FUNÇÕES

Funções

DATA	IBOVESPA (fechamento)
02/02/2009	38666
03/02/2009	39746
04/02/2009	40129
05/02/2009	41108
06/02/2009	42755
09/02/2009	42100
10/02/2009	41207
11/02/2009	40845
12/02/2009	40500
13/02/2009	41673
16/02/2009	41841
17/02/2009	39846
18/02/2009	39674
19/02/2009	39730
20/02/2009	38714
25/02/2009	38231
26/02/2009	38180
27/02/2009	38183

DEFINIÇÃO

Uma grandeza *y* é uma **função** de uma outra grandeza *x* se a cada valor de *x* estiver associado um único valor de *y*.

Escrevemos: $$y = f(x)$$

Neste caso:

- *y* é o *valor* da função ou a *variável dependente;*
- *x* é o *argumento* ou a *variável independente*;
- *f* é o nome da função.

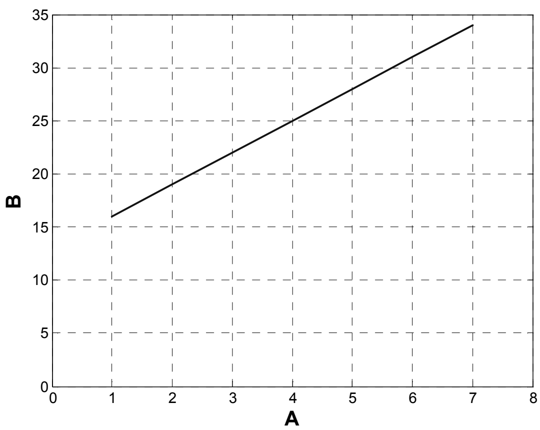
O **domínio** de uma função é o conjunto de valores da variável independente e a **imagem** é o conjunto correspondente de valores da variável dependente.

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

Tabelas

A	B
1	16
2	19
3	22
4	25
5	28
6	31
7	34

Gráficos

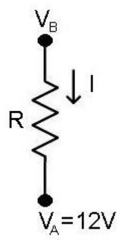


Fórmulas

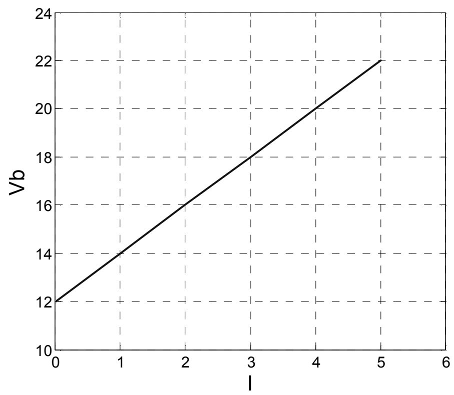
$$A = 3B + 13$$

FUNÇÕES LINEARES

Resistor ideal



I	V_B
0	12
1	14
2	16
3	18
4	20
5	22



$$V_B = f(I) = 12 + 2.I$$

FUNÇÕES LINEARES

Uma **função linear** tem a forma:

$$y = f(x) = b + mx$$

Seu gráfico é uma reta onde

•*m* é a inclinação, ou a taxa de variação de *y* em relação a *x*;

•*b* é a interseção vertical, ou o valor de *y* quando *x* é zero.

Pode-se calcular *m* da seguinte forma:

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Escala musical

Nota	F_0 (Hz)
A (ref)	440,00
A#	466,16
B	493,88
C	523,25
C#	554,37
D	587,33
D#	622,25
E	659,26
F	698,46
F#	739,99
G	783,99
G#	830,61
A (*8va*)	880,00

$$\frac{A\#}{A} = \frac{466{,}16}{440} = 1{,}0595 \Rightarrow A\# = A.1{,}0595 = A(1{,}0595)^1$$

$$\frac{B}{A\#} = \frac{493{,}88}{466{,}16} = 1{,}0595 \Rightarrow B = A\#.1{,}0595 = A(1{,}0595)^2$$

$$\frac{C}{B} = \frac{523{,}25}{493{,}88} = 1{,}0595 \Rightarrow C = B.1{,}0595 = A(1{,}0595)^3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

