Otimização Paramétrica

Análise Pós-Otimização de variações *contínuas* e *pré-determinadas* aplicadas ao problema original.

Parametrização do vetor b:

↳ variações em b somente podem afetar a *Factibilidade*

Ex.: No problema dos armários, supor:

$$\underline{b}' = \begin{bmatrix} 8+t \\ 6+t \\ 18-2t \end{bmatrix} \quad \text{ou seja, } \underline{b}' = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ t \\ -2t \end{bmatrix} = \underline{b}^0 + \Delta\underline{b}$$

Otimização Paramétrica

Parametrização do vetor b:

Ex.: No problema dos armários, supor:

$$\underline{b}' = \begin{bmatrix} 8+t \\ 6+t \\ 18-2t \end{bmatrix} \quad \text{ou seja, } \underline{b}' = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t \\ t \\ -2t \end{bmatrix} = \underline{b} + \Delta\underline{b}$$

A partir das informações do *Tableau* Ótimo,

$$S^* = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \qquad \underline{b}^* = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tableau ótimo

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	300	100	W+3600
0	0	1	4/3	-2/3	4
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2

pode-se determinar o novo b*:

$$(\underline{b}')^* = S^*.(\underline{b} + \Delta\underline{b}) = b^* + S^*.\,\Delta\underline{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} t \\ t \\ -2t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + \frac{11}{3}t \\ 6+t \\ 2 - \frac{4}{3}t \end{bmatrix}$$

Parametrização do vetor b *(cont.1 exemplo):*

Como,

$$(\underline{b}')^* = \begin{bmatrix} 4 + \frac{11}{3}t \\ 6 + t \\ 2 - \frac{4}{3}t \end{bmatrix}$$

e para manter factibilidade, (b')* ≥ 0:

$$\begin{cases} 4 + \dfrac{11}{3}t \ \geq 0 \ \rightarrow \ \ t \ \geq -12/11 \\ 6 + t \ \geq 0 \ \rightarrow \ \ t \ \geq -6 \\ 2 - \dfrac{4}{3}t \ \geq 0 \ \rightarrow \ \ t \ \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Assim, para $0 \leq t \leq 3/2$, a Base ótima $\{x_1, x_2, s_1\}$ continua a mesma

e a solução ótima varia como:

$$\mathrm{x}_1(t) = 2 - \frac{4}{3}t \qquad \mathrm{x}_2(t) = 6 + t$$

e

$$Z^*(t) = \underline{y}^*.\underline{b}' = [0 \quad 300 \quad 100]\begin{bmatrix} 8+t \\ 6+t \\ 18-2t \end{bmatrix} = 3600 + 100.\mathrm{t}$$

p/ t = 0 ⇒ solução original

p/ t = 3/2 ⇒ $\begin{cases} (x_1)^* = 0 \\ (x_2)^* = 15/2 \\ z^* = 3750 \end{cases}$

Parametrização do vetor b *(cont.2 exemplo):*

Em t=3/2 o *Tableau* fica,

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	300	100	W+3750
0	0	1	4/3	-2/3	19/2
0	1	0	1	0	15/2
1	0	0	-2/3	1/3	0

Aplicando o Dual Simplex em torno de a_{34}, obtém-se a nova Base factível:

x_1	x_2	s_1	s_2 $(y^1)^*$	s_3	
450	0	0	0	250	W+3750
2	0	1	0	0	19/2
3/2	1	0	0	1/2	15/2
-3/2	0	0	1	-1/2	0

$(S^1)^*$

Parametrização do vetor b *(cont.3 exemplo):*

Agora pode-se avaliar a "nova" variação em b* como função de t :

$$(\underline{b}')^* = (S^1)^*.(\underline{b} + \Delta\underline{b}) = \begin{bmatrix} 8+t \\ 9-t \\ -3+2t \end{bmatrix}$$

Logo, para manter factibilidade: $\begin{cases} t \geq -8 \\ t \leq 9 \\ t \geq 3/2 \end{cases}$

Assim, na faixa $3/2 \leq t \leq 9$, a Base ótima $\{x_2 , s_1 , s_2\}$ continua a mesma e a solução ótima varia como:

$$x_1(t) = 0 \qquad x_2(t) = 9 - t$$

e

$$Z^*(t) = (\underline{y}_1)^*.\underline{b}' = [0 \quad 0 \quad 250] \begin{bmatrix} 8+t \\ 6+t \\ 18-2t \end{bmatrix} = 4500 - 500.t$$

p/ t = 3/2 $\Rightarrow$ solução anterior

p/ t = 9 $\Rightarrow$ $\begin{cases} (x_1)^* = 0 \\ (x_2)^* = 0 \\ z^* = 0 \end{cases}$

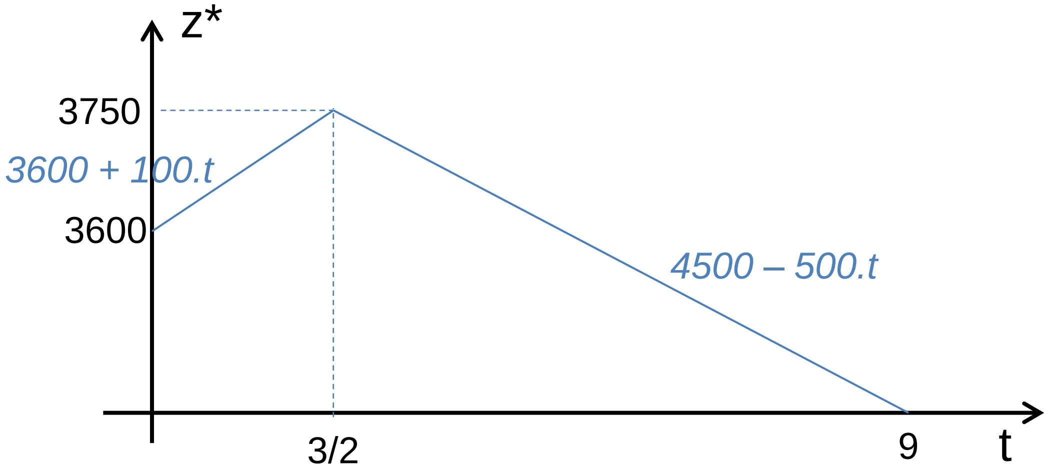
<u>Parametrização do vetor b</u> *(cont.4 exemplo):*

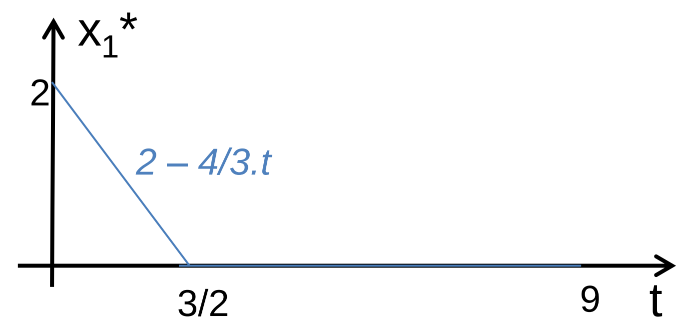
Repetindo o processo, para t = 9 o *Tableau* fica,

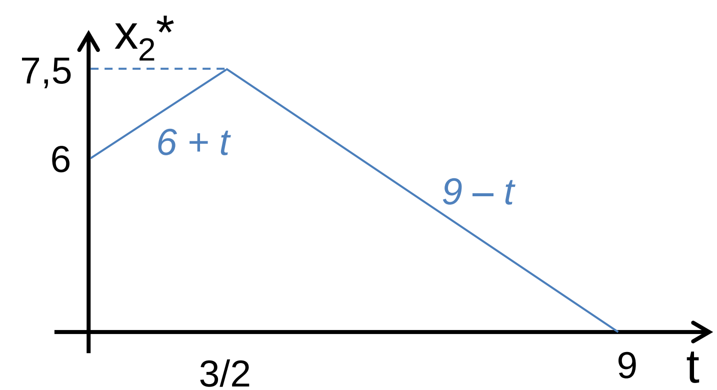
x_1	x_2	s_1	S_2	S_3	
450	0	0	0	250	W+3750
2	0	1	0	0	17
3/2	1	0	0	1/2	0
-3/2	0	0	1	-1/2	15

