DERIVADA

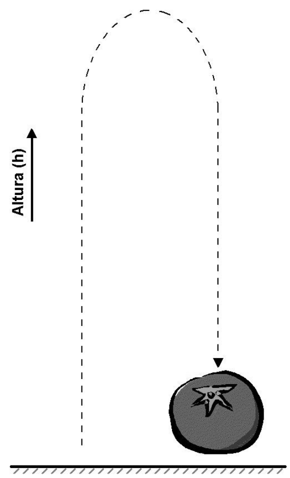
COMO MEDIMOS VELOCIDADE MÉDIA?

A velocidade média de um objeto ao longo de um determinado percurso é o deslocamento total do objeto (*Δs*) dividido pelo tempo gasto no percurso (*Δt*).

Isso não significa que o objeto manteve a mesma velocidade ao longo de todo o percurso.

Podemos medir velocidade **instantânea**?

LANÇAMENTO VERTICAL



t (s)	*h (m)*
0	0
1	25
2	40
3	45
4	40
5	25
6	0

Qual é a velocidade em *t=2s*?

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}$$

$$\bar{v}_{12} = \frac{40-25}{2-1} = 15m/s$$

$$\bar{v}_{23} = \frac{45-40}{3-2} = 5m/s$$

A velocidade em *t=2s* deve estar entre *5m/s* e *15m/s.*

LANÇAMENTO VERTICAL

Se tomarmos intervalos cada vez menores próximos de *t=2s*:

t (s)	*h (m)*
1,9	38,95
2	40
2,1	40,95

$$\bar{v} = 10{,}50m/s$$
$$\bar{v} = 9{,}50m/s$$

t (s)	*h (m)*
1,99	39,90
2	40
2,01	40,10

$$\bar{v} = 10{,}05m/s$$
$$\bar{v} = 9{,}95m/s$$

t (s)	*h (m)*
1,999	39,99
2	40
2,001	40,01

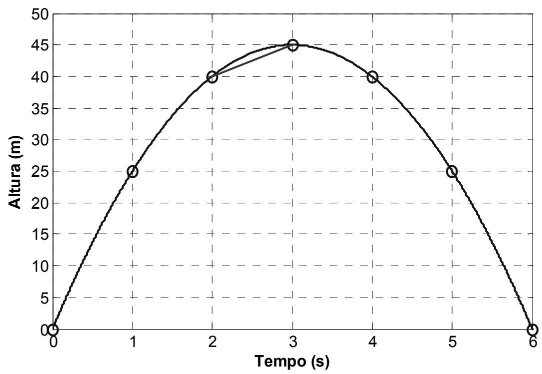
$$\bar{v} = 10{,}01m/s$$
$$\bar{v} = 10{,}00m/s$$

Quanto menores ficam os intervalos ao redor de *t=2s*, mais as velocidades médias se aproximam de *10m/s*.

Escolher intervalos arbitrariamente pequenos é chamado de *tomar o limite.*

A **velocidade instantânea** em um instante *t* é dada pelo limite da velocidade média ao longo de um intervalo, quando esse intervalo se encolhe cada vez mais ao redor de *t*.

LANÇAMENTO VERTICAL



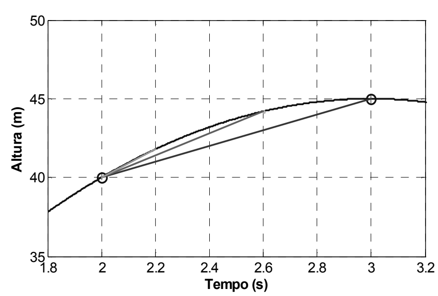
Velocidade média entre *t=2s* e *t=3s*:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{45-40}{3-2} = 5m/s$$

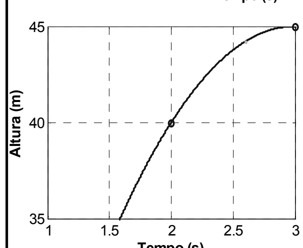
$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = inclinação$$

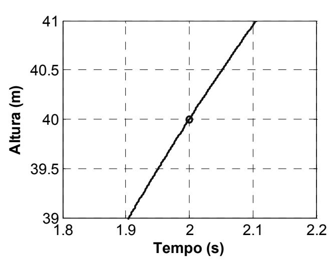
A velocidade média ao longo de qualquer intervalo é a **inclinação** da reta que liga os pontos, no gráfico de *s(t)*, correspondentes aos extremos do intervalo.

