# Análise Vetorial na Engenharia Elétrica

Aula 2

13/03/09

## 1.3 - Medida algébrica de um segmento

**Segmento**: um segmento é determinado por um par ordenado de pontos. A figura 1.8 apresenta um segmento

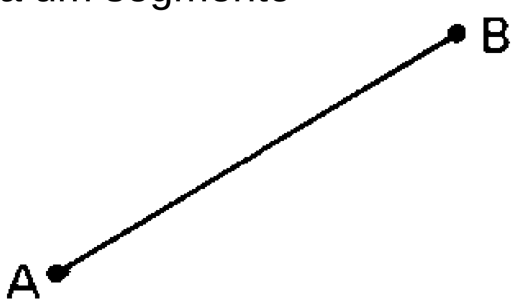



Figura 1.8 – Segmento

Um segmento orientado tem um ponto definido como origem e o outro ponto definido como extremidade. Uma seta caracteriza visualmente o sentido do segmento conforme a figura 1.9.

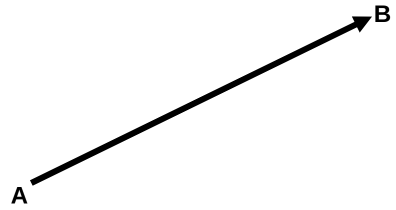



Figura 1.9 – Segmento orientado AB

**Segmentos opostos**: se AB é um segmento orientado, o segmento BA é o oposto de AB.

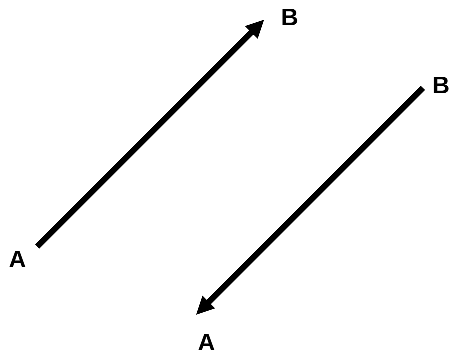



Figura 1.10 – Segmento orientado AB e BA

**Segmento de mesmo comprimento**: os segmentos geométricos AB e CD são do mesmo comprimento se eles têm comprimentos iguais.

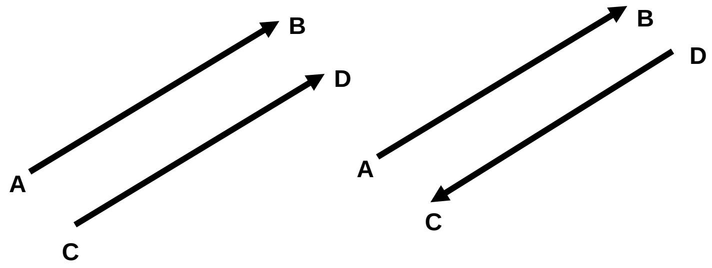
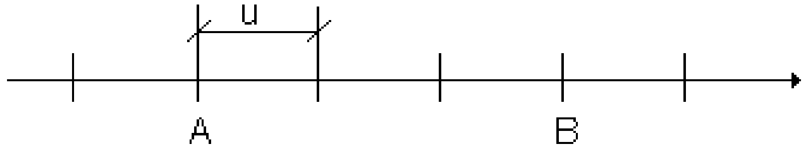



Figura 1.11 – Segmento de mesmo comprimento

**Medida de um segmento**: a medida algébrica do segmento finito e orientado é um número real, positivo se sua orientação for concordante com o sentido positivo da reta e é um número real negativo, em caso contrário.




AB = +3u (onde A é origem e B extremidade)
BA = - 3u (onde B é origem e A extremidade)

**Direção**: dois segmentos orientados não nulos AB e DC têm a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas.

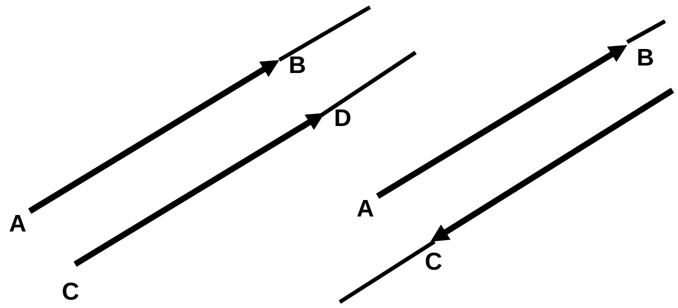



Figura 1.12 – Segmento de mesma direção

**Segmentos equipolentes**: dois segmentos orientados AB e CD são equipolentes quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento.