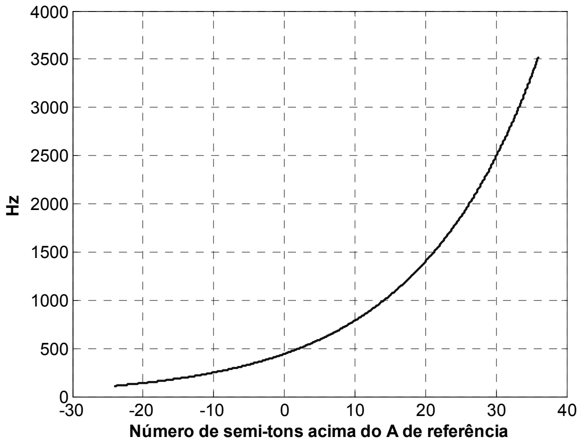
$$F_0 = f(n) = 440.1{,}0595^n = 440.2^{\frac{n}{12}}$$

Onde *n* é o número de semi-tons de distância que a nota está do A de referência

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Escala musical

$$F_0 = f(n) = 440.1{,}0595^n = 440.2^{\frac{n}{12}}$$

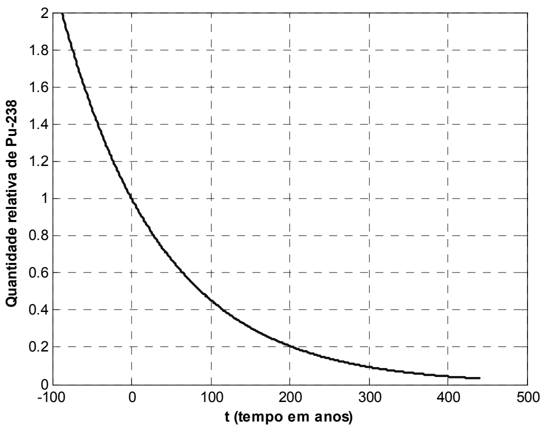


FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Decaimento do Pu-238

Anos	Quantidade relativa de Pu-238
0	100%
88	50%
176	25%
264	12,5%
325	6,25%

$$Q = f(t) = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{88}}$$



FUNÇÕES EXPONENCIAIS

y é uma função exponencial de *x* com base *a* (*a>0* e *a≠1*) se:

$$y = f(x) = y_0 a^x$$

onde y_0 é a quantidade inicial (quando *x = 0*) e *a* é o fator pelo qual *y* varia quando *x* cresce em 1 unidade.

- *a>1* significa crescimento exponencial*;*
- *0<a<1* significa decaimento exponencial*.*

Forma alternativa: $$y = y_0 a^x = y_0(1+r)^x$$

- *r > 0* representa crescimento
- *-1 < r < 0* representa decaimento

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Definições e regras

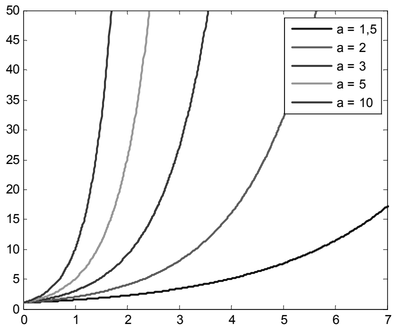
$$a^0 = 1 \qquad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad a^x . a^t = a^{x+t}$$

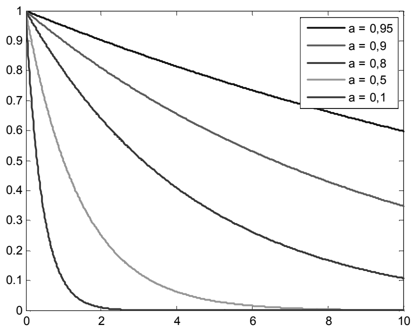
$$a^{-1} = \frac{1}{a} \qquad a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} \qquad \frac{a^x}{a^t} = a^{x-t}$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} \qquad a^{\frac{1}{x}} = \sqrt[x]{a} \qquad \left(a^x\right)^t = a^{x.t}$$

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Graficos para diferentes valores de *a*





Funções

POTÊNCIAS

Em geral uma **(função) potência** tem a forma:

$$y = f(x) = kx^p$$

onde k e p são constantes quaisquer.

