

Método Simplex

Lógica do Método Simplex:

⇒ Passar de Solução Básica Factível para outra Solução Básica, buscando **melhorar o valor da Função Objetivo** e **manter factibilidade**

Para isso, as condições que devem orientar esse movimento são:

- (i) a solução inicial deve ser factível;
- (ii) a próxima Solução Básica (vértice) deve ser adjacente;
- (iii) a próxima Solução Básica (vértice) deve ser factível;
- (iv) a próxima Solução Básica (vértice) deve melhorar a F. Obj.

Ver 3ª Propriedade Fundamental

Método Simplex

Colocando o Problema Exemplo no formato de “Tableau”

Forma Padrão

$$\text{Min } W = -300.x_1 - 500.x_2$$

s. a:

$$2.x_1 + s_1 = 8$$

$$x_2 + s_2 = 6$$

$$3x_1 + 2x_2 + s_3 = 18$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$



Tableau Simplex

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

Método Simplex

Tableau Simplex na Forma Preparada:

↪ A sub-matriz A^I deve ficar na forma de matriz identidade e os respectivos coeficientes da Função Objetivo (c_I) devem ser nulos.

No exemplo, o *tableau* inicial está na Forma Preparada:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	c_I
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

A^I

Observe que na Forma Preparada a Solução Básica é dada diretamente pelos coeficientes do vetor b
 No caso: $\{s_1 = 8, s_2 = 6 \text{ e } s_3 = 18\}$ (e $\{x_1 = x_2 = 0\}$)

Método Simplex

Seguindo a Lógica do Método Simplex, a partir de uma Solução Básica Factível, deve-se evoluir para outra SBF adjacente que seja factível e melhore o valor da Função Objetivo.

⇒ Para avaliar outra Solução Básica que seja **adjacente**, deve-se substituir uma (apenas uma!) das variáveis básicas por uma das variáveis não-básicas.

Assim, a escolha da variável que entra na base e a da que sai da base segue a Lógica Simplex:

- ⇒ A **melhoria do valor da F. Obj.** orienta a escolha da variável não-básica a **entrar na base:**
São candidatas a entrar na base todas as variáveis não-básicas associadas a coeficientes negativos da Função Objetivo (considerando que o POL é de Minimização)
- ⇒ A **manutenção da factibilidade** orienta a escolha da variável básica a **sair da base.**

Método Simplex

Seguindo com o exemplo, a partir do *Tableau* inicial, pode-se observar que tanto x_1 quanto x_2 são candidatos a entrar na base.

Critérios possíveis para escolha:

- escolher o mais negativo;
- escolher o primeiro negativo que aparecer (prático para problemas de grande porte)

 x_1	 x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

Método Simplex

Escolhendo x_2 para entrar na Base, deve-se transformar sua respectiva coluna em um vetor unitário via eliminação de Gauss (pivoteamento):

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

Existem assim, três possibilidades de substituição:

i) $x_2 \rightarrow s_1$

ii) $x_2 \rightarrow s_2$

iii) $x_2 \rightarrow s_3$

Método Simplex

i) Avaliando $x_2 \rightarrow s_3$ (nova Base: $\{x_2, s_1, s_2\}$)

↪ Pivoteamento em torno do elemento a_{32}

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

1ª operação: Tornar o pivô unitário: dividir todos os elementos da linha pelo pivô

$$\hat{A}_3 = \hat{A}_3 / a_{32}$$

Assim, a nova linha $\hat{A}_3$ fica: $[3/2 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1/2 \mid 9]$

Método Simplex

i) Avaliando $x_2 \rightarrow s_3$ (nova Base: $\{x_2, s_1, s_2\}$)

↪ Pivoteamento em torno do elemento a_{32}

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3/2	1	0	0	1/2	9

2ª operação: Anular os demais elementos da coluna 2.