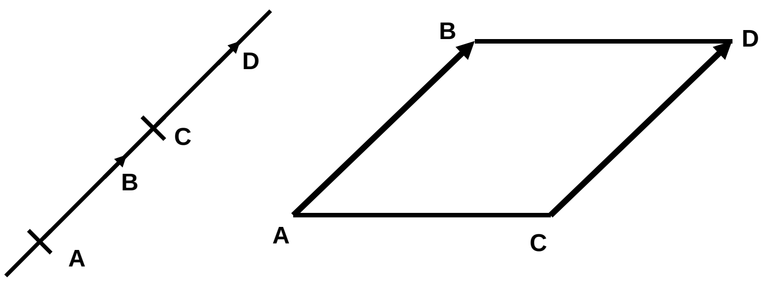



Figura 1.13 – Segmentos equipolentes

## Exercícios

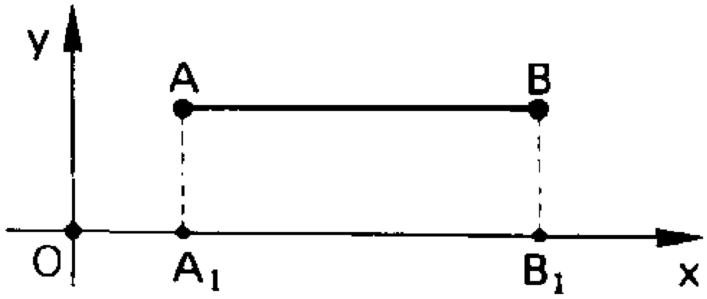
Dados os seguintes pontos A(-2,3), B(2, -3), C(5, 7) e D(5. -7).

i) Construa os seguimentos orientados AB, AC, BD, DA.

## 1.4 – Medidas entre pontos

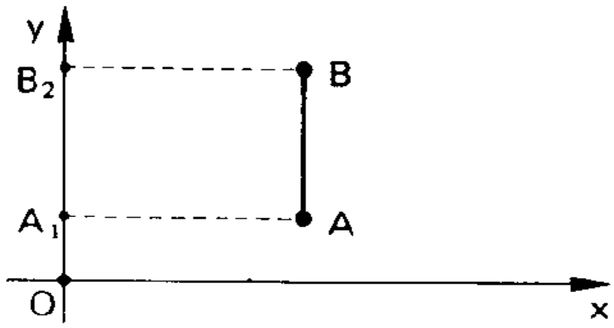
**Distância entre dois pontos**: Dados dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, vamos verificar três casos para o cálculo da distância d entre eles.

# 1º caso: AB // Ox



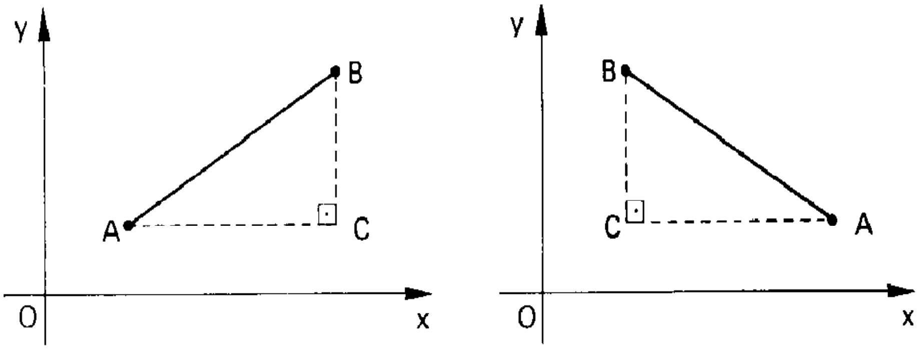

$$d = d_{A_1B_1} = |x_2 - x_1| \qquad (1.1)$$

# 2º caso: AB // Ou




$$d = d_{A_1B_2} = |y_2 - y_1| \qquad (1.2)$$

## 3º caso: AB não é paralelo a Ox e nem a Oy




Temos inicialmente:

$AC \parallel Ox \Rightarrow y_c = y_1$

$BC \parallel Oy \Rightarrow x_c = x_2$

$\therefore C(x_2, y_1)$

De acordo com os casos 1º e 2º, tem-se:

$$d = dAC = | x_2 - x_1|$$

$$d = dCB = | y_2 - y_1|$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ABC, tem-se:

$$D^2 = d^2AC + d^2CB = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (1.3)$$

então:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \qquad (1.4)$$

# Exercícios

i) Obter a abscissa do ponto P, tal que PA .PB = PC.PD. Dados: $x_A$ = - 2, $x_B$ = 0, $x_C$ = 3, $x_D$ = 5.

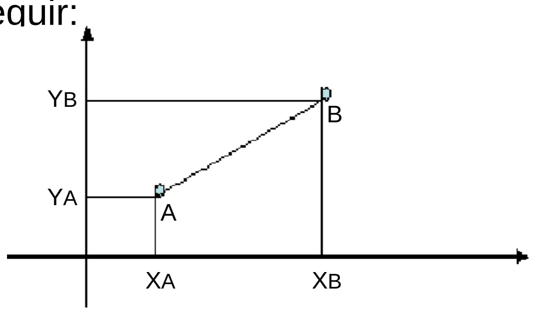
ii) Considere O, A, B, C pontos colineares, onde O representa a origem. Calcule a abscissa x do ponto C na igualdade AB+2CA+OB-3BC = 3. Dados: $x_A$ = 2 e $x_B$ = 5.

iii) Provar que o triângulo cujos vértices são A(2, 2), B(-4, -6) e C(4, -12) é retângulo.

iv) Dados A(x, 5), B(-2, 3) e C(4, 1), obter x de modo que A seja eqüidistante de B e C.

# 1.5 – Medidas entre pontos e reta

Sejam conhecidos os pontos A($x_A$, $y_A$) e B($x_B$,$y_B$) no plano cartesiano, a reta que passa por estes pontos tem a direção do segmento AB = ($x_B$ – $x_A$, $y_B$ – $y_A$) e é obtida do sistema de equações paramétricas a seguir:



$$\begin{cases} x = x_A + (x_B - x_A)t \\ y = y_A + (y_B - y_A)t \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = x_B + (x_B - x_A)t \\ y = y_B + (y_B - y_A)t \end{cases} \quad (1.5)$$

Isolando *t* em uma das equações e substituindo na outra equação, obtém-se:

$$y - y_A = \frac{(y_B - y_A)}{(x_B - x_A)}(x - x_A) \qquad \text{(forma reduzida)} \quad (1.6)$$

ou rearranjando a equação

$$(x_B - x_A)y - (y_B - y_A)x + (y_B - y_A)x_A - (x_B - x_A)y_A = 0$$

e fazendo

$$b = x_B - x_A$$
$$a = -(y_B - y_A)$$
$$c = (y_B - y_A)x_A - (x_B - x_A)y_A$$

vem

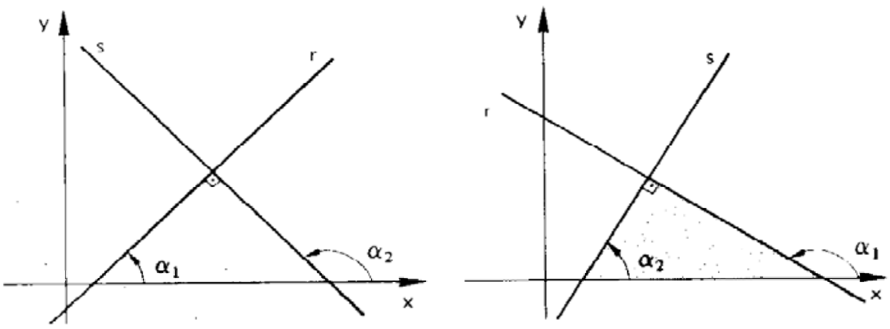
$$ax + by + c = 0 \qquad \text{(equação geral da reta)} \quad (1.7)$$