Exemplos

•área (A) de um quadrado de lado l:

$$A = f(l) = l^2$$

•Volume (V) de uma esfera de raio r:

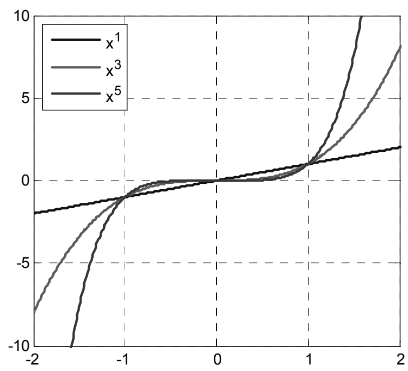
$$V = f(r) = \frac{4}{3}\pi . r^3$$

Funções

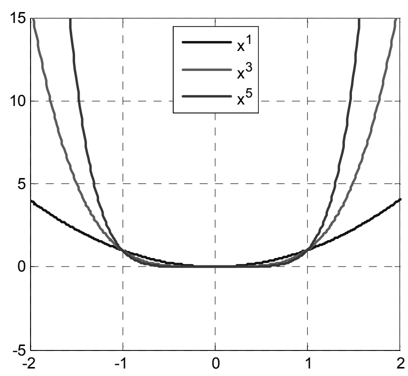
POTÊNCIAS

Potências inteiras e positivas: $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, ...

Potências ímpares



Potências pares

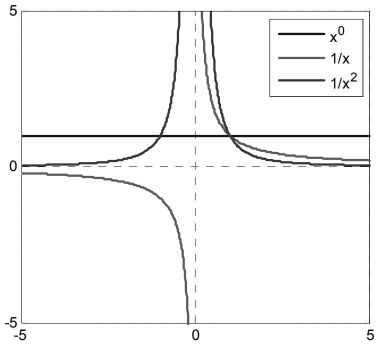


POTÊNCIAS

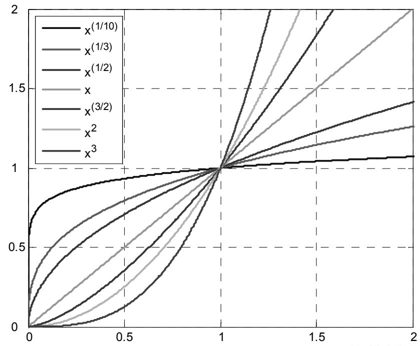
Potências zero, inteiras negativas e fracionárias positivas

$y = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$ e $y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$ $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ e $y = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$

Potências zero e inteiras negativas

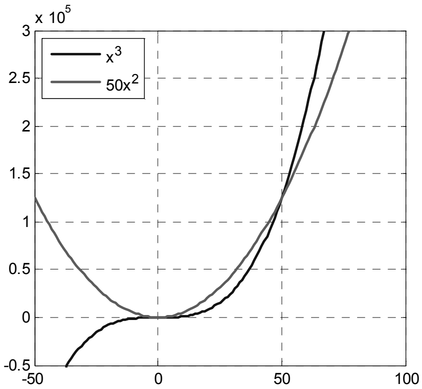


Potências fracionárias positivas

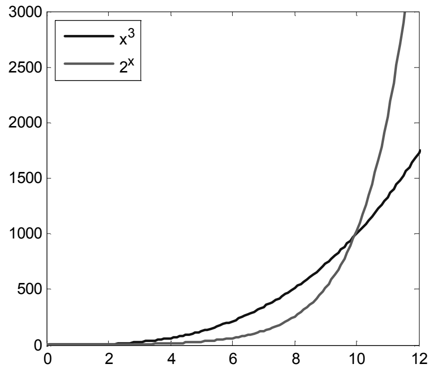


POTÊNCIAS

O efeito dos coeficientes

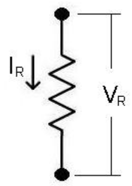


Comparação entre uma função exponencial e uma potência



FUNÇÕES INVERSAS

Resistor ideal



V_R	$f(V_R) = I_R$
0	0
10	1
20	2
30	3
40	4
50	5

$$I_R = f(V_R)$$

que é equivalente a

I_R	$f^{-1}(I_R) = V_R$
0	0
1	10
2	20
3	30
4	40
5	50

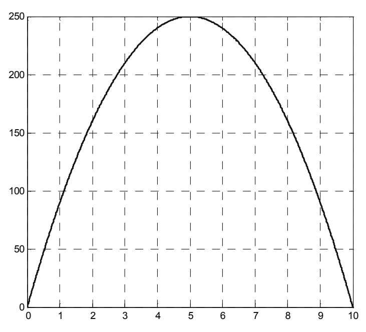
$$V_R = f^{-1}(I_R)$$

Para funções que apresentam inversa:

$f^{-1}(y) = x$ significa $f(x) = y$

FUNÇÕES INVERSAS

Condição necessária para uma função ter inversa



$$y = f(x) = 100x - 10a^2$$

Esta função não apresenta inversa

Uma função admite inversa se, e somente se, seu gráfico corta qualquer reta horizontal no máximo uma vez.

