Método Simplex Revisado

Considerando o POL na Forma Preparada:

$$\text{Min} \quad W = \underline{c}' \, . \, \underline{x}$$

s.a.

$$A \, . \, \underline{x} = \underline{b}$$

$$\underline{x} \geq 0$$

Pode-se identificar o sistema de equações:

$$W - \underline{c}' \, . \, \underline{x} = 0$$

$$A \, . \, \underline{x} = \underline{b}$$

Do *Tableau* inicial:

Variáveis não-básicas			Variáveis Básicas			
x_1	...	x_n	x_{n+1}	...	x_{n+m}	
c_1	...	c_n	0	...	0	W
a_{11}	...	a_{1n}	1	...	0	b_1
$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
a_{m1}	...	a_{mn}	0	...	1	b_m

Na forma matricial:

$$\begin{array}{c} 1 \\ m \end{array}\left[\begin{array}{c|c} \underline{c} & \underline{0} \\ \hline A & I \end{array}\right]_{\substack{\\ n \quad\quad m}} \left[\begin{array}{c} \underline{x}_{NB} \\ \hline \underline{x}_B \end{array}\right]\begin{array}{c} n \\ m \end{array} = \left[\begin{array}{c} W \\ \hline \underline{b} \end{array}\right]\begin{array}{c} 1 \\ m \end{array}$$

Método Simplex Revisado

Sabendo que, a cada iteração, a solução do **problema** é obtida **anulando** as variáveis **não-básicas**:

$$\underline{x}_B = B^{-1} \, . \, \underline{b} \quad \Rightarrow \quad B . \, \underline{x}_B = \underline{b}$$

onde B: matriz formada pelas colunas associadas às ***Var. Básicas***

e da mesma forma:

$$W = \underline{c}_B . \, \underline{x}_B$$

onde $\underline{c}_B$: vetor dos coeficientes associados às ***Var. Básicas*** *da F. Obj.*

Logo:

$$W - \underline{c}_B \, B^{-1} \, \underline{b} = 0$$

Assim, matricialmente, tem-se:

$$\begin{array}{c} 1 \\ m \end{array} \begin{pmatrix} W - \underline{c}_B \, B^{-1} \, \underline{b} \\ \hline B^{-1} \, \underline{b} \end{pmatrix} = \begin{array}{c} 1 \\ m \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} 1 & -\underline{c}_B \, B^{-1} \\ \hline \underline{0} & B^{-1} \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} 1 \quad & \quad m \end{array} \end{array} \begin{pmatrix} W \\ \hline \underline{b} \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ m \end{array}$$

Método Simplex Revisado

Deve-se aplicar o mesmo produto ao lado esquerdo do sistema de equações:

$$\begin{array}{c} 1 \\ m \end{array}\underset{\begin{array}{cc} 1 & m \end{array}}{\begin{pmatrix} 1 & -\underline{c}_B B^{-1} \\ \underline{0} & B^{-1} \end{pmatrix}} \underset{\begin{array}{cc} n & m \end{array}}{\begin{pmatrix} \underline{c} & \underline{0} \\ A & I \end{pmatrix}} = \underset{\begin{array}{cc} n & m \end{array}}{\begin{pmatrix} \underline{c} - \underline{c}_B B^{-1}.A & -\underline{c}_B B^{-1} \\ B^{-1}.A & B^{-1} \end{pmatrix}}$$

Logo, a cada iteração, tem-se a seguinte atualização no *Tableau*:

$$\begin{array}{c|c|c|c|} 1 & \underline{c} - \underline{c}_B B^{-1}.A & -\underline{c}_B B^{-1} & W - \underline{c}_B B^{-1} \underline{b} \\ \hline m & B^{-1}.A & B^{-1} & B^{-1} \underline{b} \\ \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{n} & \multicolumn{1}{c}{m} & \multicolumn{1}{c}{1} \end{array}$$

Como se observa, cada Tableau depende apenas das informações do Tableau original (inicial), isto é, de A, $\underline{b}$, $\underline{c}$ *e da atualização (a cada iteração) apenas de* B *e* $\underline{c}_B$.