Teorema

*Duas retas r e s, não verticais, são perpendiculares entre si se, e somente se, o produto de seus coeficientes angulares é -1.*

Prova:

Sejam as retas r e s dadas na figura a seguir:




Suas equações gerais são:

r: $ax + by + c = 0 \Rightarrow \quad m_r = tg(\alpha 1) = -a/b$

s: $gx + hy + i = 0 \Rightarrow \quad m_s = tg(\alpha 2) = -g/h$

Da figura anterior tem-se dependendo do caso que:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2 \quad \text{ou} \quad \alpha_1 = \alpha_2 + \pi/2$$

Aplicando a tangente nos ângulos, vem:

$$tg(\alpha_2) = tg(\alpha_1 + \pi/2) \Rightarrow tg(\alpha_2) = -\,cotg(\alpha_1) \Rightarrow$$

$$tg(\alpha_2) = -\frac{1}{tg(\alpha_1)} \Rightarrow tg(\alpha_1)tg(\alpha_2) = -1$$

*c.q.d*

Mas, como:

$m_r.m_s = -1 \Rightarrow (-a/b)m_s = -1 \Rightarrow m_s = b/a$

Da equação da reta *s* tem-se que:

$$m_s = -g/h$$

O que nos leva a:

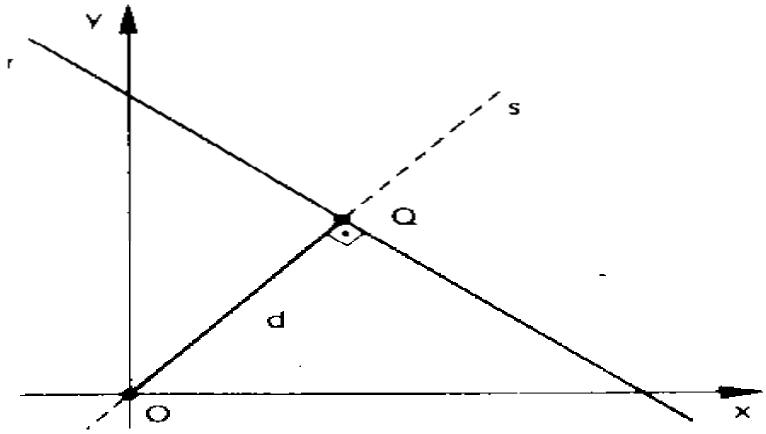
$$g = b \text{ e } h = -a$$

Para que as retas r e s sejam perpendiculares, tem-se que:

$$r: ax + by + c = 0$$

$$s: bx - ay + i = 0 \qquad (1.9)$$

Utilizando as duas últimas equações vamos calcular a distância entre a origem do plano e uma reta r qualquer.




Reescrevendo as equações (1.9) para este caso, vem:

$$r: ax + by + c = 0$$

$$s: bx - ay = 0$$

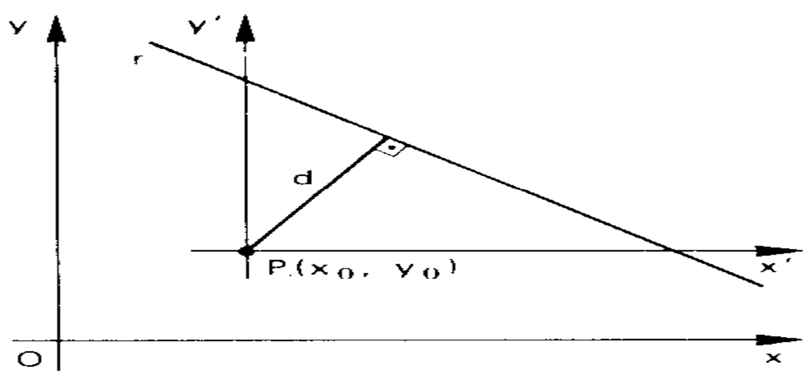
Se resolvêssemos o sistema formado pelas duas últimas equações, obteríamos Q(x, y) ponto de intersecção de r com s.

