρ_{X_2,Y_1}

Notes

O vetor aleatório $\mathbf{X}$ é Gaussiano $(\mu_{\mathbf{X}}, \mathbf{C}_{\mathbf{X}})$ se e somente se:

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}[\det(\mathbf{C}_{\mathbf{X}})]^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})'\mathbf{C}_{\mathbf{X}}{}^{-1}(\mathbf{x}-\mu_{\mathbf{X}})\right)$$

- As componentes de $\mathbf{X}$ serão independentes se e somente se $\mathbf{C}_{\mathbf{X}}$ é uma matriz diagonal. Neste caso, $\mathbf{C}_{\mathbf{X}} = \mathrm{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2]$
- Seja $\mathbf{A}$ uma matriz $m \times n$ com $rank(\mathbf{A}) = m$. Então, $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$ é um vetor Gaussiano m-dimensional com $\mu_{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mu_{\mathbf{X}} + \mathbf{b}$ e $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{AC}_{\mathbf{X}}\mathbf{A}'$

Notes

Exemplo 8

Medições de temperatura em graus Fahrenheit realizadas às 06:00h, às 12:00h e às 18:00h num determinado dia são representadas pelas variáveis aleatórias Gaussianas X_1, X_2, X_3 com variância 16 graus^2. Os valores esperados são 50 graus, 62 graus e 58 graus, respectivamente. A matriz de covariância das três medições é:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 16{,}0 & 12{,}8 & 11{,}2 \\ 12{,}8 & 16{,}0 & 12{,}8 \\ 11{,}2 & 12{,}8 & 16{,}0 \end{bmatrix}$$

a. Escreva a PDF conjunta de X_1,X_2 usando notação algébrica.
b. Escreva a PDF conjunta de X_1,X_2 usando notação vetorial.
c. Escreva a PDF conjunta de $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}'$ usando notação vetorial.
d. Usando a fórmula $Y_i = (5/9)(X_i - 32)$ para converter as medições para graus Celsius, determine $\mu_{\mathbf{Y}}$.
e. Determine $\mathbf{C}_{\mathbf{Y}}$.
f. Escreva a PDF conjunta de $\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & Y_3 \end{bmatrix}'$ usando notação vetorial.

Notes

Vetor Aleatório Normal Padrão

- O vetor n-dimensional normal padrão $\mathbf{Z}$ é o vetor Gaussiano n-dimensional com $E[\mathbf{Z}] = 0$ e $\mathbf{C_Z} = \mathbf{I}$.
- Para um vetor Gaussiano $(\mu_\mathbf{X}, \mathbf{C_X})$, seja $\mathbf{A}$ uma matriz $n \times n$ tal que $\mathbf{AA}' = \mathbf{C_X}$. Então, o vetor aleatório $\mathbf{Z} = \mathbf{A^{-1}}(\mathbf{X} - \mu_\mathbf{X})$ é um vetor aleatório normal padrão.
- O vetor $\mathbf{X} = \mathbf{AZ} + \mathbf{b}$ é um vetor aléatório Gaussiano com $\mu_\mathbf{X} = \mathbf{b}$ e $\mathbf{C_X} = \mathbf{AA}'$.
- Para um vetor Gaussiano $\mathbf{X}$ com covariância $\mathbf{C_X}$, existe sempre uma matriz $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{C_X} = \mathbf{AA}'$.

Notes

Exemplo 9
Seja $\mathbf{X}$ um vetor aleatório Gaussiano com valor esperado $\mu_\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 6 \end{bmatrix}'$ e covariância

$$\mathbf{C_X} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Determine:

a. A matriz de correlação, $\mathbf{R_X}$
b. A PDF conjunta $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$
c. $\mathcal{P}[X_1 > 8]$

Considerando agora que $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{b}$, onde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 2/3 \\ 1 & -1/2 & 2/3 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \end{bmatrix}'$, determine:

d. O valor esperado $\mu_\mathbf{Y}$
e. A covariância $\mathbf{C_Y}$
f. A correlação $\mathbf{R_Y}$
g. $\mathcal{P}[-1 \le Y_2 \le 1]$

Notes

Exercício 1

Notes

Com relação ao problema da regata de iatismo com participação de 10 veleiros, em que os tempos de chegada X_i são modelados por variáveis aleatórias Gaussianas com valor esperado 35 minutos e desvio padrão 5 minutos. Considere que todos os veleiros estão sujeitos ao mesmo regime de ventos e marés então, para cada par de veleiros i e j, os tempos de chegada X_i e X_j têm coeficiente de correlação $\rho = 0{,}8$.

a. Determine a matriz de covariância de $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 & \cdots & X_{10} \end{bmatrix}'$
b. Seja
$$Y = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}}{10}$$
a V.A. que representa o tempo médio de chegada. Determine o valor esperado e a variância de Y. Determine $\mathcal{P}[Y \leq 25]$.

Exercício 2

Notes

Num sistema automático de geolocalização, um expedidor envia uma mensagem para seis caminhões de uma mesma frota perguntando pela localização de cada caminhão. Os tempos de espera pelas respostas dos seis caminhões são V.A.s iid exponenciais com valor esperado igual a 2 segundos cada uma.

a. Determine a probabilidade de todas as seis respostas serem recebidas em até 5 segundos.
b. Caso o sistema tenha que localizar todos os seis veículos em menos de três segundos, o valor esperado do tempo de resposta de cada veículo deverá ser reduzido. Qual será o máximo valor esperado do tempo de resposta que possibilitará que os seis veículos sejam localizados em menos do que 3 segundos com, pelo menos, 90% de probabilidade?