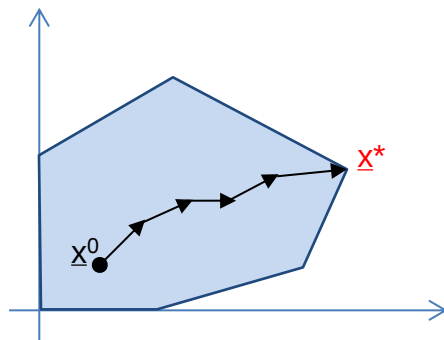


Pontos Interiores

Precursos:

- KACHIYAN - *A Polynomial Algorithm in Linear Programming* (1979) – Método dos Elipsóides: pouco efetivo
- KARMAKAR - *A New Polynomial-time Algorithm for Linear Programming* (1984)

Ideia fundamental: buscar a solução pelo “interior” da região factível

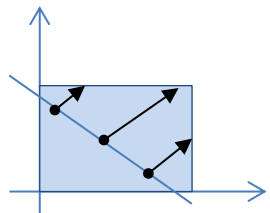


Em problemas de grande porte:

- Simplex: mais iterações mais simples
- P.I.: menos iterações mais complexas

Conceitos envolvidos:

- i) Iniciar a partir de um ponto interior da região factível;
- ii) Avançar numa direção que melhora a Função Objetivo no maior passo possível;
 - ↳ Para isso, transformar a região factível a cada iteração para manter a respectiva solução próxima do seu centro.



Pontos Interiores

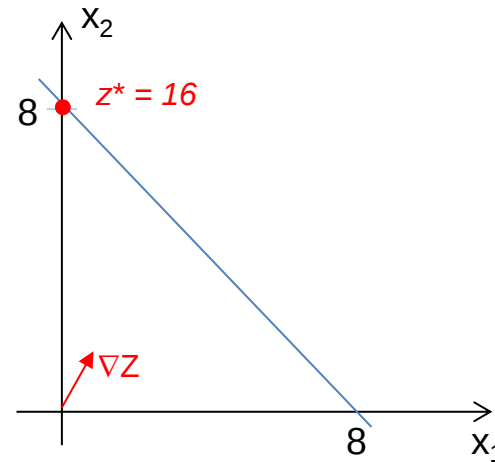
Exemplo:

$$\text{Max } Z = x_1 + 2.x_2$$

s.a.

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Acrescentando a variável de folga (x_3):

$$\text{Max } Z = x_1 + 2.x_2$$

s.a.

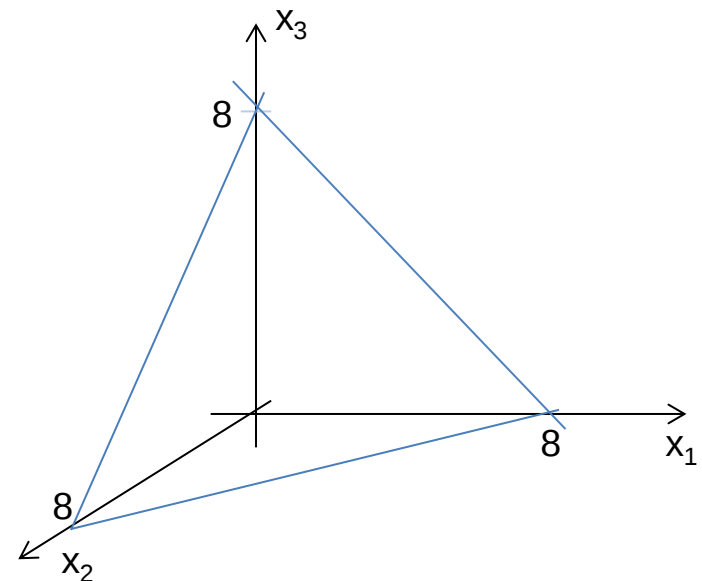
$$x_1 + x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

e matricialmente:

$$\text{Max } Z = [1 \quad 2 \quad 0][x_1 \quad x_2 \quad x_3]^t$$

$$\text{s.a.} \quad [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [8]$$

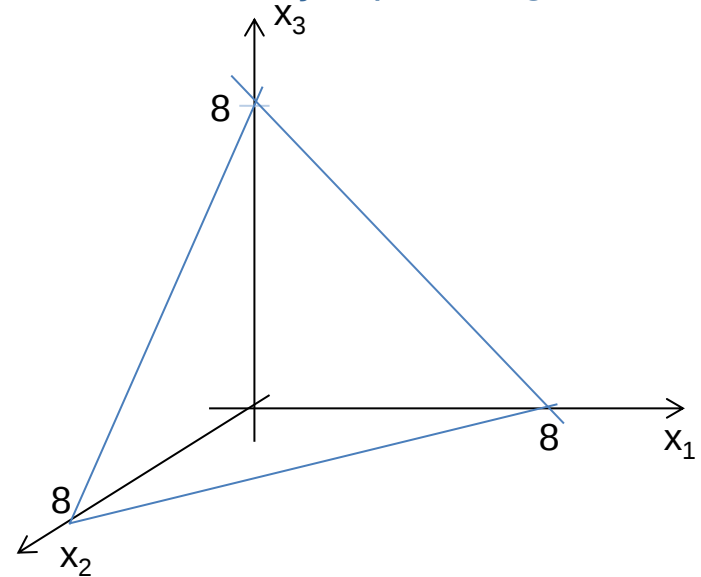


Exemplo (cont.):

