Analisador de espectros por FFT

A transformada de Fourier (FT) é uma ferramenta matemática utilizada essencialmente para decompor ou separar uma função ou forma de onda em senóides de diferentes frequências cuja soma é o próprio sinal original. Matematicamente a FT de uma função *f(x)* pode ser escrita da seguinte forma :

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ exp(-j\ 2\pi sx)\ dx$$

Em engenharia a função *f(x)* é tipicamente uma função no domínio do tempo e *F(s)* é consequentemente uma função no domínio da frequência.

Para aplicações computacionais que trabalham apenas com variáveis discretas utiliza-se uma variante da FT denominada DFT (Discrete Fourier Transformer). Neste caso a variável de entrada é um conjunto de pontos (amplitude × tempo), assim como a variável de saída (amplitude × frequência).

A partir de um número N_0 de amostras temporais de um sinal, a DFT pode ser calculada pela seguinte expressão :

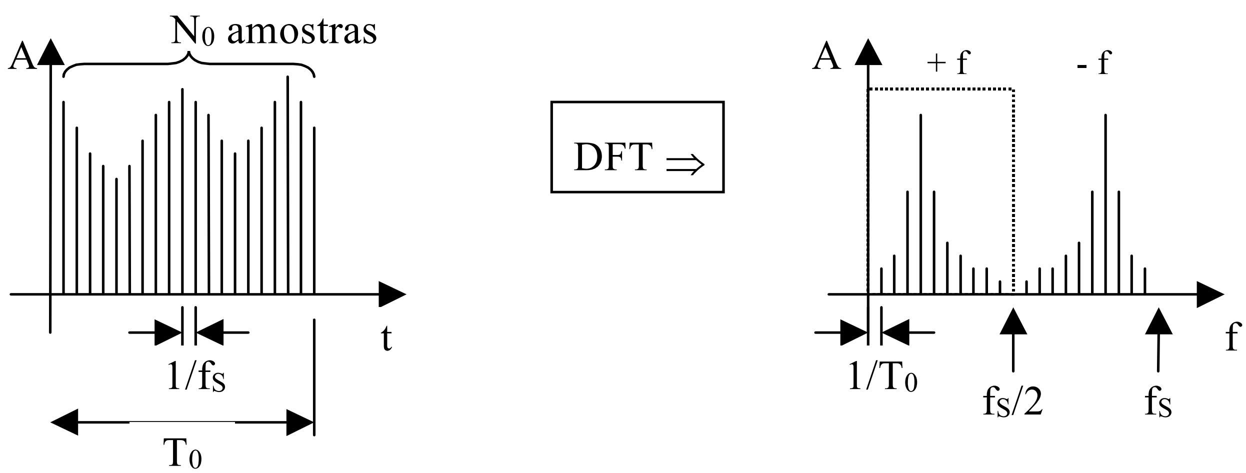
$$F_r = \sum_{k=0}^{N_0-1} f_k\ exp(-j\ r\ k\frac{2\pi}{N_0}) \qquad \text{para } r = 0, 1, ..., N_0-1$$

onde :

N_0 = número total de amostras temporais

f_k = amplitude das amostras temporais

O resultado da operação de DFT num sinal em função do tempo é um conjunto de pontos correspondente ao seu espectro de frequências, limitado à metade da frequência de amostragem ($f_S/2$) pelo teorema de Nyquist. O número de pontos *r* que compõem este espectro é igual ao número de amostras temporais N_0 utilizadas. No entanto apenas a metade destes pontos correspondentes ao espectro de frequências "positivas" é utilizado. Os pontos referentes às frequências "negativas" são desprezados, pois correspondem ao espelho das frequências "positivas".



Pela expressão da DFT pode-se concluir que número de operações computacionais a serem realizadas é proporcional à N_0^2, podendo representar um tempo de processamento considerável para altos valores de N_0.

A FFT (Fast Fourier Transformer) é uma variante da DFT (desenvolvida por Tukey and Cooley em 1965) que reduz o número de operações computacionais de N_0^2 para $N_0 \log_2 N_0$. Os algoritmos computacionais utilizados são simplificados quando N_0 é uma potência de 2. Diversos algoritmos de FFT foram desenvolvidos visando sempre uma redução do número de operações computacionais e consequentemente do tempo total de processamento.

