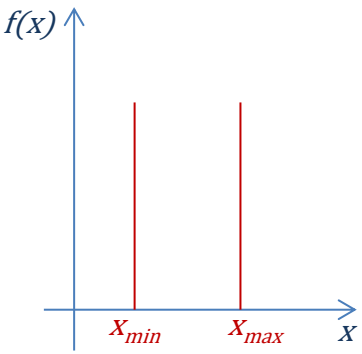
Otimização Não-Linear Restrita

Métodos Baseados em Penalidade e Barreira

Idéia Fundamental:

Seja o problema:

$$\text{Min } f(\underline{x})$$
$$\text{s.a } \underline{x} \in S$$



Definindo-se uma função:

$$\sigma(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ p/ } \underline{x} \in S \\ \infty \text{ p/ } \underline{x} \notin S \end{cases}$$

Pode-se então redefinir o P.O. Restrito no Problema Irrestrito:

$$\text{Min } [f(\underline{x}) + \sigma(\underline{x})]$$

Otimização Não-Linear Restrita

Métodos Baseados em Penalidade e Barreira

Idéia Fundamental:

Seja o Problema Irrestrito:

$$\text{(I)} \quad \text{Min } [f(\underline{x}) + \sigma(\underline{x})] \quad \text{, onde} \quad \sigma(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ p/ } \underline{x} \in S \\ \infty \text{ p/ } \underline{x} \notin S \end{cases}$$

Inconveniente:

$$\sigma(\underline{x}) \begin{cases} \text{não é contínuo} \\ \text{não é definido fora de } S \end{cases}$$

Solução: Resolver uma sequência de problemas irrestritos não descontínuos, buscando gradativamente aproximar-se de (I), ou seja, substituir $\sigma(\underline{x})$ por uma função contínua que gradativamente se aproxime de $\sigma(\underline{x})$.

Algoritmos SUMT *(Sequential Unconstrained Minimization Technique)*

Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira:

A aproximação é feita a partir do **interior** de S.
Para tanto, utiliza-se uma **barreira** matemática que dificulta que a solução se aproxime da fronteira. Assim, durante o processo iterativo busca-se manter a **solução interior** a S.

- Não é adequado para problemas com restrições de igualdade.

Funções Barreira usuais:

- Logarítmica: $B(x) = -\ln(g(x))$
- Inversa: $B(x) = g(x)^{-1}$

✓ contínuas
✓ ≥ 0
✓ $\rightarrow \infty$ qdo x se aproxima da fronteira (pelo interior)

Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira:

Assim, o problema:

$$\text{Min } f(\underline{x})$$

$$\text{s.a } \; g_i(\underline{x}) \geq 0 \;, \quad i=1, \ldots, m$$

Passa a ser o problema irrestrito:

$$\text{Min } \beta(\underline{x}) = f(\underline{x}) + \mu . \sum B_i(\underline{x}) \;, \quad i=1, \ldots, m$$