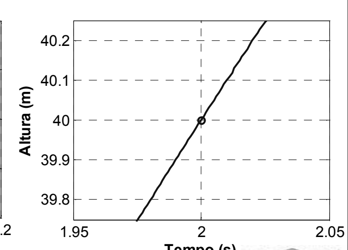
LANÇAMENTO VERTICAL



A velocidade instantânea é a inclinação da curva em um **ponto**.







DEFINIÇÃO DE VELOCIDADE INSTANTÂNEA

• Considerando o intervalo de tempo *a* ≤ *t* ≤ *(a+h)*, temos:

$$\bar{v} = \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

• A velocidade média se aproxima cada vez mais da velocidade instantânea a medida que *h* ficar cada vez menor. Então:

O limite, quando h tende para 0, de $\frac{s(a+h) - s(a)}{h} = v(a)$

• Escrevendo formalmente, a velocidade instantânea no instante *a* (*v(a)*) é:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{s(a+h) - s(a)}{h}$$

ENCONTRANDO UM LIMITE NUMERICAMENTE

• Seja *f(x)* = x^2. Queremos encontrar o valor de *L*, onde:

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h}$$

h	***L***
0,1	10,1
0,01	10,01
0,001	10,001
0,0001	10,0001
-0,1	9,9
-0,01	9,99
-0,001	9,999
-0,0001	9,9999

• Os valores de *L* parecem convergir para *10* quando *h→0*, de modo que é razoável assumir que:

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = 10$$

Se:

$$L = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Então estimamos *L* tomando valores pequenos para *h*:

$$L \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

DEFINIÇÃO FORMAL DE LIMITE

Seja *f(x)* definida em um intervalo aberto em torno de x_0, exceto talvez em x_0. Dizemos que *f(x)* tem **limite** *L* quando *x* tende a x_0 e escrevemos:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se para cada número $a > 0$ existir um número correspondente $b > 0$ tal que, para todos os valores de *x*:

$$0 < |x - x_0| < b \Rightarrow |f(x) - L| < a.$$

Isso significa que *f(x)* pode ficar tão próxima de *L* quanto desejarmos, bastando escolher um *x* suficientemente próximo de x_0.

CONSIDERAÇÕES SOBRE LIMITE

• $\lim_{x \to x_0} f(x)$ mede o comportamento de *f(x)* **próximo** de x_0, e não no ponto *x = x0*. Inclusive, *f(x)* pode nem mesmo estar definida em $x = x_0$.

• $\lim_{x \to x_0} f(x)$ significa buscar o valor do qual *f(x)* se aproxima quando *x* tende para x_0 por **ambos os lados.**

• $\lim_{x \to x_0 -} f(x)$ denota o número obtido ao fazer $x \to x_0$ apenas por valores **menores** do que x_0 e é chamado de **limite lateral à esquerda**.

• $\lim_{x \to x_0 +} f(x)$, de modo análogo, é o valor do qual f(x) se aproxima quando $x \to x_0$ apenas por valores **maiores** do que x_0 ou **limite lateral à direita**.

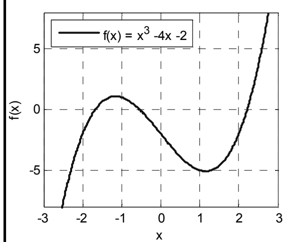
Em outras palavras:

$\lim_{x \to x_0} f(x)$ indica $\lim_{x \to x_0 -} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0 +} f(x)$ simultaneamente.

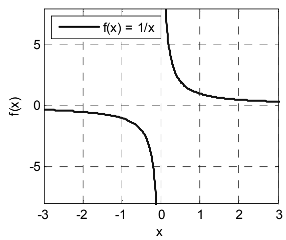
CONTINUIDADE DE UMA FUNÇÃO

Uma função é contínua em um intervalo se o seu gráfico não tem quebras, saltos ou furos nesse intervalo.