Nenhum coeficiente < 0 $\Rightarrow$ FIM
(não há mais soluções factíveis p/ t > 9)

Assim, tem-se a seguinte evolução da solução ótima, considerando a parametrização proposta:







Otimização Paramétrica

Parametrização do vetor $\underline{c}$: somente pode afetar a *Otimalidade*

Ex.: No problema dos armários, supor: Z = (300+10u).x_1 + (500-10u).x_2

ou seja, $\underline{c}' = [-300 \quad -100] + [-10u \quad 10u] = \underline{c} + \Delta\underline{c}$

Observando que, no ótimo, a linha relativa à F. Obj. é determinada por:

$$\underline{c} + \underline{y}^* A \;\vdots\; \underline{y}^* \quad \Rightarrow (\underline{c} + \Delta\underline{c}) + \underline{y}^* A \;\vdots\; \underline{y}^* \quad \Rightarrow \quad (\underline{c} + \underline{y}^* A) + \Delta\underline{c} \;\vdots\; \underline{y}^*$$

Assim, a partir do *Tableau* Ótimo inicial (p/ u=0), inclui-se a perturbação em $\underline{c}$:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0-10u	0+10u	0	300	100	W+3600
0	0	1	4/3	-2/3	4
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2

Otimização Paramétrica

Ex. (cont.):

Colocando novamente o *Tableau* na forma preparada resulta:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	300 - 50/3 u	100 + 10/3 u	W+3600 - 40u
0	0	1	4/3	-2/3	4
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2

Para manter otimalidade:

$$\begin{cases} 300 - \dfrac{50}{3}u \geq 0 \\ \\ 100 + \dfrac{10}{3}u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \leq 18 \\ \\ u \geq -30 \end{cases} \Rightarrow \quad u \leq 18$$

Otimização Paramétrica

Ex. (cont.2):

Assim, para u = 18 o *Tableau* fica:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	0	160	W+2880
0	0	1	4/3	-2/3	4
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2

Aplicando o Simplex a fim de colocar s_2 na base, tem-se o novo *Tableau* ótimo:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	0	160	W+2880
0	0	3/4	1	-1/2	3
0	1	-3/4	0	1/2	3
1	0	1/2	0	0	4

Otimização Paramétrica

Ex. (cont.3):

Incluindo novamente a perturbação em c e recolocando na forma preparada:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	25/2 u	0	160 – 5u	W+2880 + 10u
0	0	3/4	1	-1/2	3
0	1	-3/4	0	1/2	3
1	0	1/2	0	0	4

Para manter otimalidade:

$$\begin{cases} \frac{25}{2}u \geq 0 \\ 160 - 5u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \geq 0 \\ u \leq 32 \end{cases} \Rightarrow u \leq 32$$

Otimização Paramétrica

Ex. (cont.4):

Assim, para u = 32 o *Tableau* fica:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	300	0	0	W+3200
0	0	3/4	1	-1/2	3
0	1	-3/4	0	1/2	3
1	0	1/2	0	0	4

Aplicando o Simplex a fim de colocar s_3 na base, tem-se o novo *Tableau* ótimo:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	300	0	0	W+3200
0	1	0	1	0	6
0	2	-3/2	0	1	6
1	0	1/2	0	0	4

Otimização Paramétrica

Ex. (cont.5):