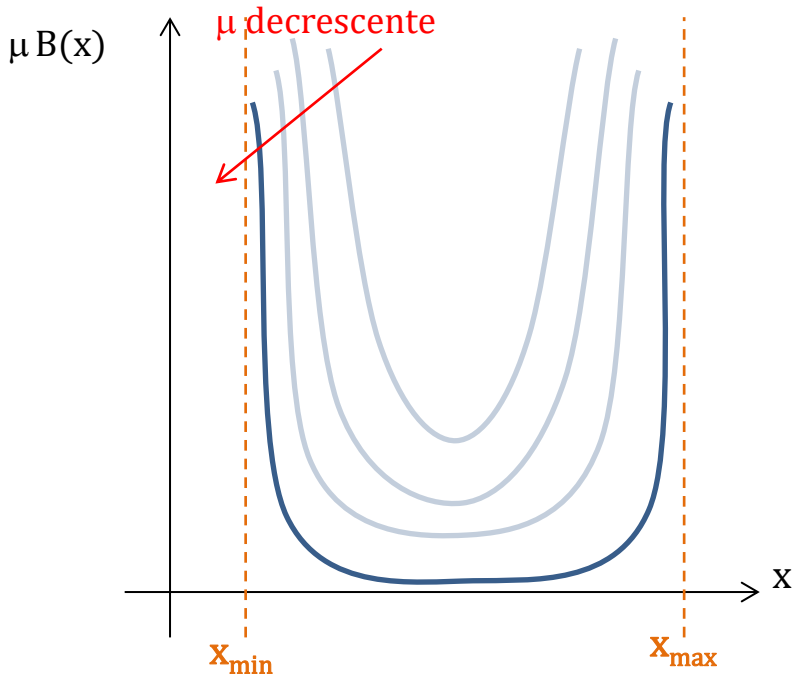
onde μ é o parâmetro de barreira que deve ser atualizado a cada passo, a fim de aproximar o problema da ideia fundamental, pelo interior da região factível (Pontos Interiores).

Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira:

Logo, com o decréscimo contínuo do valor de μ, o problema é resolvido a partir de uma sequência de soluções de problemas irrestritos:

$$\text{Min } \beta(\underline{x})^{(v)} = f(\underline{x}) + \mu^{(v)} \sum B_i(\underline{x}), \quad i=1:m \ \text{ e } \ v=1:n_{iter}$$