LOGARITMOS

População de Curitiba

- População atual é de 1,85 milhões; $P_0 = 1{,}85$
- Taxa de crescimento de 2% ao ano; $P = f(t) = P_0(1{,}02)^t$
- Quando Curitiba terá 2,5 milhões de habitantes? $P = 2{,}5$

$$P = P_0(1{,}02)^{10} = 1{,}85.(1{,}02)^{10} \cong 2{,}26$$
$$P = P_0(1{,}02)^{20} = 1{,}85.(1{,}02)^{20} \cong 2{,}75$$
$$P = P_0(1{,}02)^{15} = 1{,}85.(1{,}02)^{15} \cong 2{,}49$$
$$P = P_0(1{,}02)^{16} = 1{,}85.(1{,}02)^{16} \cong 2{,}54$$

Daqui pouco mais de 15 anos.

LOGARITMOS

A **função logaritmo**, $log_a x$, é definida como sendo a inversa da função exponencial a^x. Dizemos que:

$$\log_a x = c \qquad \text{significa} \qquad a^c = x$$

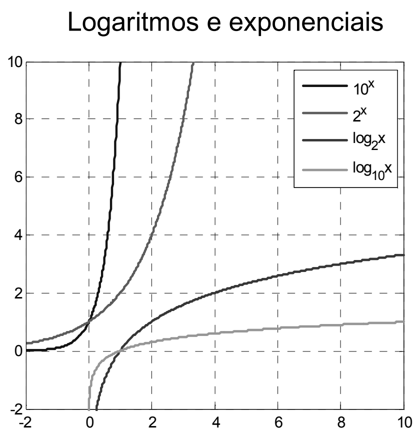
Chamamos o *a* de base do logaritmo.

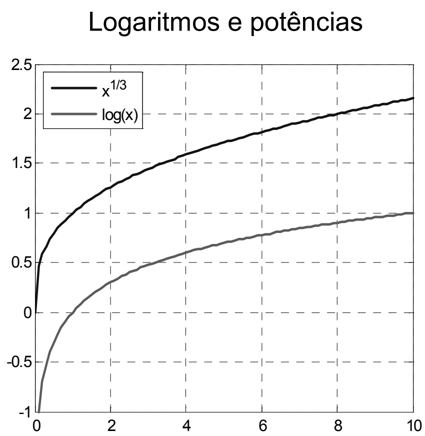
- Bases comuns: 10 ($log_{10}x$ ou *log(x)*), e ($log_e x$ ou *ln(x)*), 2 ($\log_2 x$)
- O logaritmo não está definido para $x \leq 0$;
- $log_{10}x$ em outras palavras: O **logaritmo** de *x* na base 10 é a potência de 10 que se precisa para obter *x*.

Regras:

$$\log(AB) = \log A + \log B \qquad \log(A^p) = p\log A \qquad 10^{\log x} = x$$
$$\log\left(\frac{A}{B}\right) = \log A - \log B \qquad \log(10^x) = x \qquad \log 1 = 0$$

LOGARITMOS





O NÚMERO *e* E O LOGARITMO NATURAL

Juros compostos

• 12% de juros ao ano com capitalização anual:

$M = C.(1 + 0,12)^1 = C.(1,12)^1$ após um ano;

$M = C.(1 + 0,12)^2 = C.(1,12)^2$ após dois anos;

$M = C.(1 + 0,12)^t = C.(1,12)^t$ após t anos.

• 12% de juros ao ano com capitalização trimestral:

$M = C.(1 + 0,12/4)^4 = C.(1,03)^4$ após um ano;

$M = C.(1 + 0,12/4)^8 = C.(1,12)^8$ após dois anos;

$M = C.(1 + 0,12/4)^{4t} = C.(1,12)^t$ após t anos.

$$(1,03)^4 \approx 1,1255 \mathbf{>} 1,12$$

O NÚMERO *e* E O LOGARITMO NATURAL

Juros compostos

E se a freqüência de capitalização for ainda maior?