Incluindo novamente a perturbação em c e recolocando na forma preparada:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	10u	300 + 5u	0	0	W+3200 + 40u
0	1	0	1	0	6
0	2	-3/2	0	1	6
1	0	1/2	0	0	4

Para manter otimalidade:

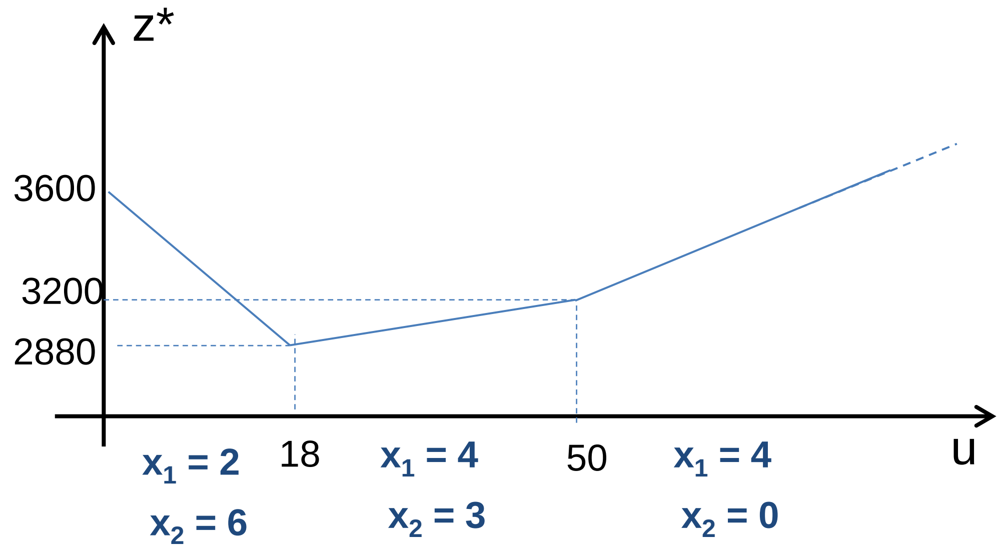
$$\begin{cases} 10u \geq 0 \\ 300 + 5u \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \geq 0 \\ u \geq -60 \end{cases} \Rightarrow u \geq 0 \Rightarrow$$

Base permanece sempre ótima

Otimização Paramétrica

Ex. (cont.6):

Assim, tem-se a seguinte evolução da solução ótima, considerando a parametrização proposta em c:

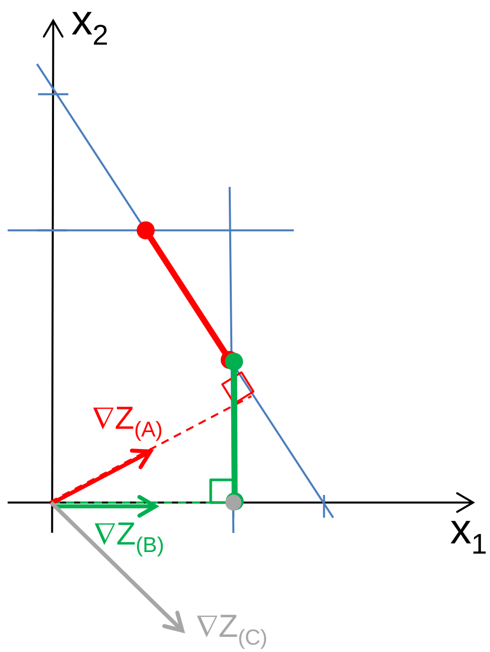


Otimização Paramétrica

Ex. (cont.7):

Observar que:

$$\begin{cases} \text{p/ } u=18 \Rightarrow Z_{(A)} = 480.x_1 + 320.x_2 \\ \text{p/ } u=50 \Rightarrow Z_{(B)} = 800.x_1 + 0.x_2 \end{cases}$$



p/ $u \rightarrow \infty \Rightarrow Z_{(C)} \rightarrow \infty.x_1 - \infty.x_2$