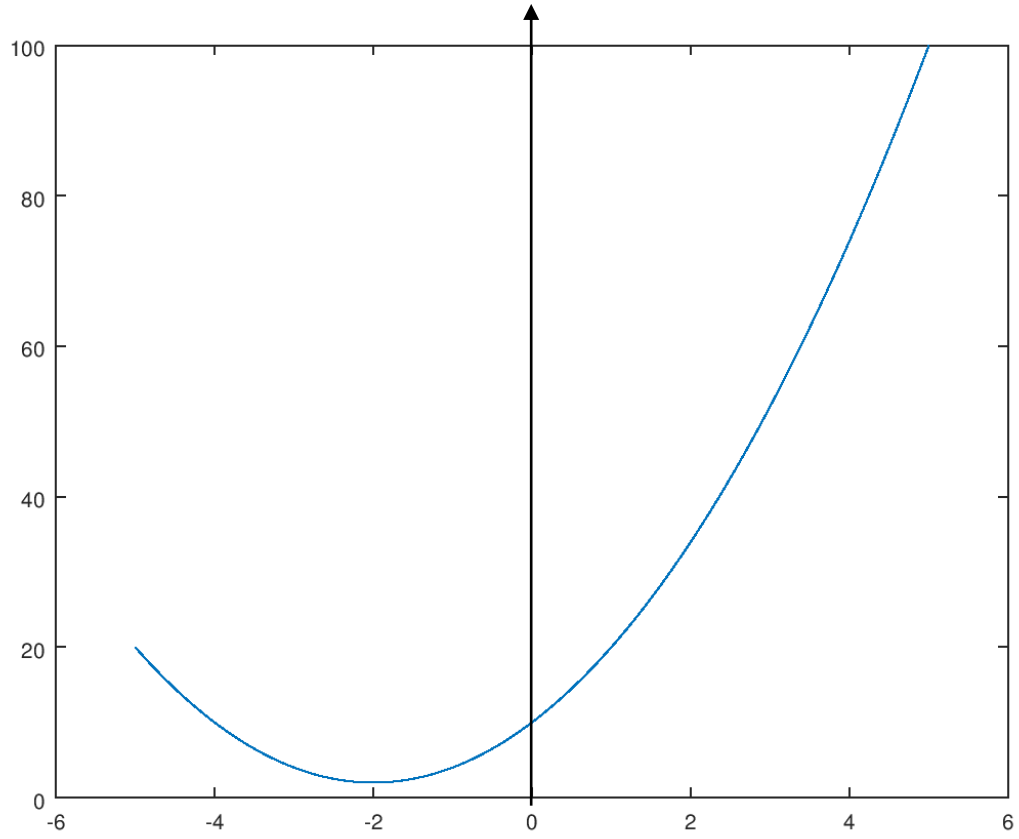


Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira - Exemplo

Min $f(x) = 2\,x^2 + 8x + 10$

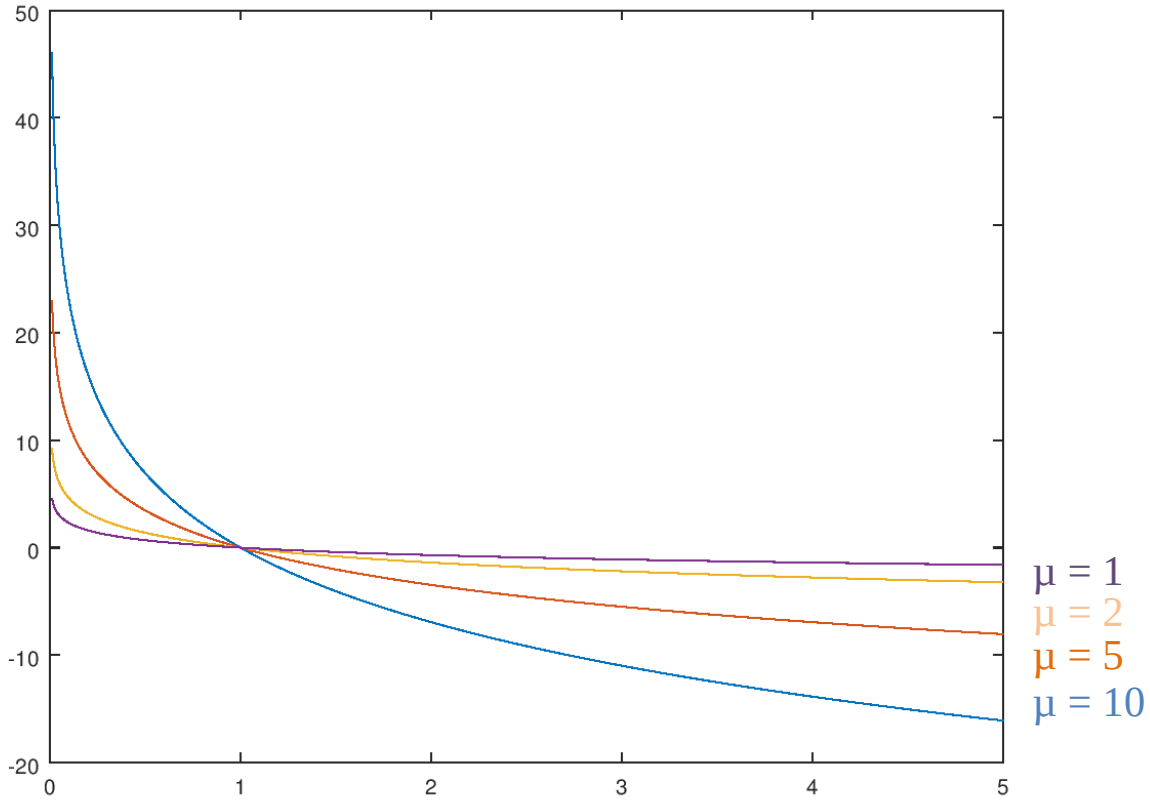
s.a. $x \geq 0$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira - Exemplo