Mas, o que nos interessa é a distância d = OQ = $\sqrt{x^2 + y^2}$ , trabalhando as equações, temos:

$$\left.\begin{aligned}(ax + by)^2 &= (-c)^2 \\ (bx - ay)^2 &= 0\end{aligned}\right\} +$$

$$\left(a^2 + b^2\right)\underbrace{\left(x^2 + y^2\right)}_{d^2} = c^2 \Rightarrow d_{Or} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1.10)$$

Generalizando o cálculo da distância de um ponto P($x_0$, $y_0$) qualquer a uma reta r qualquer, vamos utilizar a figura a seguir:



Transladando o sistema xOy de modo que P seja a origem do sistema x´Py´, a equação da reta no “novo” sistema é:

$$ax + by + c = 0 \Longrightarrow a(x' + x_0) + b(y' + y_0) + c = 0 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow ax' + by' + \underbrace{(ax_0 + by_0 + c)}_{c'} = 0$$

Utilizando a equação (1.10), vem:

$$d_{P,r} = \left| \frac{c'}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

Substituindo c´, temos:

$$\boxed{d_{P,r} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|}$$

# Exercícios

Calcular o comprimento da altura AH, do triângulo de vértices A(-3, 0), B(0, 0) e C(6, 8).

Calcular a altura do trapézio cujos vértices são A(0, 0), B(7, 1), C(6, 5) e D(-8, 3).

# 1.6 – Coordenadas polares

O sistema polar é caracterizado no plano bidimensional por uma reta orientada p e um ponto O pertencente a tal reta.

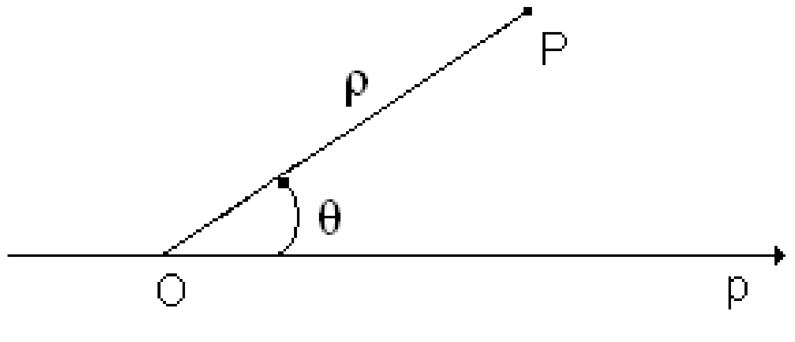



Figura 1.14 – Sistema polar

O ponto P fica determinado no plano por suas coordenadas polares:

$$P = (\rho, \theta)$$

onde:

$\rho$ = OP ($\rho \geq 0$) é a distância polar ou raio vetor de P

$\theta$ ($0^o < \theta < 2\pi$) é o argumento ou ângulo polar de P.

Algumas vezes, é oportuno a passagem de um referencial cartesiano para um referencial polar; ou polar para cartesiano.

Fazendo o eixo p coincidir com o eixo cartesiano x e O com a origem do plano concomitantemente, tem-se a figura a seguir.

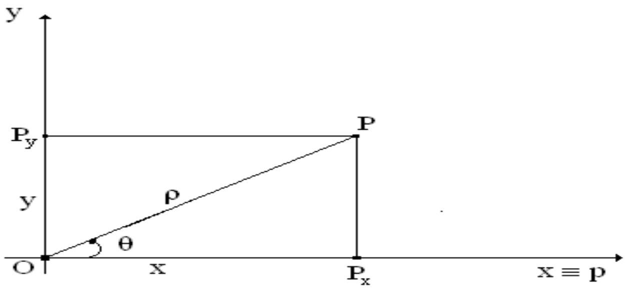



Figura 1.15 – Sistema cartesiano e polar

Portanto

$P = (x, y) \rightarrow$ coordenadas cartesianas

$P = (\rho, \theta) \rightarrow$ coordenadas polares

Do triângulo retângulo da figura 1.15 obtêm-se as seguintes relações:

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$
$$\text{tg } \theta = y/x$$
$$x = \rho \cos(\theta)$$
$$y = \rho \text{ sen}(\theta)$$

# Exercícios

i) Construir o gráfico de $\rho = 3 + \text{sen } \theta$.

ii) Deduzir a fórmula da distância entre os pontos $P = (\rho_1, \theta_1)$ e $P = (\rho_2, \theta_2)$,em coordenadas polares.