Método Simplex

Tipos de Soluções possíveis num POL – observando o *Tableau* Final

$\underline{c}_J$	$\underline{c}_I$	FO
A_J	A_I	$\underline{b}$

a) **Solução Única**

- Todas os coeficientes das variáveis não-básicas da F. Objetivo ($\underline{c}_J$) forem ≥ 0;
- Todos os elementos do vetor $\underline{b}$ forem ≥ 0
  (se algum elemento de $\underline{b}$ for $= 0 \Rightarrow$ Solução *Degenerada*)

Método Simplex

Tipos de Soluções possíveis num POL – observando o *Tableau* Final

b) **Solução Múltipla**

- Todos os elementos do vetor $\underline{b}$ forem ≥ 0
  (se algum elemento de $\underline{b}$ for $= 0 \Rightarrow$ Solução Degenerada)
- Algum coeficiente das variáveis não-básicas da F. Objetivo ($\underline{c}_J$) for = 0;

Ex.: No POL dos "armários" se a F.Obj. fosse $W = -300\, x_1 - 200.x_2$

Tableau Final

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	0	100	W+1800
0	0	1	4/3	-2/3	4
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2

Método Simplex

Tipos de Soluções possíveis num POL – observando o *Tableau* Final

b) **Solução Múltipla**

Ex.: No POL dos "armários" se a F.Obj. fosse W = -300 x_1 – 200.x_2

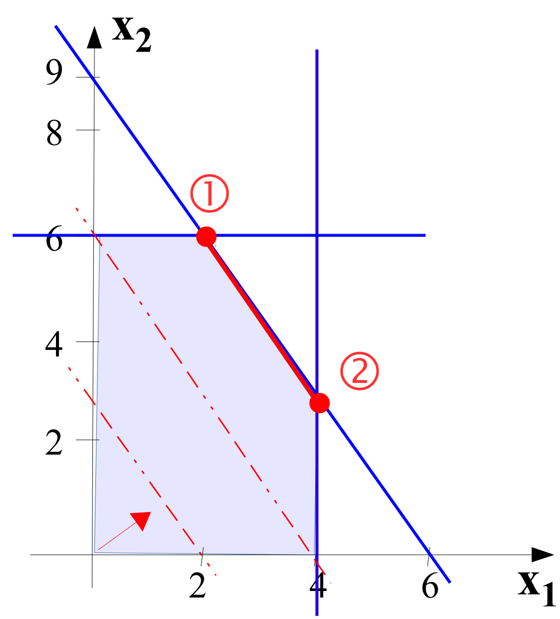
Tableaus Finais:

①

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	0	100	W+1800
0	0	1	4/3	-2/3	4
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2

②

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	0	100	W+1800
0	0	3/4	1	-1/2	3
0	1	-3/4	0	1/2	3
1	0	1/2	0	0	4



Solução Ótima completa:

$x^* = \alpha_1.[2, 6] + \alpha_2.[4, 3]\ ,\ \alpha_1+\alpha_2 = 1$

Método Simplex

Tipos de Soluções possíveis num POL – observando o *Tableau* Final

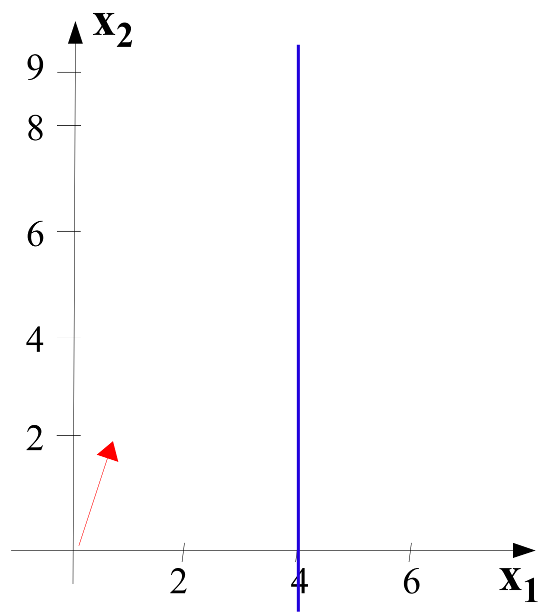
c) **Solução Ilimitada**

- Todos os coeficientes na coluna pivô ≤ 0

Ex.: No POL dos "armários" se as restrições (ii) e (iii) foram desconsideradas.

Tableau Final

x_1	x_2	s_1	
0	-500	150	W+1200
1	0	1/2	4



Método Simplex

Tipos de Soluções possíveis num POL – observando o *Tableau* Final

d) **Solução Inexistente**

- Fase I não anula todos as variáveis artificiais.