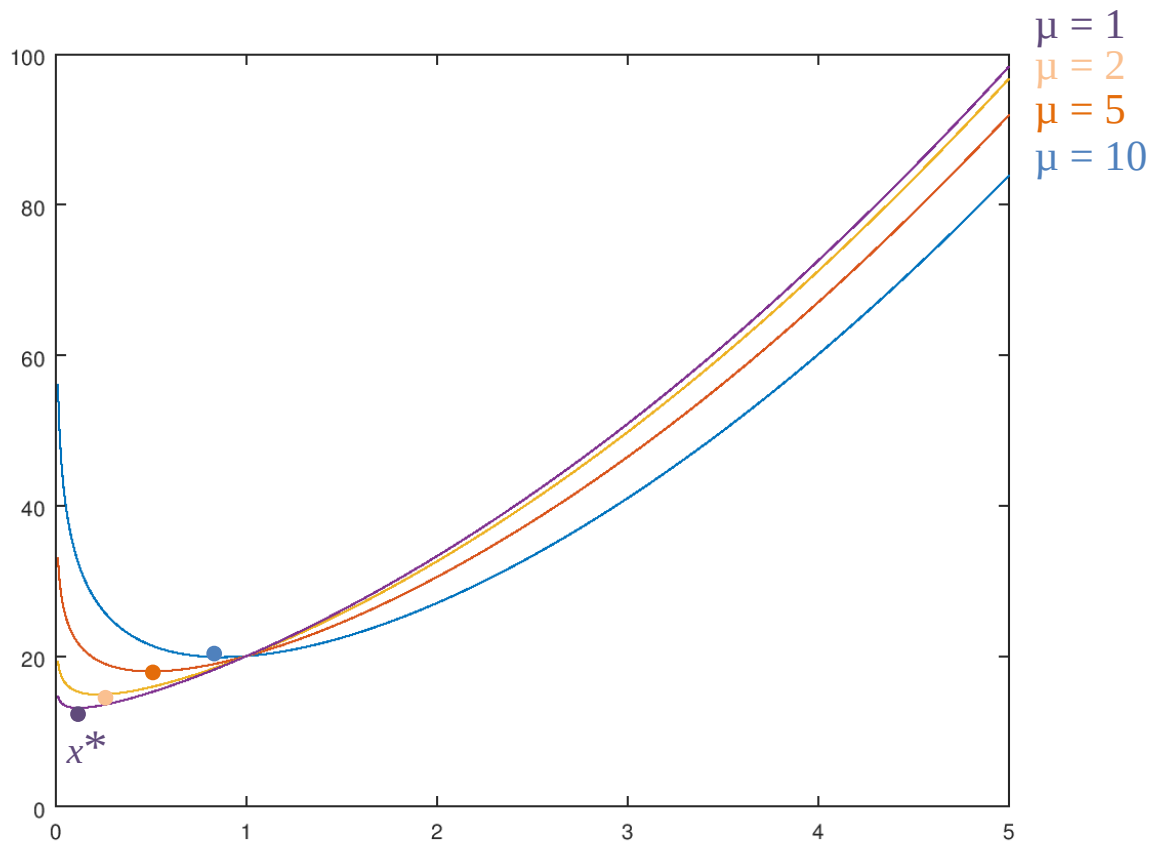
Barreira Logarítmica: $B(x) = -\mu \ln(x)$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira - Exemplo

Problema Irrestrito: Min $\beta(x) = 2\,x^2 + 8x + 10 - \mu \ln(x)$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira – Exemplo 2

Min $f(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 1 + x_1 - x_2^2 \geq 0$