- 100 vezes por ano: $(1 + 0{,}12/100)^{100} \approx 1{,}12741574$
- 1000 vezes por ano: $(1 + 0{,}12/1000)^{1000} \approx 1{,}127488734$
- 10000 vezes por ano: $(1 + 0{,}12/10000)^{10000} \approx 1{,}12749604$

E o número *e*?

- Para um número *n* muito grande: $\left(1+\frac{0{,}12}{n}\right)^n \to e^{0{,}12}$

Obs.: e ≈ 2.7182818284590455

O NÚMERO *e* E O LOGARITMO NATURAL

$\ln x = \log_e x = c$ significa $e^c = x$

ln(x) é a potência de *e* necessária para se obter *x*

Assumindo que: $a = e^k$ e portanto: $k = \ln(a)$

Podemos escrever: $y = y_0 a^x = y_0 \left(e^k\right)^x = y_0 e^{kx}$

Logo, qualquer função exponencial pode ser escrita como:

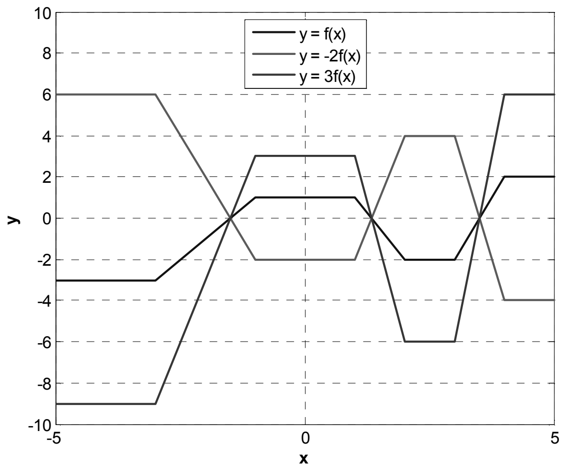
$$y = y_0 e^{kx}$$

onde y_0 é a quantidade inicial, *k* é uma constante positiva ($k>0$) para crescimento exponencial e negativa ($k<0$) para decaimento exponencial.

Dizemos que *y* está crescendo (ou decaindo) a uma taxa **contínua** *k.*

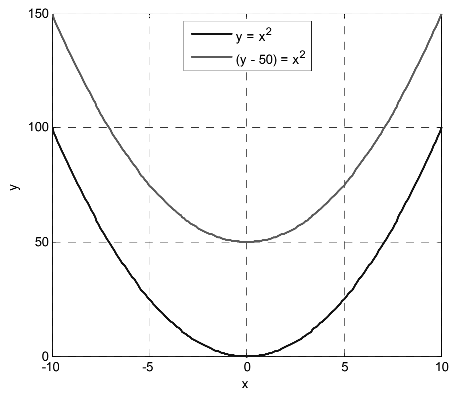
EXPANSÃO, TRANSLAÇÂO E SOMA DE FUNÇÕES

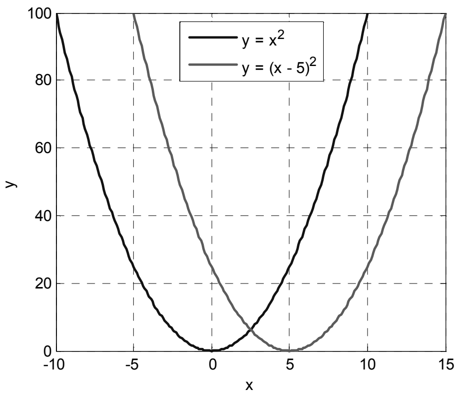
Expansão



EXPANSÃO, TRANSLAÇÂO E SOMA DE FUNÇÕES

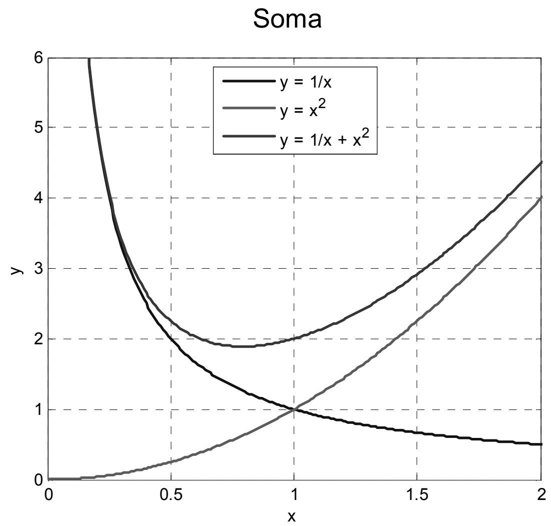
Translação





Funções

EXPANSÃO, TRANSLAÇÂO E SOMA DE FUNÇÕES



TE203 – Fundamentos Matemáticos para a Engenharia Elétrica I

Funções

FUNÇÕES COMPOSTAS

Derramamento de petróleo

• A área (circular) é função do raio:

$$A = f(r) = \pi . r^2$$

• O raio é função do tempo:

$$r = g(t) = (t+1)$$

• A área em função do tempo é dada por substituição:

$$A = \pi . r^2 = \pi (t+1)^2$$

Dizemos que *A* é uma **função composta** ou uma “função de uma função” que é denotada por:

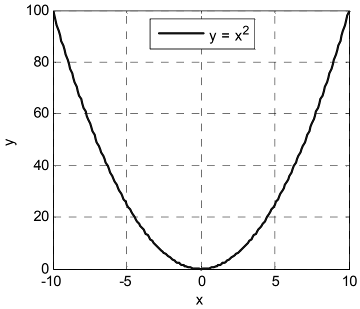
$$A = f(g(t)) = \pi (g(t))^2 = \pi (t+1)^2$$

TE203 – Fundamentos Matemáticos para a Engenharia Elétrica I

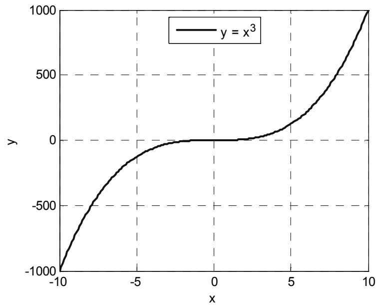
Funções

FUNÇÕES PARES E ÍMPARES

Função par



Função ímpar



Em geral, para qualquer função *f*:

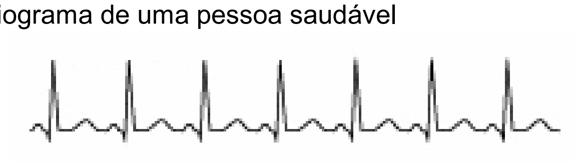
• *f* é uma função **par** se *f(-x) = f(x)* para todo *x*;

• *f* é uma função **ímpar** se *f(-x) = -f(x)* para todo *x*.

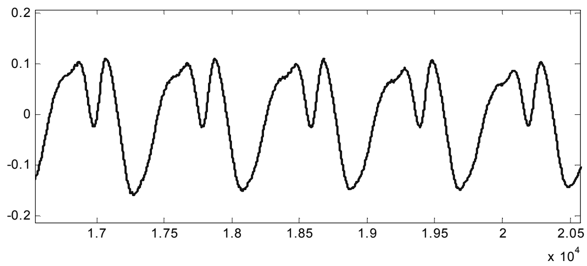
Funções

FUNÇÕES PERIÓDICAS

Eletrocardiograma de uma pessoa saudável



Nota "lá" de um contrabaixo elétrico

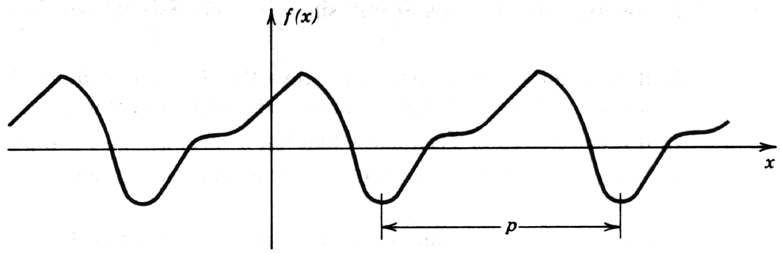


FUNÇÕES PERIÓDICAS

Uma função é dita **periódica** se ela se repetir em intervalos constantes, ou seja:

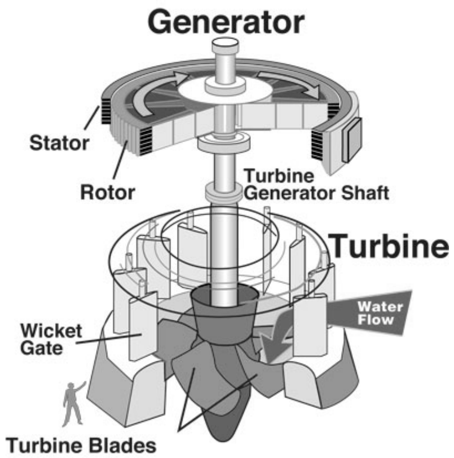
$$y = f(x) = f(p + x) = f(2p + x) = f(3p + x) + \dots$$

p é o período da função periódica, ou seja, o intervalo necessário para que a função se repita. Em outras palavras, *f(x)* se repete de "*p* em *p*".