$$\text{Max } Z = [1 \quad 2 \quad 0][x_1 \quad x_2 \quad x_3]^t$$

$$\text{s.a.} \quad [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [8]$$

$$\underline{x} \geq 0$$



Adotando como ponto inicial: $\underline{x} = [2 \quad 2 \quad 4]$

e avançando na direção do gradiente da F. Obj., ou seja, $\underline{c} = [1 \quad 2 \quad 0]$, chega-se a:

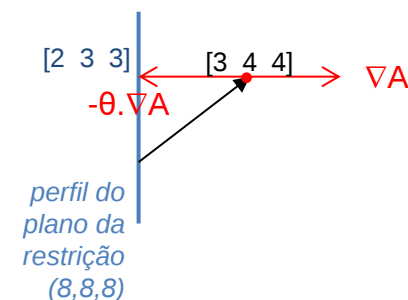
$$[2 \quad 2 \quad 4] + [1 \quad 2 \quad 0] = [3 \quad 4 \quad 4] \Rightarrow \text{infactível}$$

Para trazer para a factibilidade, deve-se mover na direção perpendicular ao plano da região factível, definido pela matriz A, no caso $[1 \quad 1 \quad 1]$, ou seja:

$$[3 \quad 4 \quad 4] - \theta \cdot [1 \quad 1 \quad 1] = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]$$

O que resulta no seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ 3 - \theta = x_1 \\ 4 - \theta = x_2 \\ 4 - \theta = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta = 1 \\ x_1 = 2 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$



Exemplo (cont.2):

Assim, para levar do ponto $[2 \ 2 \ 4]$ para o ponto factível $[2 \ 3 \ 3]$, deve-se aplicar o **Gradiente Projetado**, no caso:

$$[2 \ 2 \ 4] + [0 \ 1 \ -1] = [2 \ 3 \ 3]$$

O Gradiente Projetado é obtido através da **Matriz de Projeção (P)**, definida por:

$$P = I - A^t (A A^t)^{-1} A$$

Assim, o Gradiente Projetado fica: $\underline{c}_P = P \cdot \underline{c}$

No exemplo:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \quad \text{Matriz de Projeção (sempre simétrica)}$$

Logo:

$$\underline{c}_P = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exemplo (cont.3):

Assim, o passo na direção do Gradiente Projetado envolve:

$$x = [2 \quad 2 \quad 4] + \alpha \cdot \underline{c}_p$$

onde o coeficiente α define o tamanho do passo.

Observa-se que, nessa caso:

- para manter factibilidade: $\alpha \leq 4$ (logo $\alpha_{\max} = 4$)
- para permanecer interior: $\alpha < 4$

-
- Definido o passo máximo, deve-se agora, manter a solução (atual) centralizada (a fim de atender o *conceito (ii)*), deve-se transformar a região factível.

Para isso, muda-se a escala de cada uma das variáveis, a fim de manter a solução equidistante das suas fronteiras (restrições) no novo sistema de coordenadas.

Exemplo (cont.4):

No exemplo, para tornar a solução inicial adotada ([2 2 4]) equidistante dos limites de cada variável ($x_i = 0$), defini-se um novo sistema de coordenadas, de modo que nessa nova escala, a solução inicial fica sendo $\tilde{x} = [1 \ 1 \ 1]$.

Para isso:

$$\tilde{x}_1 = \frac{x_1}{2} \quad \tilde{x}_2 = \frac{x_2}{2} \quad \tilde{x}_3 = \frac{x_3}{4}$$

Assim, o POL no novo sistema de coordenadas fica:

$$\text{Max } Z = 2.\tilde{x}_1 + 4.\tilde{x}_2$$

s.a.

$$2.\tilde{x}_1 + 2.\tilde{x}_2 + 4.\tilde{x}_3 = 8$$

$$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3 \geq 0$$

Logo, definindo-se uma Matriz Diagonal, a partir da solução original: $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

obtém-se os coeficientes do problema nas novas coordenadas:

$$\tilde{A} = A.D = [1 \quad 1 \quad 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = [2 \quad 2 \quad 4]$$

e

$$\tilde{c} = D.c = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo (cont.5):