$h_2(\underline{x}) = x_2 \geq 0$

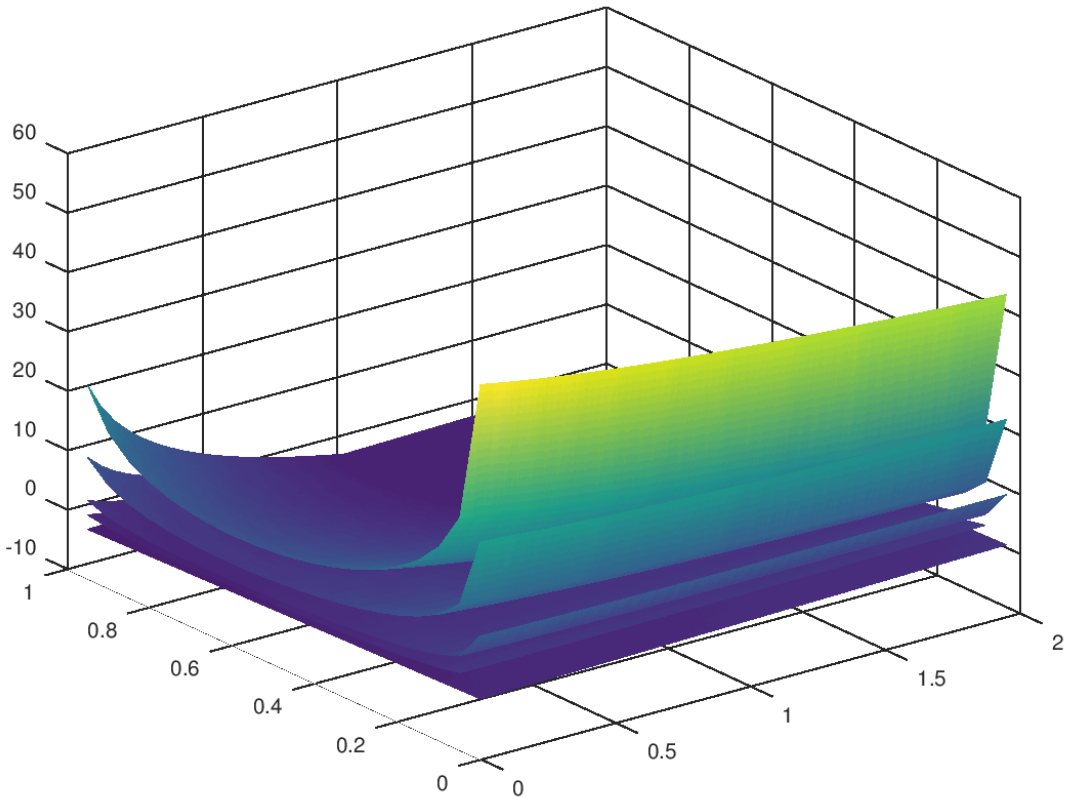
(*Problema Irrestrito*):

Min $\beta(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2 - \mu\,[\,\ln(1 + x_1 - x_2^2) + \ln(x_2)\,]$

Obs.: Condição para ótimo

$$\nabla\beta_\mu(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{\mu}{1 + x_1 - x_2^2} \\ -2 + \dfrac{2.\mu.x_2}{1 + x_1 - x_2^2} - \dfrac{\mu}{x_2} \end{bmatrix} = 0$$

∇f $\nabla B(\mu)$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira – Exemplo 2