Função contínua:



Função não-contínua:



• Na prática, para funções contínuas, pequenos erros na variável independente levam a, relativamente, pequenos erros no valor da função.

f(x) é **contínua** em $x = a$ se: $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

A DERIVADA EM UM PONTO (*a*)

• Variação absoluta: $f(a+h) - f(a)$

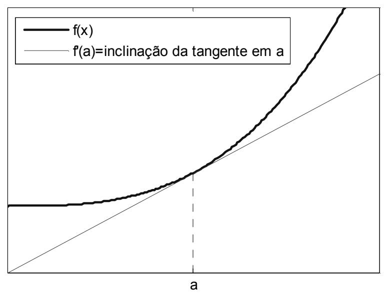
• Taxa de variação média (ou razão incremental): $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

• Taxa de variação instantânea – a derivada (em *a*):

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

f'(a) é a taxa de variação de *f(x)* com respeito à variável *x* quando $x = a$, ou seja, *f'(a)* é a derivada da função *f(x)* com respeito a *x* em $x = a$.

VISUALIZANDO A DERIVADA EM UM PONTO GRAFICAMENTE



$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$f'(a) =$ inclinação da tangente em *a*

Portanto, a derivada no ponto *a* pode ser vista como:

- A inclinação da reta tangente à curva em *a*;
- A inclinação da curva em *a*;

A FUNÇÃO DERIVADA

Dada *f(x)*, em geral, para todo valor de *x* existe um valor correspondente da derivada. A derivada é, portanto, uma função de *x*.

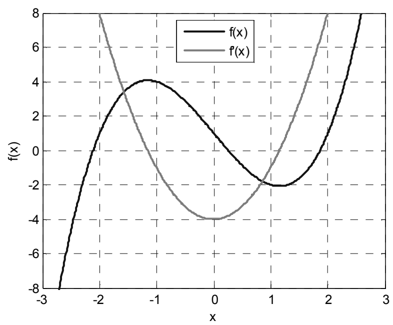
Para qualquer função *f(x)*, a **função derivada** *f'(x)* é definida por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Para cada valor de *x* no qual este limite existe, diz-se que *f(x)* é derivável naquele valor de *x*. *f(x)* é derivável em toda a parte se o limite existe para todo *x* no domínio da *f(x)*.

ENCONTRANDO A DERIVADA

Graficamente:



Numericamente:

x	*f(x)*	*f’(x) (direita)*	*f’(x) (esquerda)*
0	0,87	0,7	-
0,1	0,94	0,4	0,7
0,2	0,98	0,2	0,4
0,3	1,00	0	0,2
0,4	1,00	-0,3	0
0,5	0,97	-1,8	-0,3
0,6	0,79	-3,7	-1,8
0,7	0,42	-	-3,7

A derivada também pode ser encontrada algebricamente a partir de uma fórmula (sem a necessidade de substituição numérica).

INTERPRETAÇÕES DA DERIVADA

• Se *f’ > 0* em um intervalo, então *f* é **crescente** nesse intervalo;

• Se *f’ < 0* em um intervalo, então *f* é **decrescente** nesse intervalo;

• Se *f’ = 0* em um intervalo, então *f* é **constante** nesse intervalo;

• O módulo de *f’* indica o módulo da taxa de variação de *f*. |*f’*| grande indica que a *f* varia “rapidamente”, enquanto que |*f’*| pequeno indica que *f* varia “lentamente”.

NOTAÇÃO ALTERNATIVA PARA A DERIVADA

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Uma forma de entender essa representação:

$$f'(x) = \frac{diferença \ \ de \ \ valores \ \ em \ \ y}{diferença \ \ de \ \ valores \ \ em \ \ x} = \frac{dy}{dx}$$

Outras variações:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(y) \qquad\qquad f'(x) = \frac{d}{dx} f(x)$$