Método Simplex Revisado

Vantagens dessa abordagem:

- Como, normalmente, n >> m e o Simplex tipicamente chega à solução após 1,5.m pivoteamentos, muitas das (n-m) colunas não participam diretamente do processo, mas mesmo assim são atualizadas no Simplex convencional.

- Assim, com o Simplex Revisado, obtém-se um processo de solução mais eficiente, com grande economia de cálculo e memória.

Método Simplex Revisado

Aplicando ao exemplo “dos armários”:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = [-300 \ \ -500]$$

Situação inicial:

Base inicial: $\{s_1, s_2, s_3\}$

$$\underline{c}_B^{(1)} = [\,0 \quad 0 \quad 0\,]$$

$$B^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Método Simplex Revisado

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = [-300 \quad -500]$$

1ª iteração:

Calcular o vetor multiplicador $-\underline{c}_B.B^{-1} = \Pi$

$$\Pi^{(1)} = -\underline{c}_B{}^{(1)}.(B^{(1)})^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Calcular o novo $\underline{c}$:

$$\underline{c}^{(1)} = \underline{c} \underbrace{- \underline{c}_B{}^{(1)}.(B^{(1)})^{-1}}_{\Pi^{(1)}}.A$$

$$= [-300 \quad -500] + [0 \quad 0 \quad 0].\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = [-300 \quad -500]$$

Como $\underline{c}^{(1)} \leq 0$, não é ótimo $\Rightarrow$ mudar base

Método Simplex Revisado

1^a iteração (cont.):

Escolhendo x_1 para entrar na Base, define-se a variável que deve sair da Base:

$$\text{mínimo}\{\, b_1/a_{11} \,,\, b_2/a_{21} \,,\, b_3/a_{31} \,\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = [-300 \;\; -500]$$

Atualização da coluna A_1 (relativa à variável x_2) e do vetor $\underline{b}$:

$$[A_1]^{(1)} = (B^{(1)})^{-1} . [A_1] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}^{(1)} = (B^{(1)})^{-1} . \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Logo, mínimo$\{\, 8/2 \,,\, 6/0 \,,\, 18/3 \,\}$ $\Rightarrow x_1 \rightarrow s_1$

Assim, a nova Base é: $BASE^{(2)} = \{x_1 \,,\, s_2 \,,\, s_3\}$ e: $\underline{c}_B{}^{(2)} = \begin{array}{ccc} x_1 & s_2 & s_3 \\ [\,-300 & 0 & 0\,] \end{array}$

$$B^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Método Simplex Revisado

2ª iteração:

Calcular o vetor multiplicador:

$$\Pi^{(2)} = -\underline{c}_B^{(2)}.(B^{(2)})^{-1} = -[-300\ 0\ \ 0]\ .\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = [150\ \ 0\ \ 0]$$

Calcular o novo $\underline{c}$:

$$\underline{c}^{(2)} = \underline{c} + \Pi^{(2)}.A$$

$$= [-300\ \ -500] + [150\ \ 0\ \ \ 0].\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = [0\ \ \ \ -500]$$

não é ótimo ⇒ mudar base

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = [-300\ \ -500]$$

Método Simplex Revisado

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} \quad \underline{c} = [-300 \;\; -500]$$

2ª iteração (cont.):

Como x_2 deve entrar na Base, define-se a variável que deve sair da Base:

$$\text{mínimo}\{\, b_1/a_{12} \,,\, b_2/a_{22} \,,\, b_3/a_{32} \,\}$$

Atualização da coluna A_2 (relativa à variável x_2) e do vetor $\underline{b}$:

$$[A_2]^{(2)} = (B^{(2)})^{-1}.[A_2] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}^{(2)} = (B^{(2)})^{-1}.\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Logo, mínimo$\{\, 4/0 \,,\, 6/1 \,,\, 6/2 \,\}$ $\Rightarrow x_2 \rightarrow s_3$