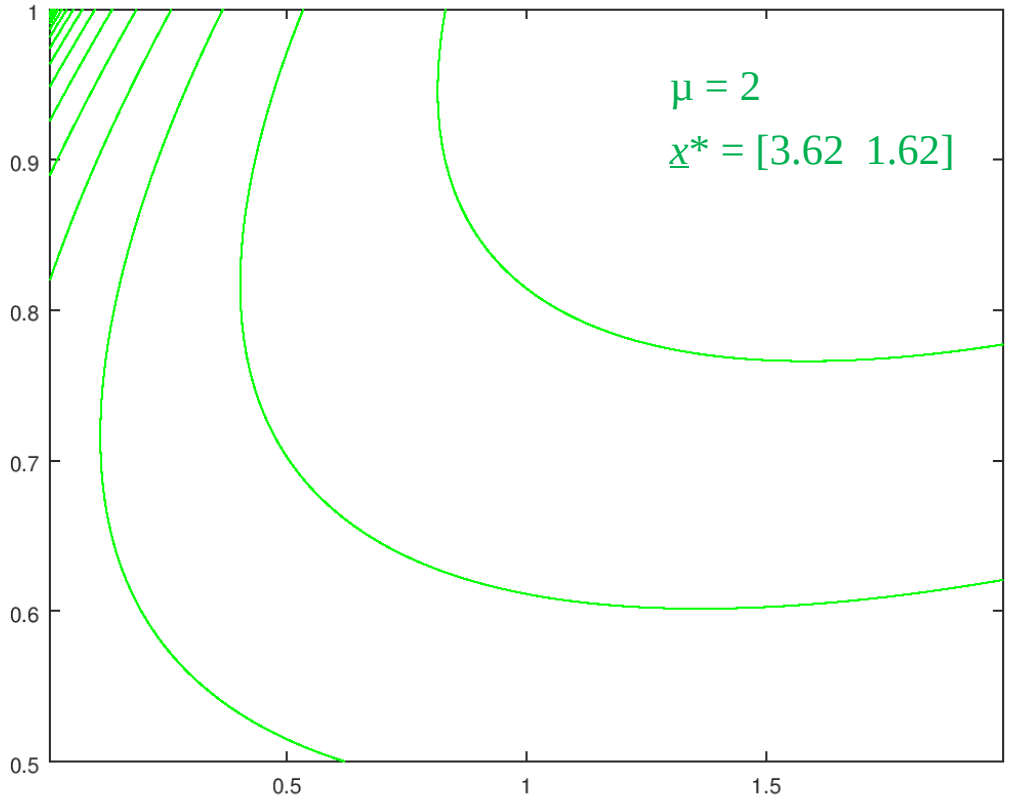
Min $f(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 1 + x_1 - x_2^2 \geq 0$

$h_2(\underline{x}) = x_2 \geq 0$

(*Problema Irrestrito*):

Min $\beta(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2 - \mu\,[\,\ln(1 + x_1 - x_2^2) + \ln(x_2)\,]$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira – Exemplo 2

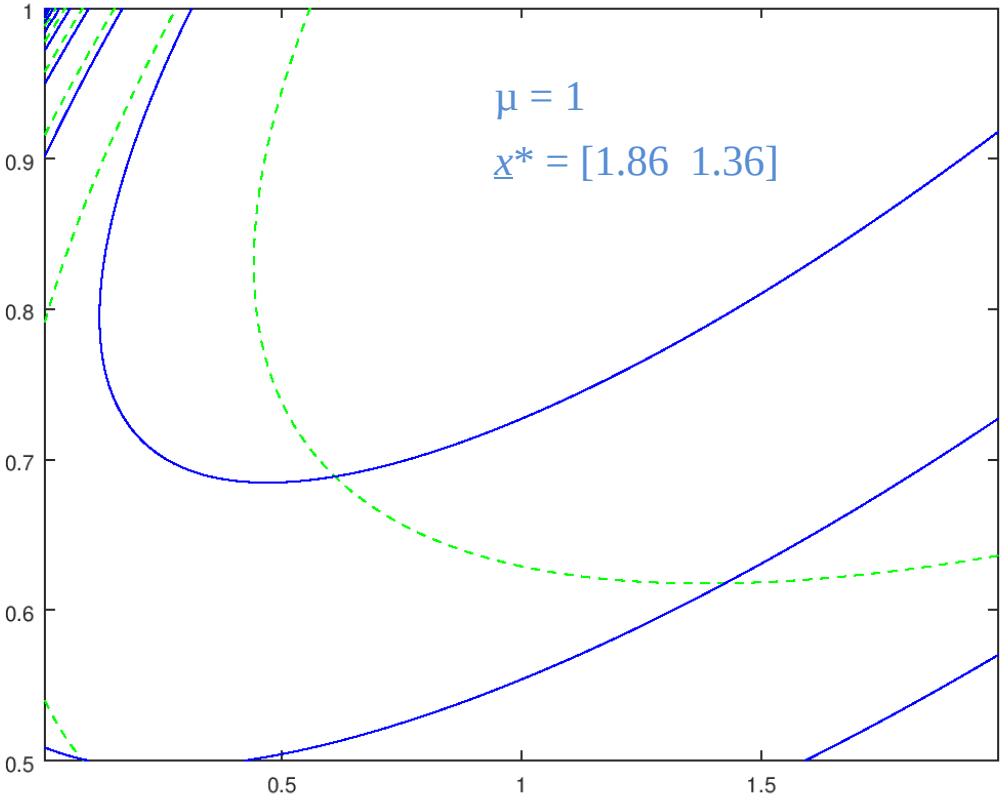
Min $f(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 1 + x_1 - x_2^2 \geq 0$