Ex.: No POL dos "armários" se a restrição (ii) passar a ser $x_2 \geq 10$

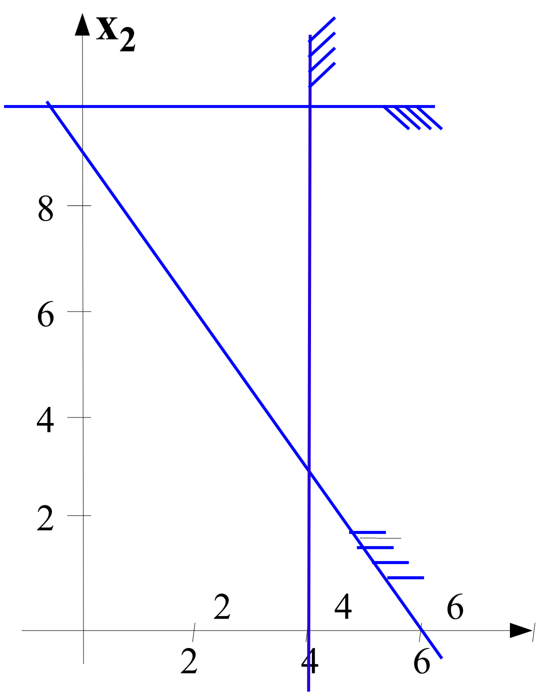


Tableau Final da Fase I

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	a	
3/2	0	0	1	1/2	0	$\Phi - 1$
2	0	1	0	0	0	8
-3/2	0	0	-1	-1/2	1	1
3/2	1	0	0	1/2	0	9

Método Simplex

Particularidades quanto ao *Tableau* Simplex

A partir do exemplo:

$$\text{Min} \;\; W = -300.\mathbf{x_1} - 500.\mathbf{x_2}$$

s. a:

$$\begin{aligned} 2.x_1 \qquad &\leq 8 \\ \mathbf{x_2} &\leq 6 \\ 3\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} &\leq 18 \\ \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{Min} \;\; \underbrace{[-300 \; -500]}_{\mathbf{c}} \, [\mathbf{x_1} \;\; \mathbf{x_2}]^t$$

s. a:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

$$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \geq 0$$

Tableau inicial:

x_1	x_2	s_1	s_2 **y**	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

S

Método Simplex

Particularidades quanto ao *Tableau* Simplex

Tableau inicial:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

$\underline{\mathbf{y}}$

S

Genericamente:

$\underline{\mathbf{c}}_{[n]}$	$\underline{\mathbf{0}}_{[m]}$	W
$\mathbf{A}_{[m \times n]}$	$\mathbf{I}_{[m \times m]}$	$\underline{\mathbf{b}}_{[m]}$

$\underline{\mathbf{t}}$

T

Método Simplex

Particularidades quanto ao *Tableau* Simplex – Operação de Pivoteamente

No exemplo, a partir do *Tableau* inicial (pivoteamento em torno de a_{22}):

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

nova linha c = $-c_2/a_{22}$ x linha pivô + linha c

nova linha 1 = $-a_{12}/a_{22}$ x linha pivô + linha 1

(pivô) nova linha 2 = $1/a_{22}$ x linha pivô

nova linha 3 = $-a_{32}/a_{22}$ x linha pivô + linha 3

após pivoteamento:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	0	0	500	0	W+3000
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	0	0	-2	1	6

Observar que:

$-c_2/a_{22} = -(-500)/1 = 500$

$-a_{12}/a_{22} = -0/1 = 0$

$1/a_{22} = 1/1 = 1$

$-a_{32}/a_{22} = -2/1 = -2$

Método Simplex

Particularidades quanto ao *Tableau* Simplex – Operação de Pivoteamente

No exemplo, a partir do *Tableau* inicial:

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

S^0

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
-300	0	0	500	0	W+3000
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	0	0	-2	1	6

S^1

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	300	100	W+3600
0	0	1	4/3	-2/3	4
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2

S^2

Observe que:

$$S^1 = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & \boxed{-2} & 1 \end{pmatrix} . S^0$$

$$S^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \boxed{-2/3} \\ 0 & 1 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & \boxed{1/3} \end{pmatrix} . S^1$$

Generalizando:

$$S^k = \begin{pmatrix} \textit{Matriz com Fatores do Pivoteamento } k \end{pmatrix} . S^{k-1}$$