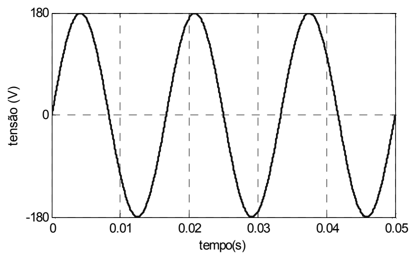


FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Corrente alternada

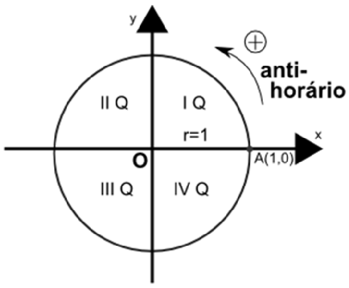


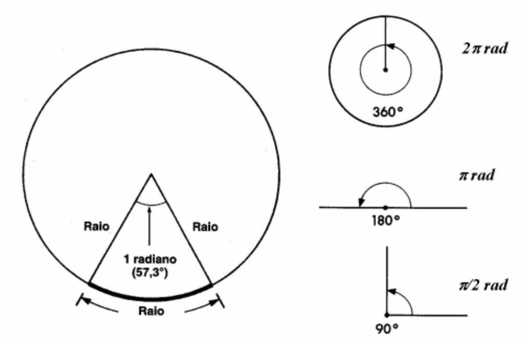
Tensão em uma tomada de 127V e 60Hz



FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Círculo unitário e radianos



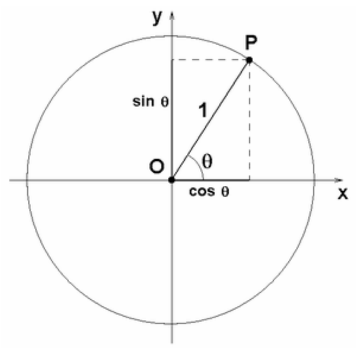


Um **radiano** é definido como o ângulo central, no círculo unitário, correspondente a um arco de comprimento 1, medido no sentido anti-horário.

Obs.: $180^{\circ} = \pi$ radianos ; $\pi \approx 3.1415926535897931$

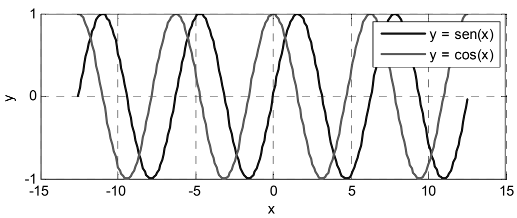
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Seno e co-seno



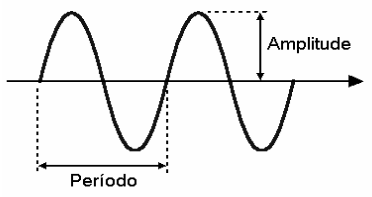
- *P* é definido pelo ângulo *θ*;
- Seno é a projeção de *P* no eixo *y*;
- Coseno é a projeção de *P* no eixo *x*;

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

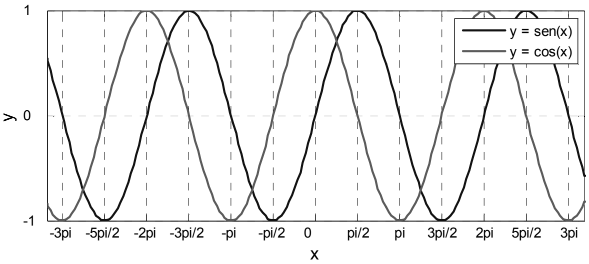


FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Seno e co-seno



A **amplitude** de uma oscilação é a metade da distância entre os valores máximo e mínimo



Observe que ambas são funções periódicas.

Além disso:

$$\cos(x) = sen(x + \pi/2)$$

$$sen(x) = \cos(x - \pi/2)$$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Para descrever quaisquer períodos e amplitudes, usamos funções da forma:

$$y = f(x) = A sen(Bx) \quad \text{e} \quad y = f(x) = A\cos(Bx)$$

A é a amplitude e *2π/B* é o período.

