Capítulo 3: Elementos dos Circuitos Elétricos

3.1 INTRODUÇÃO

O objetivo da Engenharia é projetar e produzir dispositivos que atendam às necessidades da humanidade. Para isso, é comum analisar o trabalho do Engenheiro como a seguinte seqüência de passos:

1. **Entender o problema.**
2. **Planejar uma maneira de solucionar o problema.**
3. **Executar o plano de solução do problema.**
4. **Analisar o método usado e a solução obtida, verificando:**
   (a) se atende ao problema e
   (b) se poderia ser executada de uma forma mais rápida ou com menores custos.
5. **Resolver o problema novamente com os aperfeiçoamentos do método de solução.**

Para poder resolver os problemas, os Engenheiros lançam mão freqüentemente de **modelos**. A palavra **modelo** pode significar, no contexto de engenharia:

(a) uma **representação física** do problema, com a qual se faz ensaios afim de determinar o comportamento do sistema antes de construí-lo. Nesse caso tem-se os seguintes tipos de modelos:

(a.1) **Protótipos**: são modelos físicos em escala 1:1, semelhantes portanto ao equipamento, dispositivo ou sistema que será posteriormente produzido. Um exemplo desse tipo de modelo são os protótipos de automóveis que a indústria automobilística utiliza para testes de desempenho e de impacto.

(a.2) **Modelos Reduzidos**: são modelos físicos em escala reduzida em relação ao equipamento ou sistema que será produzido. Exemplos desse caso são os modelos reduzidos usados em engenharia hidráulica e engenharia naval, bem como modelos de aeronaves usados para testes aerodinâmicos em túnel de vento.

(b) uma **equação** ou um **conjunto de equações** que descreve o funcionamento do dispositivo ou sistema. Da mesma forma como ocorre com os modelos físicos, a equação ou conjunto de equações permite que simule-se certas condições e verifique-se o resultado que se obteria, antes de se construir ou produzir o sistema.

No caso da análise de circuitos elétricos, os métodos lançam mão de **modelos** (neste caso, com o segundo significado, ou seja, **equações**) que mostram o comportamento dos dispositivos. É necessário portanto que o Engenheiro esteja ciente de que qualquer modelo, para simplificar a análise do problema, tem suas limitações. Por exemplo, um modelo reduzido de uma barragem de uma usina hidrelétrica simula o empreendimento real mas obviamente tem simplificações importantes, pois muitos detalhes como a rugosidade das estruturas de concreto são difíceis de serem implementadas numa estrutura de pequenas dimensões. De forma análoga, os modelos matemáticos dos dispositivos que formam um circuito elétrico introduzem simplificações que não correspondem exatamente ao comportamento real do circuito.

Em conclusão, quando de fala de **elementos de circuitos**, está se referindo a modelos, ou seja, equações que descrevem o funcionamento de dispositivos reais, mas com uma série de limitações e simplificações introduzidas para facilitar o trabalho de análise. Por exemplo, será visto em seguida que o elemento de circuito chamado de **fonte de tensão** fornece uma tensão constante nos seus terminais, coisa que obviamente nenhuma bateria irá fazer, pois em algum momento o dispositivo físico irá falhar ou sofrer algum processo de envelhecimento.

Uma das primeiras simplificações feitas para os elementos de circuito é considera-los como sendo lineares. Para entender o que é um elemento ideal, refere-se à Figura 3.1, no qual um elemento passivo está desenvolve uma tensão v quando é percorrido por uma corrente i.

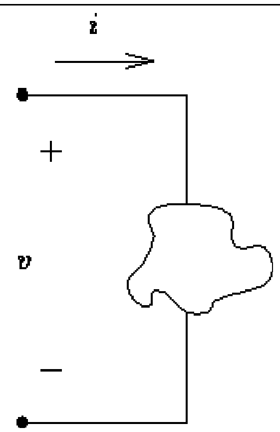


Figura 3.1:
Representação genérica de um *Elemento de Circuito*, no qual observa-se uma **tensão** (v) quando é percorrido por uma **corrente** (i).