Para anular a_{22} : $\hat{A}_2 = \hat{A}_2 - a_{22} \cdot \hat{A}_3$

$$\hat{A}_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \mid 6] - 1 \cdot [3/2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1/2 \mid 9] = [-3/2 \ 0 \ 0 \ 1 \ -1/2 \mid -3]$$

Método Simplex

i) Avaliando $x_2 \rightarrow s_3$ (nova Base: $\{x_2, s_1, s_2\}$)

↪ Pivoteamento em torno do elemento a_{32}

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
-3/2	0	0	1	-1/2	-3
3/2	1	0	0	1/2	9

2ª operação: Anular os demais elementos da coluna 2.

Para anular a_{12} : $\hat{A}_1 = \hat{A}_1 - a_{12} \cdot \hat{A}_3$

$$\hat{A}_1 = [2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \mid 8] - 0 \cdot [3/2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1/2 \mid 9] = [2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \mid 8]$$

Método Simplex

i) Avaliando $x_2 \rightarrow s_3$ (nova Base: $\{x_2, s_1, s_2\}$)

↪ Pivoteamento em torno do elemento a_{32}

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
-3/2	0	0	1	-1/2	-3
3/2	1	0	0	1/2	9

2ª operação: Anular os demais elementos da coluna 2.

Para anular c_2 : $\underline{c} = \underline{c} - c_2 \cdot \hat{A}_3$

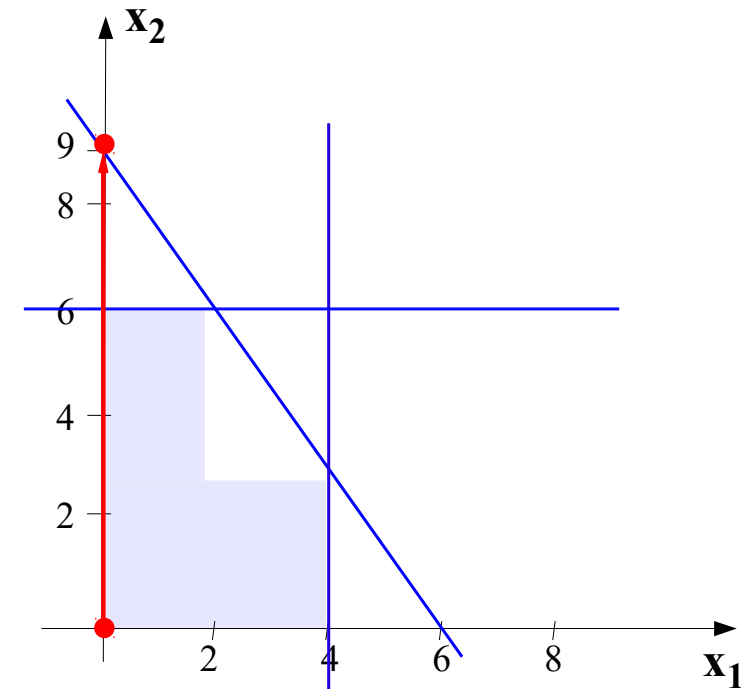
$$\underline{c} = [-300 \ -500 \ 0 \ 0 \ 0 \mid W] - (-500) \cdot [3/2 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1/2 \mid 9] = [450 \ 0 \ 0 \ 0 \ 250 \mid W+4500]$$

Método Simplex

i) Avaliando $x_2 \rightarrow s_3$ (nova Base: $\{x_2, s_1, s_2\}$)

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
450	0	0	0	250	$W+4500$
2	0	1	0	0	8
-3/2	0	0	1	-1/2	-3
3/2	1	0	0	1/2	9

Solução Básica: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 9 \\ s_1 = 8 \\ s_2 = -3 \\ s_3 = 0 \end{cases}$ **infactível**



Método Simplex

ii) Avaliando $x_2 \rightarrow s_2$ (nova Base: $\{x_2, s_1, s_3\}$)

