Otimização Discreta

Problema de Otimização onde as variáveis somente podem assumir determinados valores.

- Otimização Inteira: todas as variáveis devem assumir valores inteiros.
  - Otimização Binária: variáveis devem assumir valores 0 ou 1.

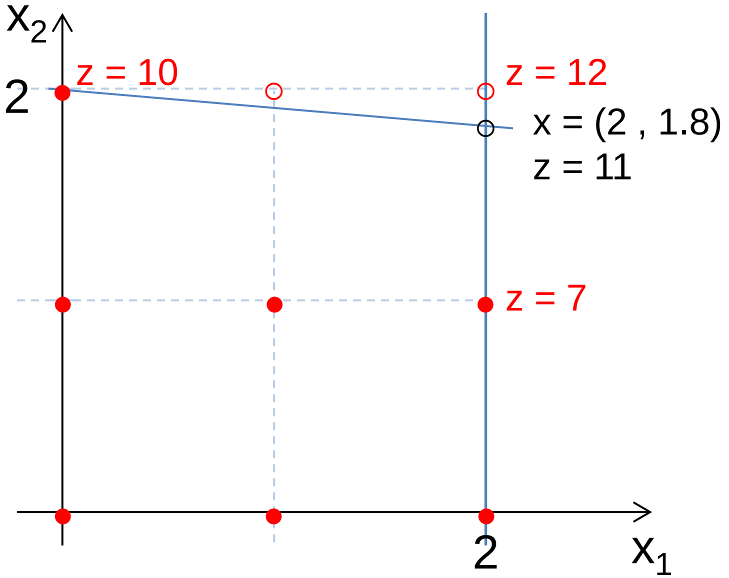
(Otimização Inteira-Mista: pelo menos uma variável do POL deve ser inteira)

Otimização Discreta

Considere o POL:

$$\text{Max } Z = x_1 + 5.x_2$$
s.a.
$$x_1 + 10.x_2 \leq 20$$
$$x_1 \leq 2$$

x_1 , x_2 ≥ 0 , e inteiros



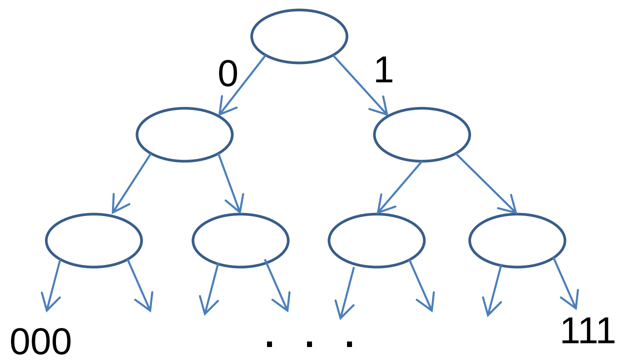
Obs.:
- Arredondamento da solução relaxada (sem considerar a restrição de inteiro), no caso de x=(2, 1.8) para x=(2, 1) ou x=(2, 2), não é viável.

- Enumeração de todas as soluções inteiras não é prático:
  - soluções inteiras = $10^{\text{(num. de variáveis)}}$
  - soluções binárias = $2^{\text{(num. de variáveis)}}$

Otimização Discreta

Ideia básica dos Métodos de Solução Discreta:

$\Rightarrow$ evitar a avaliação de toda a árvore de soluções



"árvore" de soluções para problema binário com 3 variáveis

Etapas Elementares:

i) Relaxar o POD, eliminando as restrições discretas
ii) Resolver o PO relaxado, obtendo a solução ótima contínua (relaxada)
iii) A partir do ótimo relaxado, adicionar restrições artificiais que alterem a região facvtível iterativamente, até resultar num ponto extremo ótimo discreto (que atenda as restrições discretas).

Dois Algoritmos Fundamentais:

- Método de Planos de Corte – Gomory, 1958 *(pouco efetivo na prática)*
- Método "Branch and Bound" – Lang e Doig, 1960

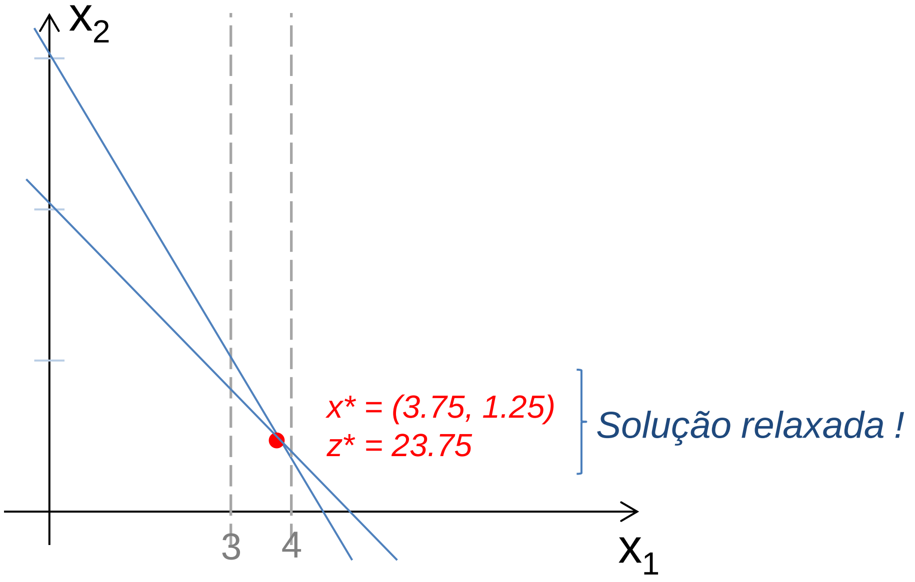
Método *Branch and Bound*

Exemplo:

Max $Z = 5.x_1 + 4.x_2$
s.a.

$$x_1 + x_2 \leq 5$$
$$10\, x_1 + 6\, x_2 \leq 45$$

$x_1\, ,\, x_2 \geq 0$, e inteiros

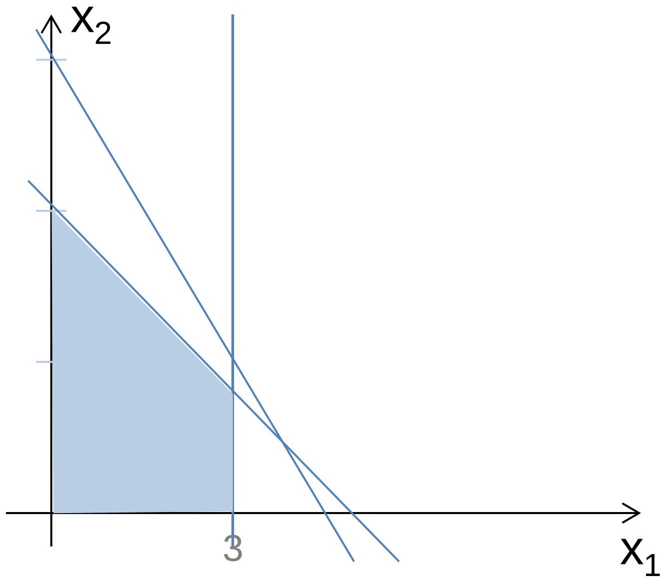


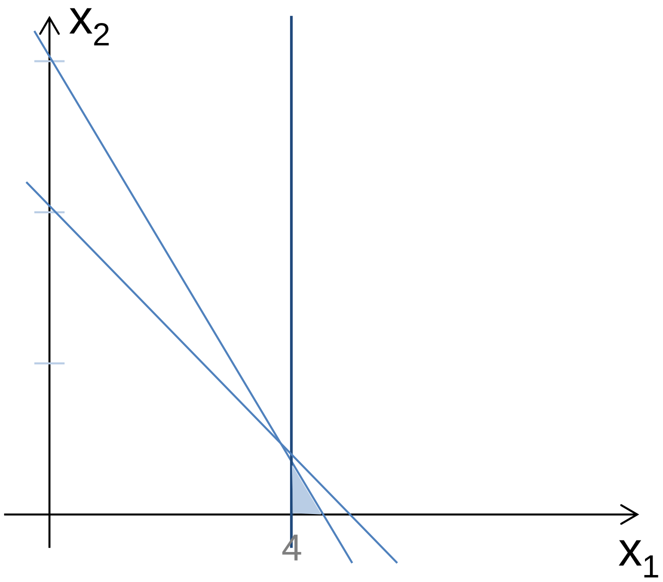
Como x* (relaxado) é não inteiro, acrescentar restrições ao problema original, buscando eliminar a região entre os valores inteiros mais próximos da solução relaxada, que no exemplo seriam: $3 < x_1 < 4$ ou $1 < x_2 < 2$

Método ***Branch and Bound***

Assim, escolhendo o intervalo para x_1, geram-se dois novos subproblemas:

$P^{(1)} = P^{original} + \{ x_1 \leq 3 \}$ $P^{(2)} = P^{original} + \{ x_1 \geq 4 \}$





Método *Branch and Bound*

$\rightarrow$ Resolvendo $P^{(2)}$ relaxado, ou seja:

$$P^{(2)} \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } Z = 5.x_1 + 4.x_2 \\ \text{s.a.} \\ \quad x_1 + \quad x_2 \leq 5 \\ 10\, x_1 + 6\, x_2 \leq 45 \\ \qquad\qquad x_1 \geq 4 \\ \quad x_1 , x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Obtém-se $\Rightarrow$ $\underline{x}^* = (4.0 , 0.83)$ e $z^* = 23.33$

Como x_2^* não é inteiro, geram-se dois novos subproblemas:

$P^{(3)} = P^{(2)} + \{ x_2 \leq 0 \} = P^{original} + \{ x_1 \geq 4 \text{ e } x_2 \leq 0 \}$

$P^{(4)} = P^{(2)} + \{ x_2 \geq 1 \} = P^{original} + \{ x_1 \geq 4 \text{ e } x_2 \geq 1 \}$

Método *Branch and Bound*

→ Resolvendo $P^{(3)}$ relaxado, obtém-se: $\underline{x}^* = (4.5\ ,\ 0)$ e $z^* = 22.5$

Como x_1^* não é inteiro, geram-se mais dois novos subproblemas:

$$P^{(5)} = P^{(3)} + \{\ x_1 \leq 4\ \}$$

$$P^{(6)} = P^{(3)} + \{\ x_1 \geq 5\ \}$$

→ Resolvendo $P^{(5)}$ relaxado, obtém-se: $\underline{x}^* = (4\ ,\ 0)$ e $z^* = 20$

Como $\underline{x}^*$ é inteiro ⇒ ótimo possível → não gera mais subproblemas

→ Agora resolvendo $P^{(6)}$ relaxado ⇒ não tem solução → não gera mais subproblemas

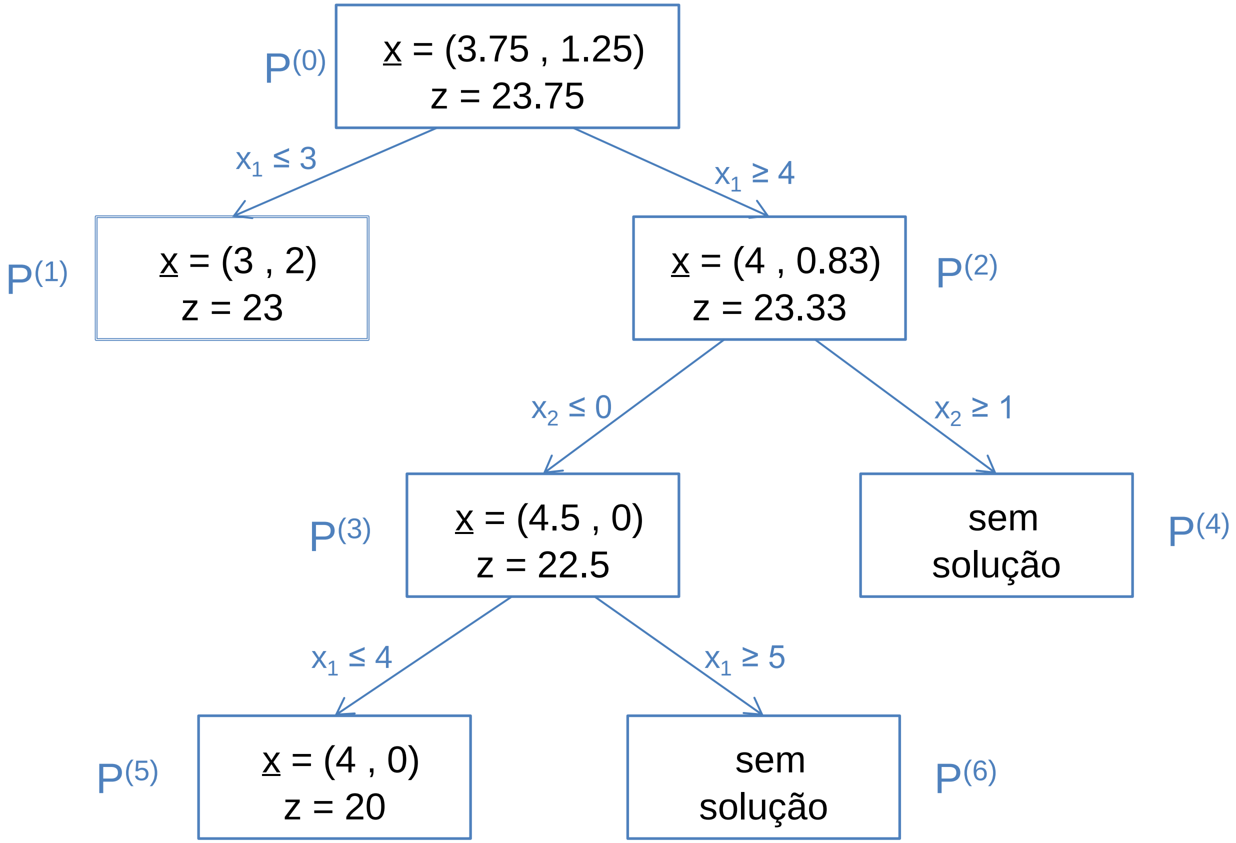
→ e resolvendo $P^{(4)}$ relaxado ⇒ não tem solução → não gera mais subproblemas

→ e resolvendo $P^{(1)}$ relaxado ⇒ $\underline{x}^* = (3\ ,\ 2)$ e $z^* = 23$

↳ inteira → não gera mais subproblemas

Método *Branch and Bound*

Resumo do processo de solução:



Método *Branch and Bound*

Algoritmo do Método:

1) Fazer i=0 e $Z_L = -\infty$ (p/ Maximização)

BOUND

2) Resolver o problema relaxado $P^{(i)}$, observando a partir de sua solução a possibilidade de:

se: a) $Z_i^* < Z_L$

b) $x_i^* \in$ {conjunto discreto} e $Z_i^* > Z_L \Rightarrow Z_L = Zi^*$

c) $P^{(i)}$ não tem solução

$P^{(i)}$ não ramifica

e se: todos os subproblemas tiverem sido avaliados: $Z^* = Z_L$ ⇒ Critério de parada

senão: fazer i = i+1 e retornar a (2)

senão, continuar

BRANCH

3) Ramificar, selecionando uma das variáveis com solução não inteira (xj), eliminando a região $a_1 < x_j < a_2$ (onde a_1 e a_2 são dois valores consecutivos do conjunto discreto), através da criação de dois novos subproblemas:

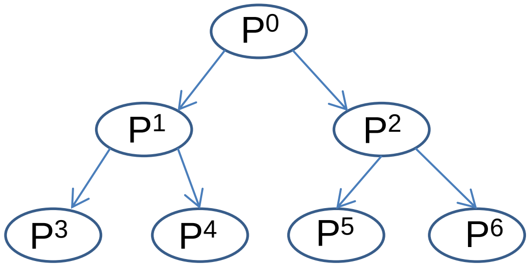
$$P^{(i+1)} = P^{(i)} \cup \{ x_j \leq a_1 \}$$

$$P^{(i+2)} = P^{(i)} \cup \{ x_j \geq a_2 \}$$

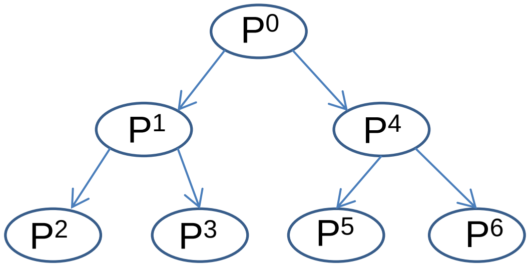
4) Fazer i = i+1 e voltar para (2)

Método ***Branch and Bound***

Algoritmo do Método – Alternativas para percorrer "árvore" de problemas:



por lateralidade



por profundidade