Método Simplex

Particularidades quanto ao *Tableau* Simplex – Operação de Pivoteamente

Como no exemplo:

$$S^2 = S^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} . S^0$$

Assim, S* armazena as informações de todo o processo de pivoteamento

Então, generalizando para o *Tableau*:

$$S^* . T^0 = T^*$$

$$S^* . [\, A \;\vdots\; I \;|\; \underline{b} \,] = [\, S^*.A \;\vdots\; S^* \;|\; S^*.\underline{b} \,] = T^*$$

Método Simplex

Particularidades quanto ao *Tableau* Simplex – Operação de Pivoteamente

Da mesma forma para a linha da F. Obj., a partir do *Tableau* inicial:

x_1	x_2	s_1	s_2	$\underset{\sim}{y}^0$ s_3	
-300	-500	0	0	0	W
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	2	0	0	1	18

x_1	x_2	s_1	s_2	$\underset{\sim}{y}^1$ s_3	
-300	0	0	500	0	W+3000
2	0	1	0	0	8
0	1	0	1	0	6
3	0	0	-2	1	6

x_1	x_2	s_1	s_2	$\underset{\sim}{y}^2$ s_3	
0	0	0	300	100	W+3600
0	0	1	4/3	-2/3	4
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2

Observe que:

$$\underset{\sim}{y}^1 = \underset{\sim}{y}^0 + [\ 0\ \ \boxed{500}\ \ 0\ ] . S^0$$

$$\underset{\sim}{y}^2 = \underset{\sim}{y}^1 + [\ 0\ \ 0\ \ \boxed{100}\ ] . S^1$$

Generalizando:

$$\underset{\sim}{y}^k = \underset{\sim}{y}^{k-1} + \left(\begin{array}{c}\textit{Vetor com}\\ \textit{Fator do}\\ \textit{Pivoteamento}\\ k\end{array}\right) . S^{k-1}$$

Método Simplex

Particularidades quanto ao *Tableau* Simplex – Operação de Pivoteamente

Estendendo a ideia para o *Tableau* ótimo:

$$\underline{y}^2 = \underline{y}^* = \overbrace{\underline{y}^0 + [\ 0\ \ 500\ \ 0\ ]\ .\ S^0}^{\underline{y}^1} + [\ 0\ \ 0\ \ 100\ ] \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} .\ S^0}^{S^1}$$

$$\underline{y}^* = \underline{y}^0 + \underbrace{\left\{ [\ 0\ \ 500\ \ 0\ ] + [\ 0\ \ 0\ \ 100\ ] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right\}}\ .\ S^0$$

$$\underline{y}^* = \underline{y}^0 + \underbrace{[\ 0\ \ 300\ \ 100\ ]}_{\underline{y}^*}\ .\ S^0$$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
0	0	0	300	100	W+3600
0	0	1	4/3	-2/3	4
0	1	0	1	0	6
1	0	0	-2/3	1/3	2

Método Simplex

Particularidades quanto ao *Tableau* Simplex – Operação de Pivoteamente

Generalizando para toda a linha relativa à F. Obj. (vetor $\underline{t}$):

$$\underline{t}^{*} = \underline{t}^{0} + \underline{y}^{*} \, . \, T^{0}$$

$$[\ \underline{c} \mid \underline{0} \mid W\ ] + \underline{y}^{*} . [\ A \mid I \mid \underline{b}\ ] = [\ \underline{c} + \underline{y}^{*}.A \mid \underline{y}^{*} \mid W + \underline{y}^{*}.\underline{b}\ ] = \underline{t}^{*}$$

x_1	x_2	s_1	s_2	s_3		
0	0	0	300	100	W+3600	$\underline{t}^{*}$
0	0	1	4/3	-2/3	4	
0	1	0	1	0	6	
1	0	0	-2/3	1/3	2	

Checando:

$$\underline{c} + \underline{y}^{*}.A = [-300 \ \ -500] + [0 \ \ 300 \ \ 100] \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = [\ 0 \ \ \ 0]$$

$$\underline{y}^{*}.\underline{b} = [0 \ \ \ 300 \ \ 100] \, . \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = 3600 = w^{*} = \underline{y}^{*}.\underline{b}$$

Método Simplex

Particularidades quanto ao *Tableau* Simplex – Operação de Pivoteamente

Então, para determinar a solução final (Tableau ótimo) basta conhecer:

- **A** , **b** , **c** do Problema (Tableau inicial) e;
- **S*** e **y*** (Tableau final)

Assim, a partir de uma solução, é possível avaliar novamente o problema, após o mesmo sofrer "pequenas" alterações $\Rightarrow$ **Análise Pós-Otimização**