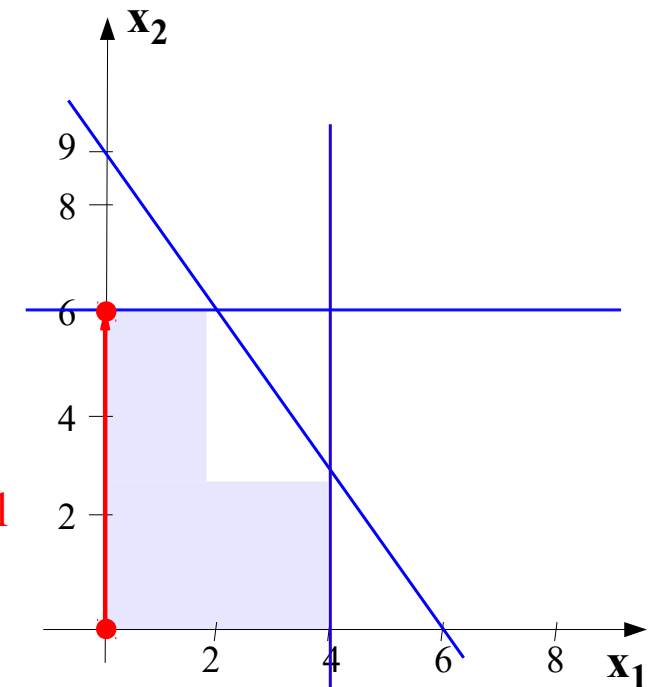
↪ Pivoteamento em torno do elemento a_{22}

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

Realizando as mesmas operações resulta:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	0	0	500	0	W+3000
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	0	0	-2	1	6

factível



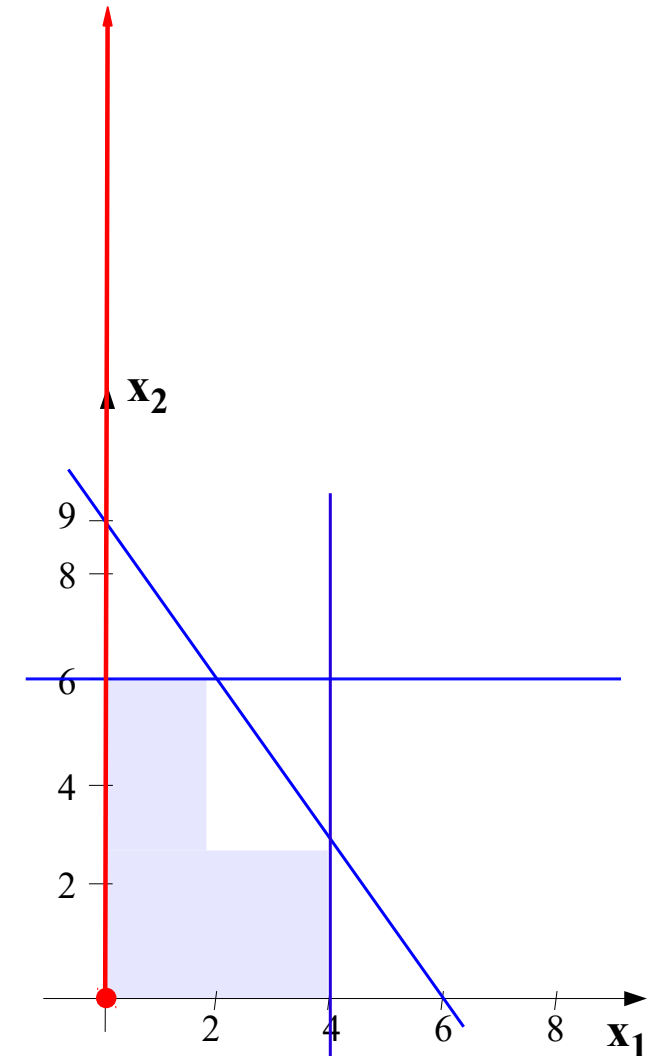
Método Simplex

iii) Avaliando $x_2 \rightarrow s_1$ (nova Base: $\{x_2, s_2, s_3\}$)

↪ Pivoteamento em torno do elemento a_{12}

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

Como o pivô $a_{12} = 0$ resulta numa SB infinita



Método Simplex

Critério para escolha da variável que deve sair da base: **Manter factibilidade**

↪ Escolher como pivô (a_{ik}) o elemento associado à linha i ,
cuja razão b_i/a_{ik} apresenta o menor valor.