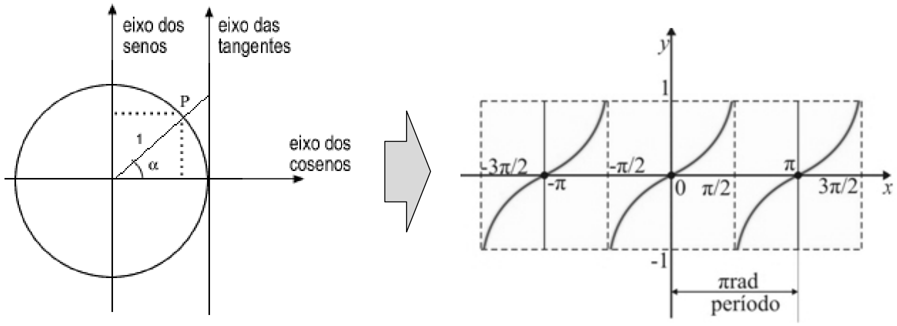
Para representar defasamentos (deslocamentos no eixo *x*) basta substituir *x* por (*x* – *d*), onde *d* é o ângulo de defasagem.

d > *0* desloca a função para a direita, enqaunto *d* < *0* a desloca para a esquerda.

Funções

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Tangente



A **função tangente** é definida como sendo:

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$$

Funções

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Funções trigonométricas inversas

Para $-1 \leq y \leq 1$ e $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

$arcsen(y) = x$ significa $sen(x) = y$

Para $-1 \leq y \leq 1$ e $0 \leq x \leq \pi$

$\arccos(y) = x$ significa $\cos(x) = y$

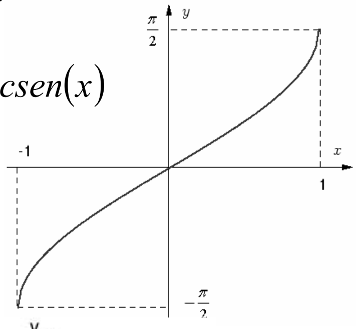
Para $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$

$arctg(y) = x$ significa $tg(x) = y$

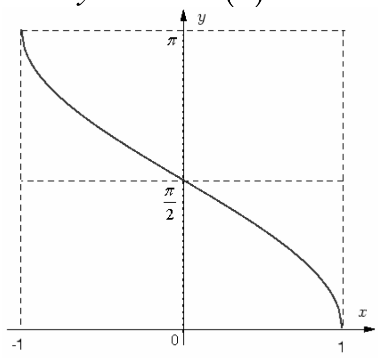
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

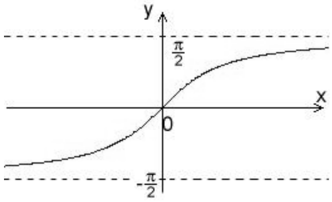
Funções trigonométricas inversas

$y = arcsen(x)$



$y = \arccos(x)$





$y = arctg(x)$

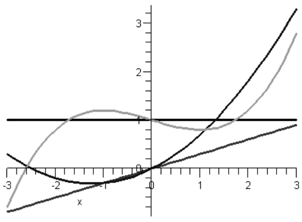
FUNÇÕES POLINOMIAIS

Funções polinomiais apresentam a seguinte forma:

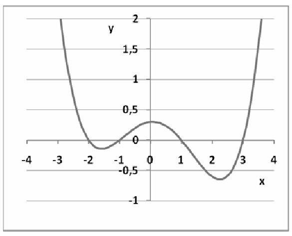
$$y = p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

- $a_n \neq 0$;
- *n* é um inteiro positivo chamado de **grau** do polinômio

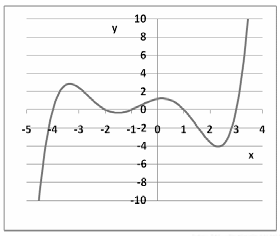
Graus 1, 2 e 3



Grau 4



Grau 5



FUNÇÕES RACIONAIS

Funções racionais apresentam a seguinte forma:

$$y = f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

onde *p* e *q* são polinômios.

Por exemplo em projetos de filtros digitais:

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{i=0}^{P} b_i z^{-i}}{\sum_{j=0}^{Q} a_j z^{-j}}$$