Um analisador de espectros baseado na FFT consiste essencialmente num osciloscópio digital cujo processador matemático possui as rotinas de FFT. O sinal de entrada é amostrado e convertido em um valor numérico por um conversor A/D, sendo em seguida armazenado na memória. A FFT é realizada nos valores já armazenados na memória, não sendo portanto uma operação em tempo real.

O resultado é o espectro de frequências, que é mostrado na tela (apenas a parte positiva) de modo análogo ao de um analisador de espectros por varredura. O sinal de entrada deve ser corretamente filtrado (filtro passa-baixas) antes de ser amostrado, para evitar que componentes de frequência superior à $f_S/2$ sejam analisadas, o que causaria o surgimento de raias adicionais no espectro final.

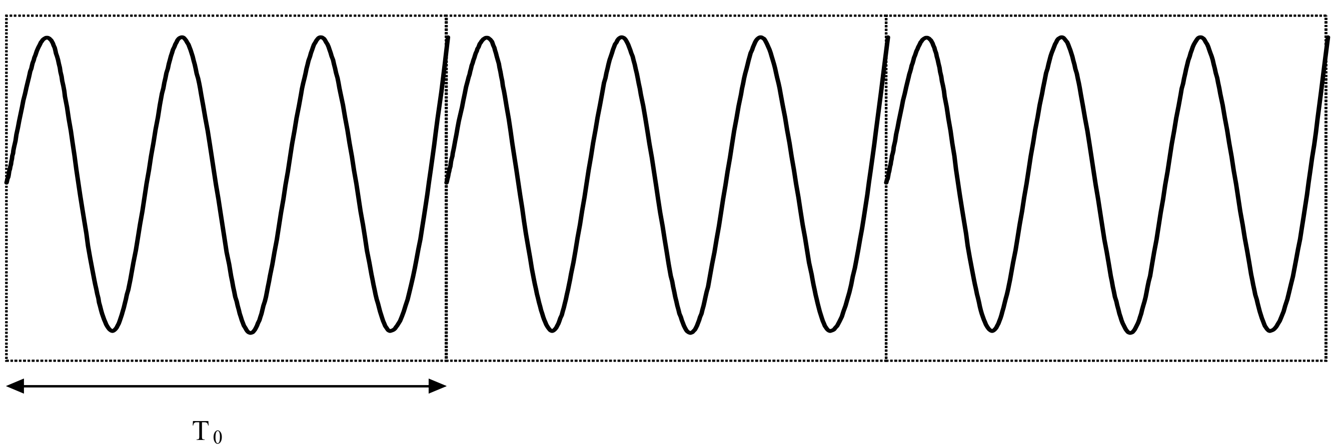
A resolução espectral (equivalente ao RBW no analisador por varredura) é igual à $1/T_0$. Dessa forma só podem ser analisados sinais com frequência superior à $1/T_0 = f_S/N_0$.

A faixa de frequências possível de ser analisada é :

$$\frac{f_S}{N_0} \leq fi \leq \frac{f_S}{2}$$

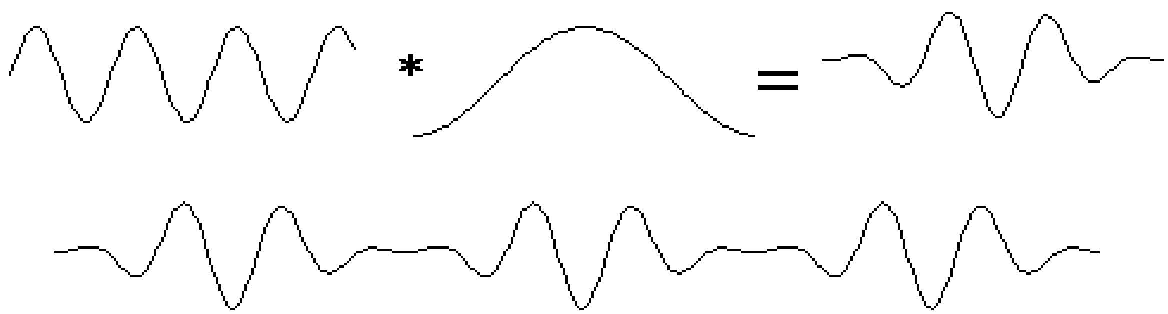
Janelamento do sinal :

A FT supõe que o sinal analisado é periódico e existe desde o tempo $-\infty$ à $+\infty$. Os algoritmos de DFT (ou FFT) executam a operação em um número limitado de amostras temporais adquiridas durante um intervalo de tempo finito T_0, o que equivale à multiplicação do sinal analisado por uma janela temporal retangular. Para que haja coerência com a FT, o algoritmo de DFT supõe que o sinal adquirido durante o tempo T_0 é periódico e se repete indefinidamente. Esse processo equivale à adicionar-se ao final da última amostra de cada ciclo T_0 uma parcela idêntica às N_0 amostras. Caso o intervalo T_0 **não** contenha um número inteiro de ciclos, a junção dar-se-á de forma descontínua introduzindo distorções no sinal original.



Estas distorções se apresentam como um alargamento do espectro original (*spectal leakage*), devido ao alto conteúdo harmônico contido nas transições abruptas.

Para garantir que não hajam descontinuidades do sinal na junção, pode-se executar uma operação de "janelamento" que consiste na multiplicação do sinal original por uma função cujo valor é zero no início o no final da janela temporal. Dessa forma garante-se que os pontos de junção

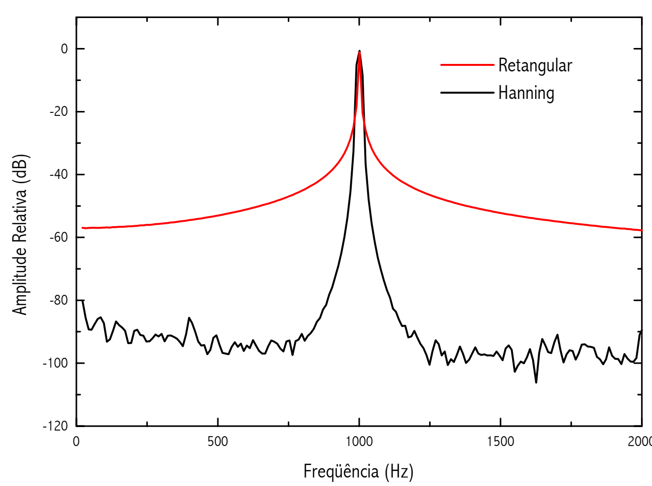


início-final terão sempre o mesmo valor zero. Além disso é importante que a derivada dessa função também possua valor zero nas suas extremidades.

De modo geral o janelamento melhora a qualidade do resultado da FFT pois na grande maioria dos casos práticos o intervalo de tempo T_0 não contém um número inteiro de ciclos do sinal analisado. Várias funções de janelamento podem ser utilizadas dependendo do tipo de sinal, do número de pontos e da qualidade desejada. Uma das mais comuns é a janela de *Hanning* que consiste na função:

$$W_{Hanning} = 0{,}5 - 0{,}5\cos(2\pi t/T_0)$$

A figura ao lado mostra a redução da largura espectral obtida com o janelamento *Hanning* em relação à janela retangular (sem janelamento)



Window function	Sidelobe level (dB)	Fall off (dB per octave)	Coherent gain	Equivalent noise bandwidth (bins)	6 dB bandwidth (bins)	Worst case processing loss (dB)
Rectangular	-13	-6	1.00	1.00	1.21	3.92
Triangular	-27	-12	0.50	1.33	1.78	3.07
Hanning	-32	-18	0.50	1.50	2.00	3.18
Hamming	-43	-6	0.54	1.36	1.81	3.10
Poisson (3.0)	-24	-6	0.32	1.65	2.08	3.64
Poisson (4.0)	-31	-6	0.25	2.08	2.58	4.21
Cauchy (4.0)	-35	-6	0.33	1.76	2.20	3.83
Cauchy (5.0)	-30	-6	0.28	2.06	2.53	4.28
Gaussian (3.0)	-55	-6	0.43	1.64	2.18	3.40
Kaiser-Bessel (3.0)	-69	-6	0.40	1.80	2.39	3.56
Kaiser-Bessel (3.5)	-82	-6	0.37	1.93	2.57	3.74