Assim, a nova Base é: $BASE^{(3)} = \{x_1 \,,\, s_2 \,,\, x_2\}$ e: $\underline{c}_B^{(3)} = \begin{array}{ccc} x_1 & s_2 & x_2 \\ [\,-300 & 0 & -500\,] \end{array}$

$$B^{(2)} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & s_2 & x_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Método Simplex Revisado

3ª iteração:

Calcular o vetor multiplicador:

$$\Pi^{(3)} = -\underline{c}_B{}^{(3)}.(B^{(3)})^{-1} = -[-300 \quad 0 \quad -500] . \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = [-225 \quad 0 \quad 250]$$

(≤ 0)

Calcular o novo $\underline{c}$:

$$\underline{c}^{(3)} = \underline{c} + \Pi^{(3)}.A$$

$$= [-300 \quad -500] + [-225 \quad 0 \quad 250]. \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = [\ 0 \quad 0\ ]$$

não é ótimo ⇒ mudar base

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = [-300 \quad -500]$$

Método Simplex Revisado

3ª iteração (cont.):

Como s_1 deve entrar na Base, define-se a variável que deve sair da Base:

$$\text{mínimo}\{\, b_1/a_{13}\,,\ b_2/a_{23}\,,\ b_3/a_{33}\,\}$$

Atualização da coluna A_3 (relativa à variável s_1) e do vetor $\underline{b}$:

$$[A_3]^{(3)} = (B^{(3)})^{-1}.[A_3] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}75 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}^{(3)} = (B^{(3)})^{-1}.\underline{b} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Logo, mínimo$\{\, 4/0{,}5\ ;\ 3/0{,}75\,\}$ $\Rightarrow s_1 \rightarrow s_2$

Assim : $\text{BASE}^{(4)} = \{x_1\,,\ s_1\,,\ x_2\}$ e:

$$\begin{array}{cccc} & x_1 & s_1 & x_2 \\ \underline{C}_B^{(4)} = [& -300 & 0 & -500\ ] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} x_1 & s_1 & x_2 \end{array} \\ B^{(4)} = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} \qquad \underline{c} = [-300\ \ -500]$$

Método Simplex Revisado

4ª iteração:

Calcular o vetor multiplicador:

$$\Pi^{(4)} = -\underline{c}_B^{(4)}.(B^{(4)})^{-1} = -[-300 \quad 0 \quad -500] \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = [0 \quad 300 \quad 100]$$

(≥ 0)

Calcular o novo $\underline{c}$:

$$\underline{c}^{(4)} = \underline{c} + \Pi^{(4)}.A$$

$$= [-300 \quad -500] + [0 \quad 300 \quad 100]. \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = [\,0 \quad 0\,]$$

(≥ 0) ***ótimo !***

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\underline{c} = [-300 \quad -500]$$

Método Simplex Revisado

Assim, a Solução fica:

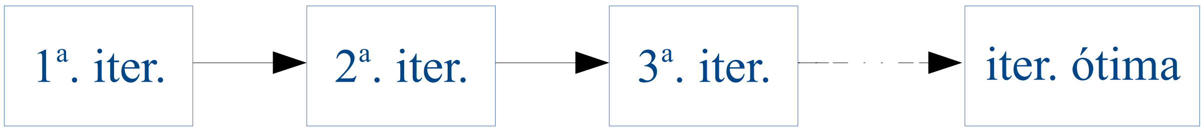
$$\underline{b}^* = (B^{(4)})^{-1} . \underline{b} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} x_1 \\ s_1 \\ x_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 2 & s_1^* = 4 \\ x_2^* = 6 & s_2^* = 0 \\ & s_3^* = 0 \end{cases}$$

E o valor ótimo da Função Objetivo:

$$\underline{c}_B^{(4)}.(B^{(4)})^{-1} . \underline{b} = [\,-300 \;\; 0 \;\; -500] \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix} = -3600$$

Método Simplex Revisado

- Simplex Convencional



- Simplex Revisado