Da mesma forma, o Gradiente Projetado fica:

$$\tilde{\underline{c}}_P = \tilde{P} \cdot \tilde{\underline{c}} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, nessas novas coordenadas, a nova solução fica determinada por:

$$\tilde{\underline{x}}^{(1)} = \tilde{\underline{x}}^{(0)} + \frac{\alpha}{v} \tilde{\underline{c}}_P \quad \text{onde: } \begin{cases} 0 < \alpha < 1 & (\text{passo de otimização}) \\ v : \text{valor absoluto do mais negativo coeficiente de } \tilde{\underline{c}}_P \end{cases}$$

Adotando $\alpha = 0.5$:

$$\tilde{\underline{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.5}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/4 \\ 7/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

que, nas coordenadas originais vale:

$$\underline{x}^{(1)} = D \cdot \tilde{\underline{x}}^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/4 \\ 7/4 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 7/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Resumo do Algoritmo do MÉTODO AFIM-ESCALA PRIMAL de Pontos Interiores:

1) A partir de uma solução inicial interior $\underline{x}^{(k)} = [x_1, \dots, x_n]$, construir a matriz de transformação D:

$$D = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

2) Calcular A e $\underline{c}$ nas novas coordenadas, ou seja: $\tilde{A} = A.D$ e $\tilde{\underline{c}} = D.\underline{c}$

3) Calcular o Gradiente Projetado a partir da Matriz de Projeção: $P = I - \tilde{A}^t (\tilde{A} \tilde{A}^t)^{-1} \tilde{A}$

$$\tilde{\underline{c}}_P = P.\tilde{\underline{c}}$$

4) Definir o passo de otimização (α), identificar o componente negativo de $\tilde{\underline{c}}_P$ com o maior valor absoluto (v) e calcular a nova solução:

$$\tilde{\underline{x}}^{(k+1)} = \underline{e} + \frac{\alpha}{v} \tilde{\underline{c}}_P \quad \text{onde: } \underline{e} = \text{vetor unitário}$$

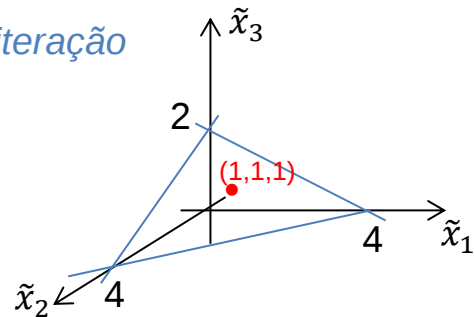
5) Calcular a solução nas coordenadas originais ($\underline{x}$):

$$\underline{x}^{(k+1)} = D.\tilde{\underline{x}}^{(k+1)}$$

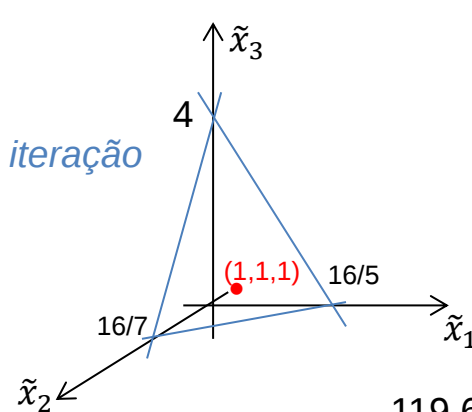
6) Caso a nova solução não mude significativamente da solução anterior (dentro da tolerância adotada), o problema CONVERGIU. Caso contrário, repetir a partir de (1).

Considerando o problema exemplo, observa-se a seguinte evolução gráfica da solução (p/ $\alpha=0.5$):