Supondo que se tenha a corrente i_a no elemento, observa-se a tensão v_a entre os seus terminais. Quando se tem uma outra corrente i_b no elemento, a tensão observada é v_b. Então tal elemento é chamado de **linear** se observa-se inicialmente a seguinte condição, conhecida como **princípio da superposição**:

a corrente $(i_a + i_b)$ corresponde à tensão $(v_a + v_b)$

Outra condição para um elemento ser chamado linear é conhecido como **princípio da homogeneidade**. Isto significa que se a corrente é multiplicada por um fator constante $k_1.v_a$, então a corrente também será multiplicada pela mesma constante, ou seja, a corrente corresponde a $k_1.i_a$.

Os dois princípios da linearidade podem ser representados com o auxílio de uma seta que representa a resposta à excitação do sistema:

$$i \to v$$

Se o elemento é linear, então vale o **princípio da superposição**:

$$i_a \to v_a$$
$$i_b \to v_b$$
$$(i_a + i_b) \to (v_a + v_b)$$

Se o elemento é linear, então vale também o **princípio da homogeneidade**:

$$i_a \to v_a$$
$$k \cdot i_a \to k \cdot v_a$$

Exemplo:

Um elemento de circuito possui a seguinte equação que mostra o relacionamento existente entre tensão e corrente: $v = R . i$

Verificar se o elemento é linear.

Solução:

Iniciamos com o teste da superposição:

$$v_a = R . i_a \qquad v_b = R . i_b$$
$$v_a + v_b = R . i_a + R . i_b$$
$$v_a + v_b = R .(i_a + i_b) \qquad \text{Vale!}$$

Agora vamos ao teste da homogeneidade:

$$v_a = R . i_a$$

se $\boldsymbol{i_b = k \,.\, i_1}$ então $\boldsymbol{v_b = R \,.\, i_b = R \,.\, (k \,.\, i_a)}$

portanto $\boldsymbol{v_b = k.(R \,.\, i_a)}$ Vale!

Como o elemento satisfaz os dois princípios, é um elemento linear.

Exemplo:

Um elemento de circuito possui a seguinte equação que mostra o relacionamento existente entre tensão e corrente:

$$\boldsymbol{v = i^2}$$

Verificar se o elemento é linear.

Solução:

Teste da superposição: $\boldsymbol{v_a = (i_a)^2}$ $\boldsymbol{v_b = (i_b)^2}$

$$\boldsymbol{v_a + v_b = (i_a)^2 + (i_b)^2}$$

No entanto a matemática básica nos diz que:

$$\boldsymbol{(i_a + i_b)^2 = (i_a)^2 + 2.i_a.i_b + (i_b)^2}$$

Portanto não vale o princípio da superposição e o elemento não é linear. Pode-se verificar também que não vale o princípio da homogeneidade:

$$\boldsymbol{v_a = (i_a)^2}$$

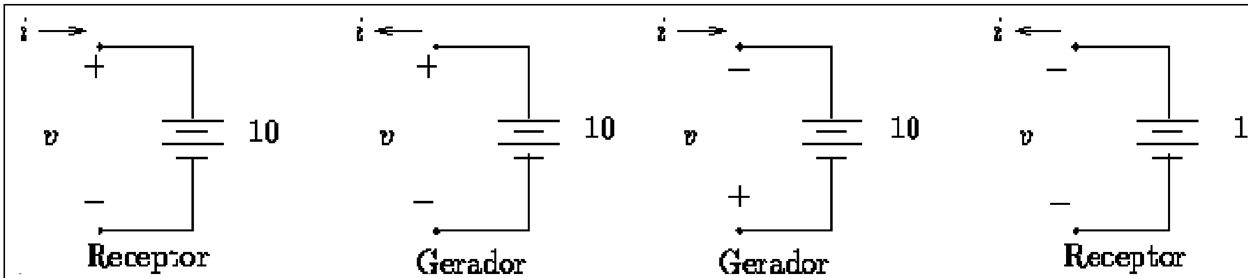
$$\boldsymbol{k.v_a \neq k\,(i_a)^2}$$

3.2. FONTES IDEAIS

Um dos principais **modelos** que se usa em circuitos elétricos é o das fontes ideais. A **Fonte Ideal de Tensão** é um elemento de circuito que mantém uma *tensão fixa* entre os seus terminais. A fonte de tensão pode ser um elemento gerador ou um elemento receptor, dependendo se ela estiver fornecendo o recebendo energia. Este elemento modela idealmente as pilhas e baterias. No caso, se a fonte de tensão é um elemento receptor, seria o caso de uma bateria que estivesse em processo de carga.

De forma análoga, define-se a **Fonte Ideal de Corrente** como o elemento ou bipolo cuja corrente que o atravessa é invariante com a tensão entre seus terminais. Este elemento não existe de forma simples nos circuitos reais, sendo necessário um circuito eletrônico relativamente complexo para se ter uma fonte de corrente constante. A fonte de corrente modela idealmente, por exemplo, transistores convenientemente polarizados.

Observe que um curto-circuito pode ser considerado como se fosse uma fonte ideal de tensão (V=0) e um circuito aberto como uma fonte ideal de corrente (I=0).



v = +10 V v = +10 V v = -10 V v = -10 V

Figura 3.2: Fontes ideais de tensão.

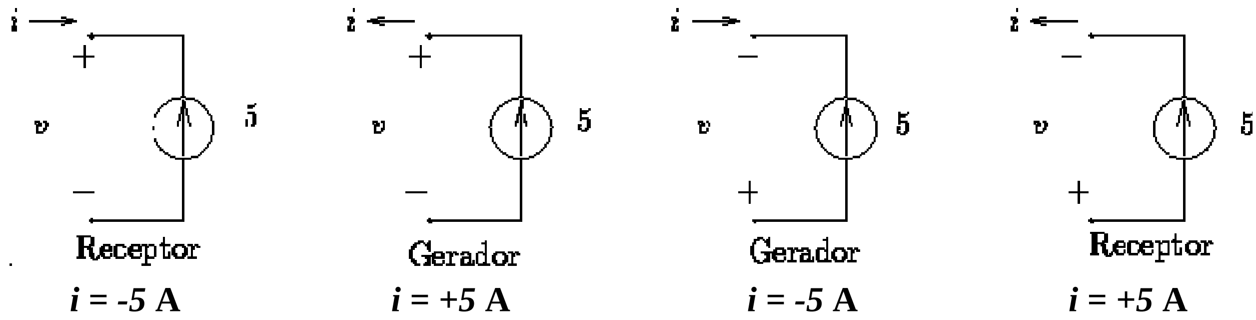


Figura 3.3: Fontes ideais de corrente.

3.3. O RESISTOR IDEAL

O resistor ideal é um elemento de circuito que apresenta o seguinte relacionamento entre tensão em corrente, descrito graficamente na Figura 3.4:

$$v = R \, . \, i \qquad \text{Eq.3.2}$$

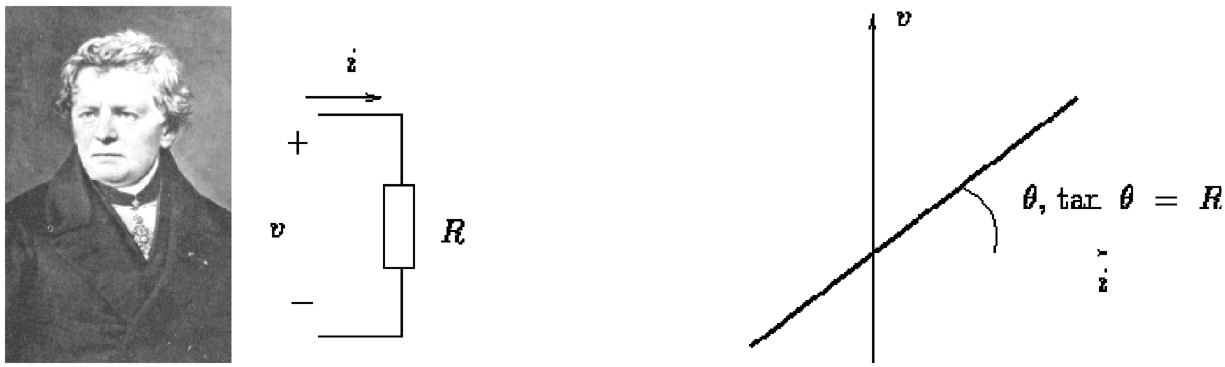


Figura 3.4: Georg Simon Ohm e a representação do comportamento do Resistor Ideal.

A constante de proporcionalidade R na Eq.3.2. é chamada **resistência elétrica**, cuja unidade é **ohm** (para o símbolo, é usada a letra grega ômega maiúscula — Ω). A Eq.3.2. é muitas vezes nomeada como sendo a **Lei de Ohm** mas isso não é perfeitamente correto sob o ponto de vista histórico. Na verdade nos trabalhos de Georg Simon Ohm (1787-1854) a "lei" jamais aparece escrita dessa forma, pois suas pesquisas envolveram a influência da sessão transversal e do comprimento de condutores metálicos na densidade da corrente e no campo elétrico.

Para materiais homogêneos, é possível definir também o conceito de resistividade (ρ) através da Eq.3.3, onde ℓ é o comprimento do condutor metálico e A é a área da sessão transversal:

$$R = \rho \frac{\ell}{A} \qquad \text{Eq.3.3}$$

É fácil verificar que se o comprimento ℓ do condutor metálico for medido em **metros** (**m**) e a área A da sessão transversal for medida em **metros quadrados** (**m^2**), a unidade da resistividade ρ do material utilizado na fabricação do condutor tem a unidade **Ω.m**. A Tabela 3.1 mostra os valores da resistividade de alguns metais comumente empregados em Engenharia. Observe-se que a resistividade é definida para um determinada temperatura; isso é justificável pelo mecanismo físico que explica a resistência dos condutores através do choque dos elétrons em movimento com a estrutura cristalina do material. À medida que aumenta-se a temperatura, a estrutura cristalina vibra em um grau cada vez maior. Isto posto, a probabilidade dos elétrons chocarem-se com a estrutura do material aumenta com o incremento da temperatura, explicando dessa forma porquê que os Engenheiros se preocupam em manter os condutores elétricos em baixa temperatura, de modo a diminuir a sua resistência elétrica.

Tabela 3.1: Valores de resistividade de alguns metais, a 20°C:

Metal	Resistividade em Ω.m à 20°C
Prata	$1{,}64 \times 10^{-8}$
Cobre	$1{,}694 \times 10^{-8}$
Ouro	$2{,}20 \times 10^{-8}$
Alumínio	$2{,}67 \times 10^{-8}$
Níquel	$6{,}9 \times 10^{-8}$
Tungstênio	$5{,}5 \times 10^{-8}$
Ferro	$12{,}3 \times 10^{-8}$

Exemplo:

Encontra-se no comércio fios de cobre com sessão transversal de 2,5 mm². Calcular a resistência de um rolo de 100 m desse fio, supondo-o à temperatura de 20°C.

Solução:

Inicialmente é conveniente converter a sessão transversal para metros quadrados:

$$2{,}5\ \text{mm}^2 = 2{,}5 \times (10^{-3})^2\ \text{m}^2 = 2{,}5 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$$

Usando diretamente a Eq.3.3 e a resistividade da Tabela 3.1, tem-se então:

$$R = \rho\frac{\ell}{A} = 1{,}694\times10^{-8}\,\frac{100}{2{,}5\times10^{-6}} = 0{,}68\,\Omega$$

Observar que mesmo para 100 m de fio, o valor da resistência é bastante baixo. Por esse motivo, na prática despreza-se a resistência de fios de cobre de pequeno comprimento, como os que são usados na montagem de pequenos circuitos.