No exemplo:

$$b_1/a_{12} = 8/0 = \infty$$

$$b_2/a_{22} = 6/1 = 6$$

$$b_3/a_{32} = 18/2 = 9$$

Método Simplex

A partir da Solução Básica anterior prossegue-se, observando que apenas x_1 é candidata a entrar na base:



x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	0	0	500	0	W+3000
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	0	0	-2	1	6

Método Simplex

A partir da Solução Básica anterior prossegue-se, observando que apenas x_1 é candidata a entrar na base:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	0	0	500	0	W+3000
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	0	0	-2	1	6

Determinação da variável que deve sair da base, preservando factibilidade:

$$b_1/a_{11} = 8/2 = 4$$

$$b_2/a_{21} = 6/0 = \infty$$

$$b_3/a_{31} = 6/3 = 2$$

Método Simplex

A partir da Solução Básica anterior prossegue-se, observando que apenas x_1 é candidata a entrar na base:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	0	0	500	0	$W+3000$
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	0	0	-2	1	6

Pivoteando em torno de a_{31} x_1 entra na base no lugar de s_3 :

Solução ótima: $\underline{c} \geq 0 \Leftarrow \text{CRITÉRIO DE PARADA}$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	300	100	$W+3600$
0	0	1	$4/3$	$-2/3$	4
0	1	0	1	0	6
1	0	0	$-2/3$	$1/3$	2

Solução ótima:

$$\begin{array}{ll} x_1 = 2 & s_1 = 4 \\ x_2 = 6 & s_2 = 0 \\ & s_3 = 0 \end{array}$$

Solução factível: $\underline{b} \geq 0$

Método Simplex

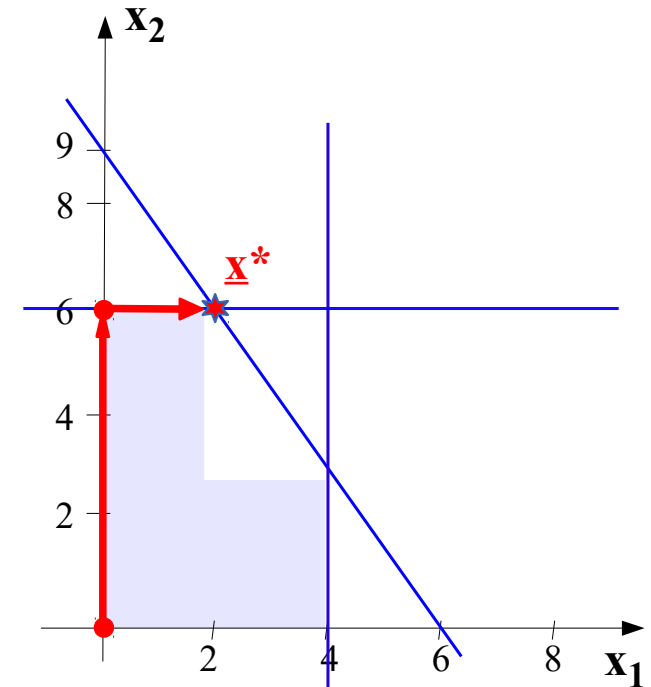
$x_2 \rightarrow s_2$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

$x_1 \rightarrow s_3$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	0	0	500	0	W+3000
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	0	0	-2	1	6

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	300	100	W+3600
0	0	1	4/3	-2/3	4
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2



Solução ótima:

$$x_1^* = 2 \quad s_1^* = 4$$

$$x_2^* = 6 \quad s_2^* = 0$$

$$s_3^* = 0$$

$$W+3600 = 0 \Rightarrow W^* = -3600$$

$$Z = -W \Rightarrow Z^* = +3600$$

Método Simplex

Algoritmo Simplex Resumido:

- 0) Colocar o POL na Forma Preparada (p/ uma base inicial factível)
- 1) Verificar se a Solução Básica Factível é Ótima, senão Continuar;
- 2) Determinar a Variável Não-Básica a entrar na Base (coluna k);
- 3) Determinar a Variável Básica a sair da Base (linha i);
- 4) Determinar a nova Solução Básica Factível, por pivotamento em torno de a_{ik} , e voltar ao passo (1).