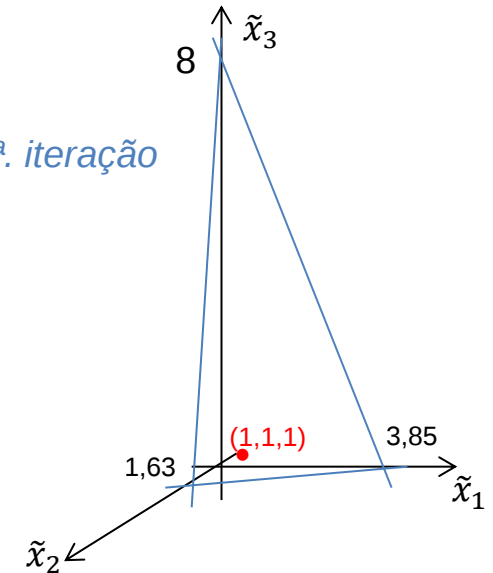
1ª. iteração



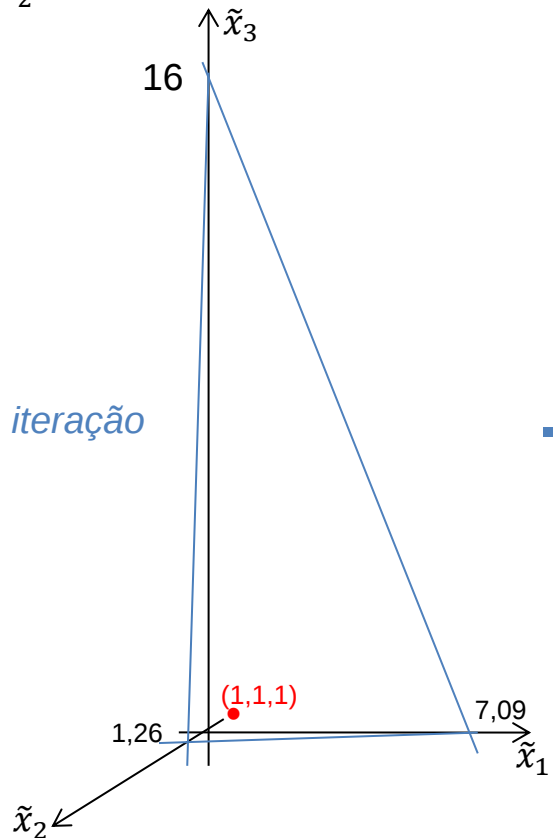
2ª. iteração



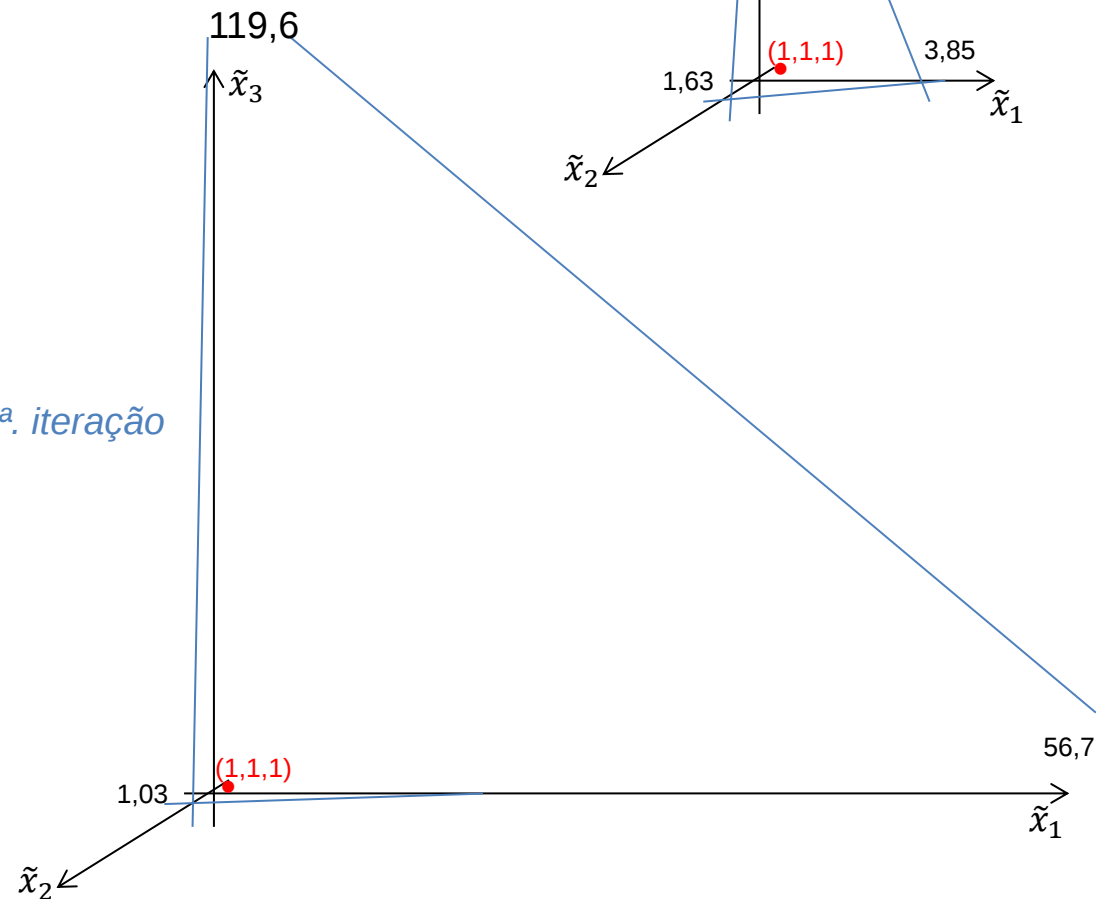
3ª. iteração



4ª. iteração



7ª. iteração



E, nas coordenadas originais:

