Dualidade

A cada Problema (Primal) há um correspondente Problema Dual (o par Primal-Dual).

Problema Primal (PP) $\leftrightarrow$ Problema Dual (PD)

Correlação PP $\leftrightarrow$ PD

	Problema de Minimização	Problema de Maximização	
Variável	≥ 0	≤ 0	Restrição
	≤ 0	≥ 0	
	irrestrita	$= 0$	
Restrição	≥ 0	≥ 0	Variável
	≤ 0	≤ 0	
	$= 0$	irrestrita	

Dualidade

Considerando o POL "dos armários":

Maximizar: $Z = 300.\mathbf{x_1} + 500.\mathbf{x_2}$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} 2.\mathbf{x_1} \quad\quad &\le 8 \\ \mathbf{x_2} &\le 6 \\ 3\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} &\le 18 \\ \mathbf{x_1} &\ge 0 \\ \mathbf{x_2} &\ge 0 \end{aligned}$$

Minimizar: $W = 8.\mathbf{y_1} + 6.\mathbf{y_2} + 18.\mathbf{y_3}$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} 2.\mathbf{y_1} \quad\quad + 3.\mathbf{y_3} &\ge 300 \\ \mathbf{y_2} + 2.\mathbf{y_3} &\ge 500 \\ \mathbf{y_1} &\ge 0 \\ \mathbf{y_2} &\ge 0 \\ \mathbf{y_3} &\ge 0 \end{aligned}$$

	Min	Max	
	≥ 0	≤ 0	
Variável	≤ 0	≥ 0	Restrição
	irrestrita	$= 0$	
	≥ 0	≥ 0	
Restrição	≤ 0	≤ 0	Variável
	$= 0$	irrestrita	

Dualidade

Considerando o POL “dos armários”:

Maximizar: $Z = 300.\mathbf{x_1} + 500.\mathbf{x_2}$ *(lucro)*

Sujeito a:

$$\left.\begin{array}{rcr} 2.\mathbf{x_1} & \leq & 8 \\ \mathbf{x_2} & \leq & 6 \\ 3\mathbf{x_1} + 2\mathbf{x_2} & \leq & 18 \end{array}\right\} \textit{(tempo de produção)}$$

$$\mathbf{x_1} \geq 0$$
$$\mathbf{x_2} \geq 0$$

Problema Primal

Minimizar: $W = 8.\mathbf{y_1} + 6.\mathbf{y_2} + 18.\mathbf{y_3}$ *(tempo de produção)*

Sujeito a:

$$\left.\begin{array}{rcr} 2.\mathbf{y_1} + 3.\mathbf{y_3} & \geq & 300 \\ \mathbf{y_2} + 2.\mathbf{y_3} & \geq & 500 \end{array}\right\} \textit{(lucro)}$$

$$\mathbf{y_1} \geq 0$$
$$\mathbf{y_2} \geq 0$$
$$\mathbf{y_3} \geq 0$$

Problema Dual

Dualidade

Considerando o POL "dos armários" matricialmente:

$$\text{Max } Z = [300 \quad 500] \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{pmatrix}$$

$$\text{S. a: } \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x_1} \\ \mathbf{x_2} \end{pmatrix} \geq 0$$

$$\text{Min } W = [\mathbf{y_1} \quad \mathbf{y_2} \quad \mathbf{y_3}] \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$$\text{S. a: } [\mathbf{y_1} \quad \mathbf{y_2} \quad \mathbf{y_3}] \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \geq [300 \quad 500]$$

$$[\mathbf{y_1} \quad \mathbf{y_2} \quad \mathbf{y_3}] \geq 0$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} &\text{Max } Z = \underline{c}\,\underline{x} \\ &\text{s.a. } A\,\underline{x} \leq \underline{b} \\ &\qquad \underline{x} \geq 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\text{Min } W = \underline{y}\,\underline{b} \\ &\text{s.a. } \underline{y}\,A \geq \underline{c} \\ &\qquad \underline{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Obs.: os vetores $\underline{b}$ e $\underline{c}$ trocam de posição

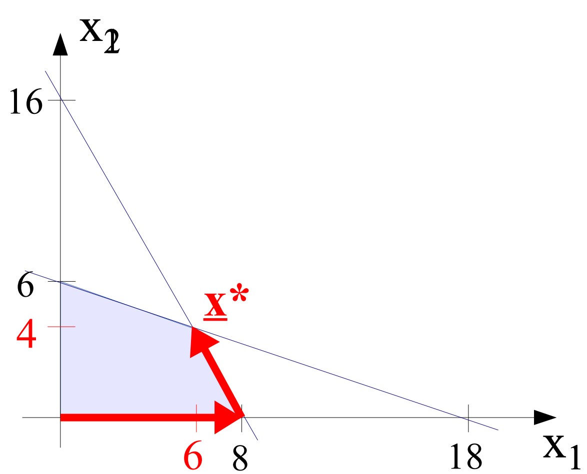
Dualidade

Outro exemplo (para avaliação gráfica):

Maximizar: $Z = 4.\mathbf{x_1} + \mathbf{3}.\mathbf{x_2}$

Sujeito a:

$$2x_1 + \mathbf{x_2} \leq 16$$
$$\mathbf{x_1} + \mathbf{3x_2} \leq 18$$
$$\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \geq 0$$



Solução via *Tableau* simplex:

x_1	x_2	s_1	s_2	
-4	-3	0	0	-Z
2	1	1	0	16
1	3	0	1	18
0	-1	2	0	-Z+32
1	1/2	1/2	0	8
0	5/2	-1/2	1	10
0	0	9/5	2/5	-Z+36
1	0	3/5	-1/5	6
0	1	-1/5	2/5	4

Dualidade

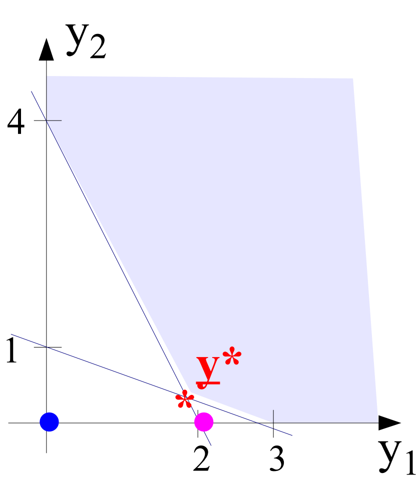
Outro exemplo (para avaliação gráfica) (cont.):

O correspondente Problema Dual:

Minimizar: $W = 16\,\mathbf{y_1} + 18\,\mathbf{y_2}$

Sujeito a:

$$2\,\mathbf{y_1} + \mathbf{y_2} \geq 4$$
$$\mathbf{y_1} + 3\mathbf{y_2} \geq 3$$
$$\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \geq 0$$



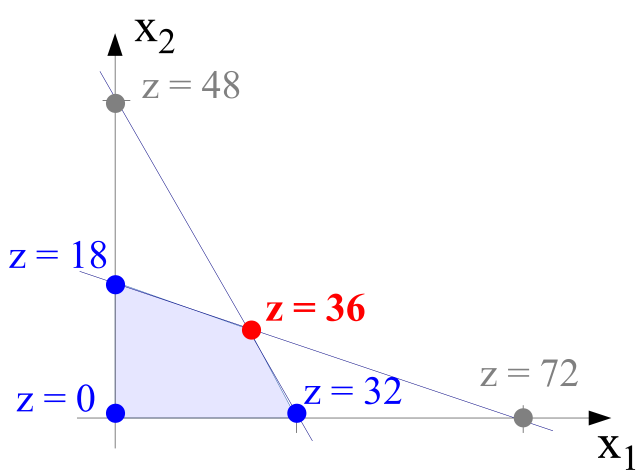
Solução via *Tableau* simplex do P. P.

x_1	x_2	s_1	s_2		
		$\underline{y}^1$			
-4	-3	0	0	-Z	$W^1 = 0$
2	1	1	0	16	
1	3	0	1	18	
		$\underline{y}^2$			
0	-1	2	0	-Z+32	$W^2 = 32$
1	1/2	1/2	0	8	
0	5/2	-1/2	1	10	
		$\underline{y}^3 = \underline{y}^*$			
0	0	9/5	2/5	-Z+36	$W^3 = W^* = 36$
1	0	3/5	-1/5	6	
0	1	-1/5	2/5	4	

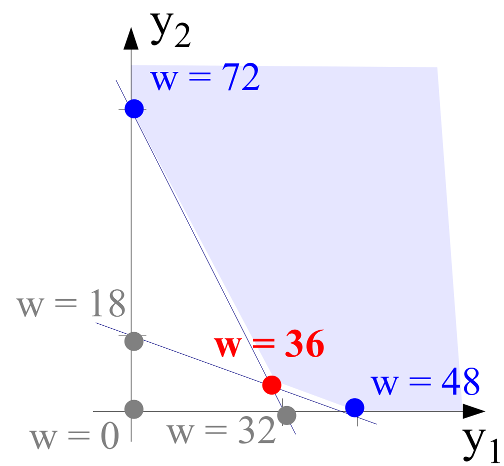
Soluções Complementares: A cada iteração, o Simplex simultaneamente identifica uma solução básica $\underline{\mathbf{x}}$ para o Problema Primal e uma solução complementar $\underline{\mathbf{y}}$ para o Problema Dual, onde $\underline{\mathbf{c}}\ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}}\ \underline{\mathbf{b}}$.

Dualidade

No exemplo:



(P P)



(P D)

Soluções Complementares: A cada iteração, o Simplex simultaneamente identifica uma solução básica $\underline{\mathbf{x}}$ para o Problema Primal e uma solução complementar $\underline{\mathbf{y}}$ para o Problema Dual, onde $\underline{\mathbf{c}}\ \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{y}}\ \underline{\mathbf{b}}$.

Obs.: *Se* $\underline{\mathbf{x}}$ *não é o* ***ótimo*** *do problema primal, então* $\underline{\mathbf{y}}$ *não é* ***factível*** *para o problema dual.*

Dualidade - Propriedades

1) O Dual do Dual é o Primal

$$
\text{(P P)}\quad
\boxed{\begin{array}{ll} \text{Max} & \underline{c}\,\underline{x} \\ \text{s.a.} & A\,\underline{x} \le \underline{b} \\ & \underline{x} \ge 0 \end{array}}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\boxed{\begin{array}{ll} \text{Min} & \underline{y}\,\underline{b} \\ \text{s.a.} & \underline{y}\,A \ge \underline{c} \\ & \underline{y} \ge 0 \end{array}}
\quad \text{(P D)}
$$

|||

$$
\boxed{\begin{array}{ll} \text{Max} & -\underline{y}\,\underline{b} \\ \text{s.a.} & -\underline{y}\,A \le -\underline{c} \\ & \underline{y} \ge 0 \end{array}}
\quad \Longleftrightarrow \quad
\boxed{\begin{array}{ll} \text{Min} & -\underline{c}\,\underline{x} \\ \text{s.a.} & -A\,\underline{x} \ge -\underline{b} \\ & \underline{x} \ge 0 \end{array}}
\quad \text{(PDD)}
$$

|||

$$
\boxed{\begin{array}{ll} \text{Max} & \underline{c}\,\underline{x} \\ \text{s.a.} & A\,\underline{x} \le \underline{b} \\ & \underline{x} \ge 0 \end{array}}
$$

Dualidade - Propriedades

2) Propriedade "Fraca":

Se $\underline{x}$ é uma solução factível do PP e $\underline{y}$ uma solução factível do PD, então:

$$z(\underline{x}) \leq w(\underline{y})$$

Prova:

Para factibilidade, tem-se:

$$\text{PP} \begin{cases} A\,\underline{x} \leq \underline{b} \\ \underline{x} \geq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \text{PD} \begin{cases} \underline{y}\,A \geq \underline{c} \\ \underline{y} \geq 0 \end{cases}$$

Logo:

$$\underbrace{z(\underline{x}) = \underline{c}\,\underline{x} \leq (\underline{y}\,A).\,\underline{x} = \underline{y}\,(A\,\underline{x}) \leq \underline{y}\,\underline{b} = w(\underline{y})}_{\leq}$$

Dualidade - Propriedades

3) Propriedade "Forte":

No ótimo, se houver, o valor da F. Obj. do PD é **igual** ao valor da F. Obj. do PP:

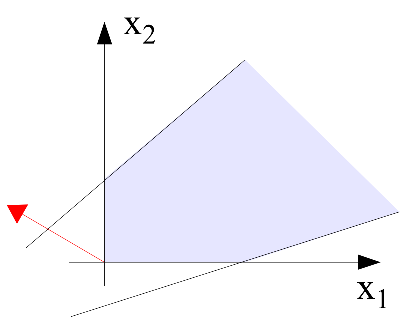
$$z(\underline{x}^*) = w(\underline{y}^*)$$

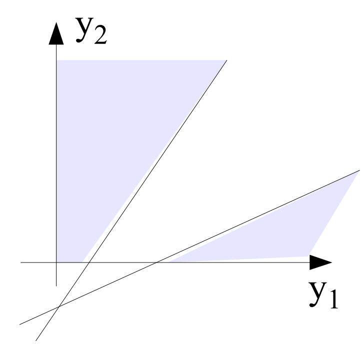
Obs.: Se um POL tem solução ilimitada, seu problema Dual associado será infactível.

Ex.:

$$\begin{aligned} &\text{Min } -3.x_1 + 2.x_2 \\ &\text{s. a:} \\ &\quad -x_1 + 2.x_2. \geq -4 \\ &\quad x_1 - x_2. \geq -3 \\ &\quad x_1 , x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Max } -4.y_1 - 3.x_2 \\ &\text{s. a:} \\ &\quad -y_1 + y_2. \leq -3 \\ &\quad 2x_1 - y_2. \leq 2 \\ &\quad y_1 , y_2 \geq 0 \end{aligned}$$





Dualidade - Propriedades

Teorema Fundamental da Dualidade:

Em relação ao par de problemas duais, exatamente uma e somente uma das afirmações a seguir é verdadeira:

(i) ambos os problemas tem solução ótima finita;

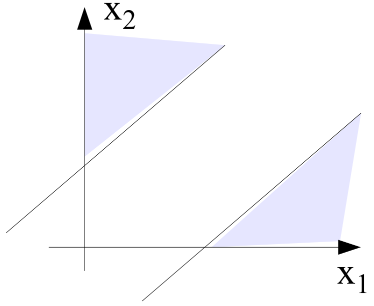
(ii) um deles tem solução ótima ilimitada e o outro é infactível;

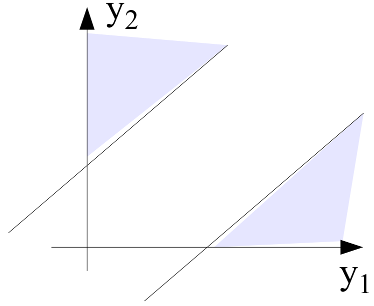
(iii) ambos são infactíveis.

Exemplo da situação (iii):

$$\begin{aligned}
&\text{Min } -x_1 - x_2\\
&\text{s. a:}\\
&\quad x_1 - x_2 \geq 1\\
&\quad -x_1 + x_2 \geq 1\\
&\quad x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{Max } y_1 + y_2\\
&\text{s. a:}\\
&\quad y_1 - y_2 \leq -1\\
&\quad -y_1 + y_2 \leq -1\\
&\quad y_1, y_2 \geq 0
\end{aligned}$$





Dualidade

Algoritmo do Método Dual-Simplex Resumido

0) Colocar o POL na Forma Preparada (p/ uma base inicial otimista)

1) Verificar se a Solução Básica atual é Factível, senão Continuar;

2) Determinar a Variável Básica a sair da Base (linha associada ao coeficiente negativo do vetor do lado direito – *linha i*);

3) Determinar a Variável Não-Básica a entrar da Base (*coluna k*):
A partir da *linha i*:
Se: todos os coeficientes forem $\geq 0 \Rightarrow$ solução ilimitada;
Senão: determinar a coluna k, onde ocorre o menor valor da razão $(-c_k/a_{ik})$

4) Determinar a nova Solução Otimista, por pivotemento em torno de a_{ik},
e voltar ao passo (1).

Dualidade

SIMPLEX

Soluções básicas
Factíveis
Sub-ótimas

Z(x)

Z(x*) = W(y*)

DUAL-SIMPLEX

Soluções básicas
Infactíveis
Otimistas

W(y)