Exemplo:

O alumínio já é amplamente utilizado como material condutor em cabos elétricos de alta tensão. Por razões econômicas, tem sido proposto a substituição do cobre pelo alumínio também nos fios e cabos de instalações elétricas de baixa tensão, como os usados nas residências. Calcular o incremento em porcentagem do diâmetro dos fios de alumínio, para que tenham a mesma resistência elétrica dos fios de cobre utilizados atualmente.

Solução:

A Eq.3.3 pode ser escrita e uma forma diferente:

$$A = \rho\frac{\ell}{R}$$

Supondo a área da sessão transversal do fio de cobre como se fosse igual a **100** (sem unidade, para obter-se diretamente em porcentagem), tem-se para o cobre:

$$100 = \rho_{Cu}\frac{\ell_{Cu}}{R_{Cu}}$$

E para o alumínio:

$$A_{Al} = \rho_{Al}\frac{\ell_{Al}}{R_{Al}}$$

Ao substitui-se o cobre pelo alumínio, supõe-se que se obtenha o mesmo desempenho na instalação, ou seja, que mantenha-se a mesma resistência para um determinado comprimento de fio. Portanto pode-se considerar nas equações anteriores que $\ell_{Al} = \ell_{Cu}$ e que $R_{Al} = R_{Cu}$, de onde obtém-se:

$$\frac{100}{A_{Al}} = \frac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}} \Rightarrow A_{Al} = \frac{100\rho_{Al}}{\rho_{Cu}} = \frac{100\times2{,}67\times10^{-8}}{1{,}694\times10^{-8}} = 157{,}61$$

Ou seja, a área da sessão transversal dos fios de alumínio tem que sofrer um incremento de 57,61 % em relação à sessão transversal dos fios de cobre, para manter-se a mesma resistência elétrica nas instalações. Esse fato fará com que seja necessário usar-se eletrodutos de maior diâmetro nas instalações prediais, se for feita a substituição dos fios de cobre por fios de alumínio em futuros projetos.

3.4. POTÊNCIA E ENERGIA NO RESISTOR IDEAL

Viu-se no Capítulo 2 quer a potência num elemento genérico de circuito é dada por:

$$p = v \cdot i \qquad \text{Eq.2.5}$$

Usando-se a "Lei de Ohm", obtém-se duas expressões para a potência em um resistor ideal:

$$i = \frac{v}{R} \Rightarrow p = v\left(\frac{v}{R}\right)$$

$$p = \frac{v^2}{R} \qquad \text{Eq.3.4}$$

$$v = R \cdot i \Rightarrow p = (R \cdot i)i$$

$$p = i^2 . R \qquad \text{Eq.3.5}$$

Observar que tanto a Eq.3.4 como a Eq.3.5 fornecem resultados sempre positivos, pois tem-se em cada uma delas um termo elevado ao quadrado (i^2 ou v^2) e a resistência R é sempre positiva. Ou seja, o resistor é sempre um elemento **passivo** num circuito elétrico, segundo a convenção lançada no capítulo anterior.

A energia foi definida no capítulo 2 através da Eq.2.8:

$$w = \int_0^\infty p \cdot dt \qquad \text{Eq.2.8}$$

De posse da Eq.3.5, tem-se portanto uma expressão particular da energia em um resistor:

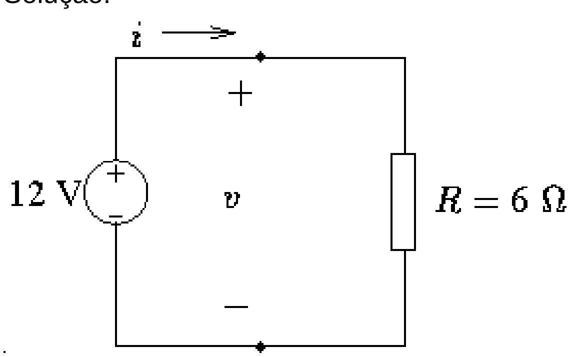
$$w = \int_0^\infty i^2 \cdot R \, dt$$

Como a resistência é uma constante, fica-se simplesmente com

$$w = R\int_0^\infty i^2 \, dt \qquad \text{Eq.3.6}$$

Observa-se na Eq.3.6 que a energia em um resistor será sempre positiva. Por esse motivo diz-se que num circuito eletrônico o resistor está sempre atuando como um **dissipador de energia**. Isso é fácil de entender lembrando-se do mecanismo envolvido na resistência elétrica, que no caso dos metais é relacionado ao choque dos elétrons com a estrutura cristalina do material.

Exemplo:
Calcular a energia dissipada por uma lâmpada que foi esquecida ligada em um automóvel durante 4 horas. Considerar que a bateria do automóvel é uma fonte de tensão ideal de 12 volts e que a lâmpada é um resistor ideal de 6 ohms.
Solução:



Usando-se a "Lei de Ohm", tem-se:

$$v = R \cdot i$$

Como v = 12 V e R = 6 Ω, tem-se então i = 2 A.
A potência dissipada pela lâmpada é portanto:

$$p = v \cdot i$$

p = 12 x 2 = 24 W

A energia é obtida pela integral:

$$w = \int_0^t p \cdot dt$$

de onde se tem:

$$w = 24.t = 24\ (4 \times 60 \times 60)$$

$$w = 3{,}46 \times 10^5\ \text{J}$$

Caso prefira-se o resultado em **W.h**, basta considerar na expressão anterior o intervalo de tempo em horas e não em segundos:

$$w = 24.\text{t} = 24 \times 4$$

$$w = 96\ \text{W.h}$$

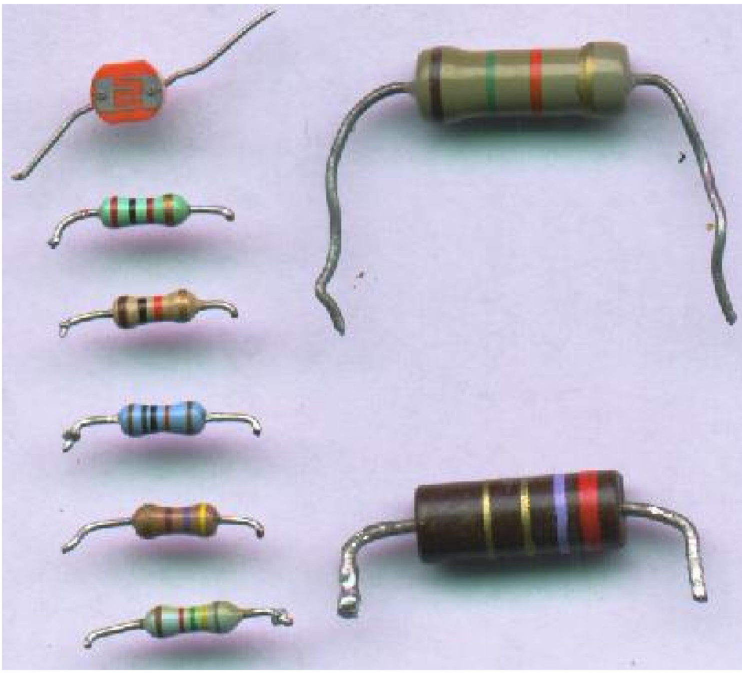


Figura 3.5:

Diversos resistores utilizados em circuitos eletrônicos.

Bibliografia

[1] DORF, Richard C. *Introduction to electric circuits.* John Wiley, New York, 1989. 592p.

[2] BURIAN JÚNIOR, Yaro. *Circuitos Elétricos.* UNICAMP, Campinas, 1993 - Edição do Autor