A DERIVADA SEGUNDA

Notações da derivada segunda:

$$y = f(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

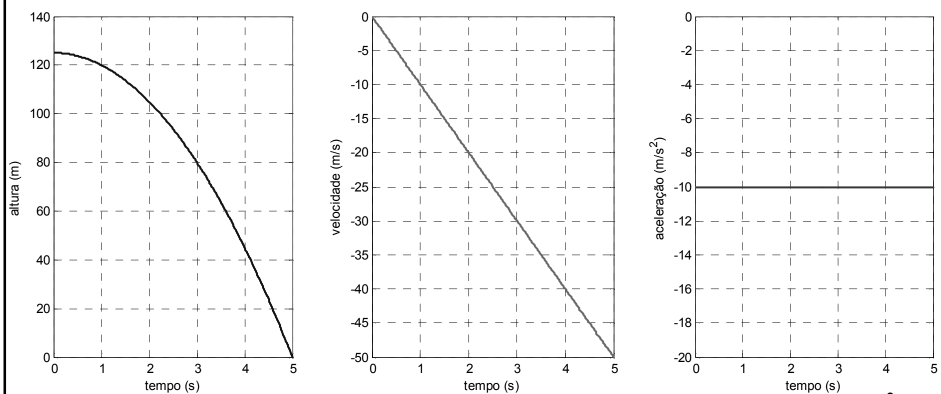
• *f'' > 0* significa que *f'* é crescente, de modo que o gráfico de *f* é **côncavo para cima** nesse intervalo;

• *f'' < 0* significa que *f'* é decrescente, de modo que o gráfico de *f* é **côncavo para baixo** nesse intervalo;

• *f'' = 0* significa que *f'* é constante, de modo que o gráfico de *f* é uma **linha reta**;

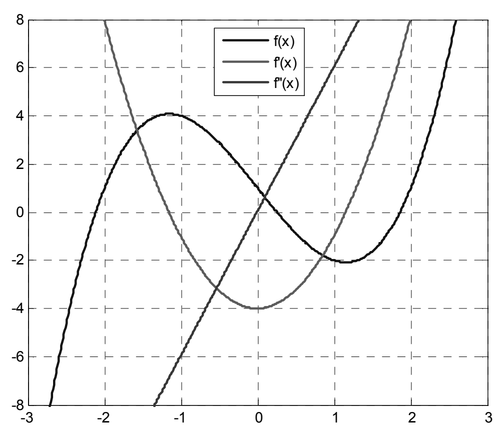
A DERIVADA SEGUNDA

Queda livre:



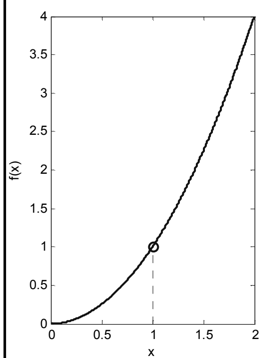
$h = f(t)$ $\qquad v = f'(t) = \dfrac{dh}{dt}$ $\qquad a = f''(t) = \dfrac{d^2h}{dt^2}$

A DERIVADA SEGUNDA



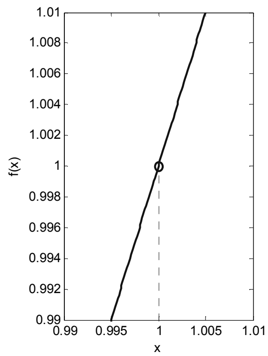
LINEARIDADE LOCAL E APROXIMAÇÕES

Próximo de qualquer ponto, o gráfico da maioria das funções se parece com uma reta cuja inclinação é a derivada da função naquele ponto.



$$f(x) = x^2$$

ampliação



x	***f(x) = x²***
0,996	0,992016
0,997	0,994009
0,998	0,996004
0,999	0,998001
1	1,000000
1,001	1,002001
1,002	1,004004
1,003	1,006009
1,004	1,008016

$$f(x) \approx 2x - 1$$

LINEARIDADE LOCAL E APROXIMAÇÕES

A linearidade local pode ser utilizada para se realizar estimativas aproximadas de funções na vizinhança de pontos conhecidos.

Este método é chamado de **linearização local** ou de **aproximação pela reta tangente** de uma função. Essa aproximação é baseada no fato de que, na vizinhança do ponto de contato, a curva e a sua tangente não estão muito separadas. Os valores calculados são na verdade pontos da reta tangente.

É importante tomar cuidado com essa extrapolação, pois cada função pode apresentar uma condição diferente sobre o que pode ser considerada “vizinhança” de um ponto.

OBSERVAÇÕES SOBRE DIFERENCIABILIDADE

• Uma função é dita **diferenciável** em qualquer ponto do seu domínio onde ela tenha derivada;

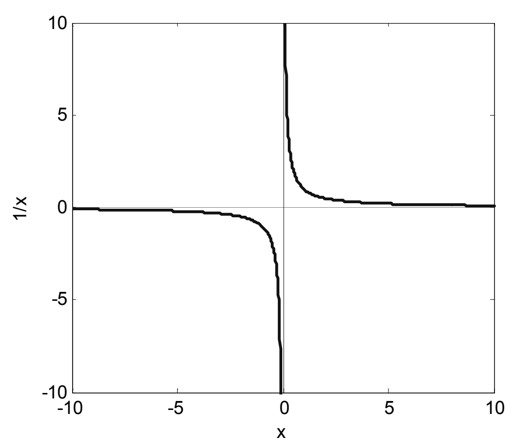
• Funções descontínuas que apresentem quebras ou saltos não apresentam derivada no ponto de descontinuidade. Elas não são, portanto, diferenciáveis nesse ponto;

• Funções contínuas mas que apresentam “bicos” não são diferenciáveis no ponto onde o “bico” ocorre;

• Funções contínuas que apresentem uma reta tangente em algum ponto não são diferenciáveis nesse ponto.

OBSERVAÇÕES SOBRE DIFERENCIABILIDADE

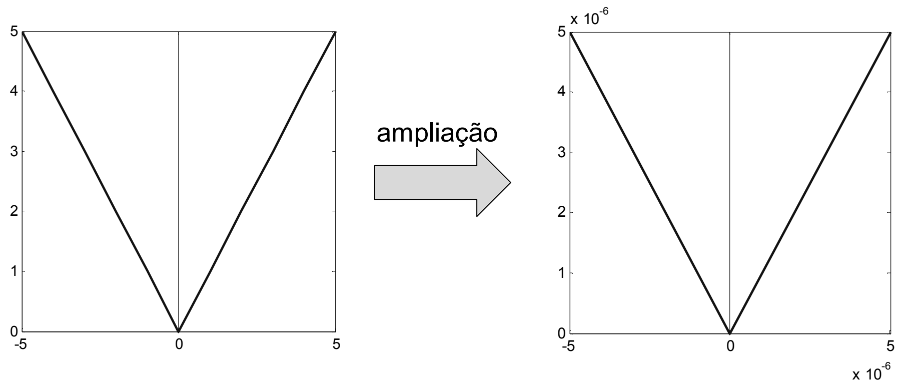
A função *f(x) = 1/x* apresenta uma quebra em *x = 0* (e ela nem mesmo é definida para *x = 0*). Essa função não é diferenciável em x = 0.



OBSERVAÇÕES SOBRE DIFERENCIABILIDADE

A função *f(x)* = |*x*| apresenta um "bico" em *x = 0*.

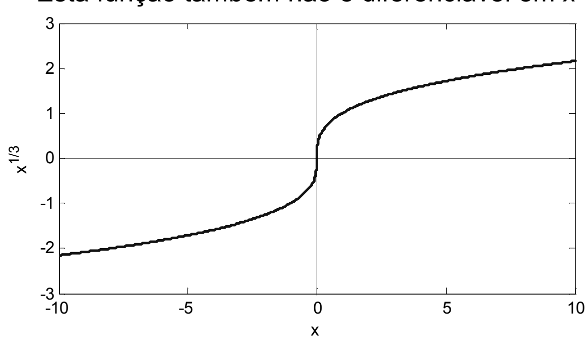
Esta função também não é diferenciável em *x = 0*.



OBSERVAÇÕES SOBRE DIFERENCIABILIDADE

A função *f(x)* = $x^{1/3}$ apresenta uma reta tangente vertical em *x = 0*.

Esta função também não é diferenciável em *x = 0*.



$$\lim_{h\to 0}\frac{(0+h)^{1/3}-0^{1/3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^{1/3}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^{2/3}}$$