$h_2(\underline{x}) = x_2 \geq 0$

(*Problema Irrestrito*):

Min $\beta(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2 - \mu\,[\,\ln(1 + x_1 - x_2^2) + \ln(x_2)\,]$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira – Exemplo 2

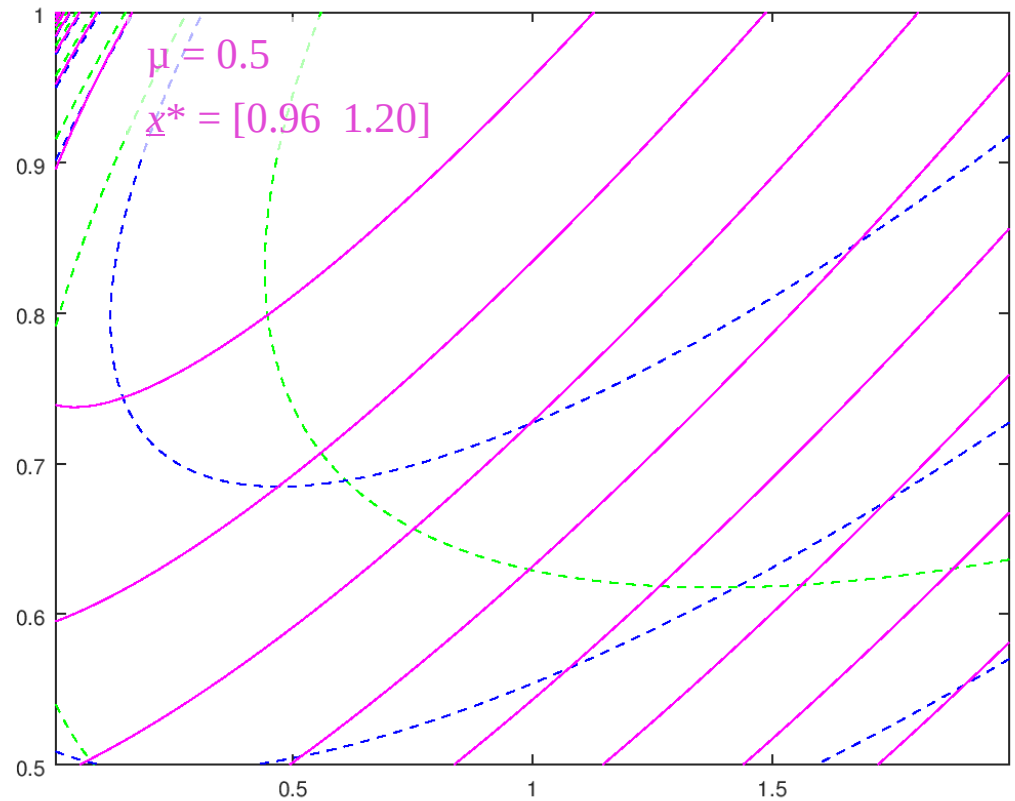
Min $f(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 1 + x_1 - x_2^2 \geq 0$

$h_2(\underline{x}) = x_2 \geq 0$

(*Problema Irrestrito*):

Min $\beta(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2 - \mu\,[\,\ln(1 + x_1 - x_2^2) + \ln(x_2)\,]$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira – Exemplo 2

Min $f(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 1 + x_1 - x_2^2 \geq 0$

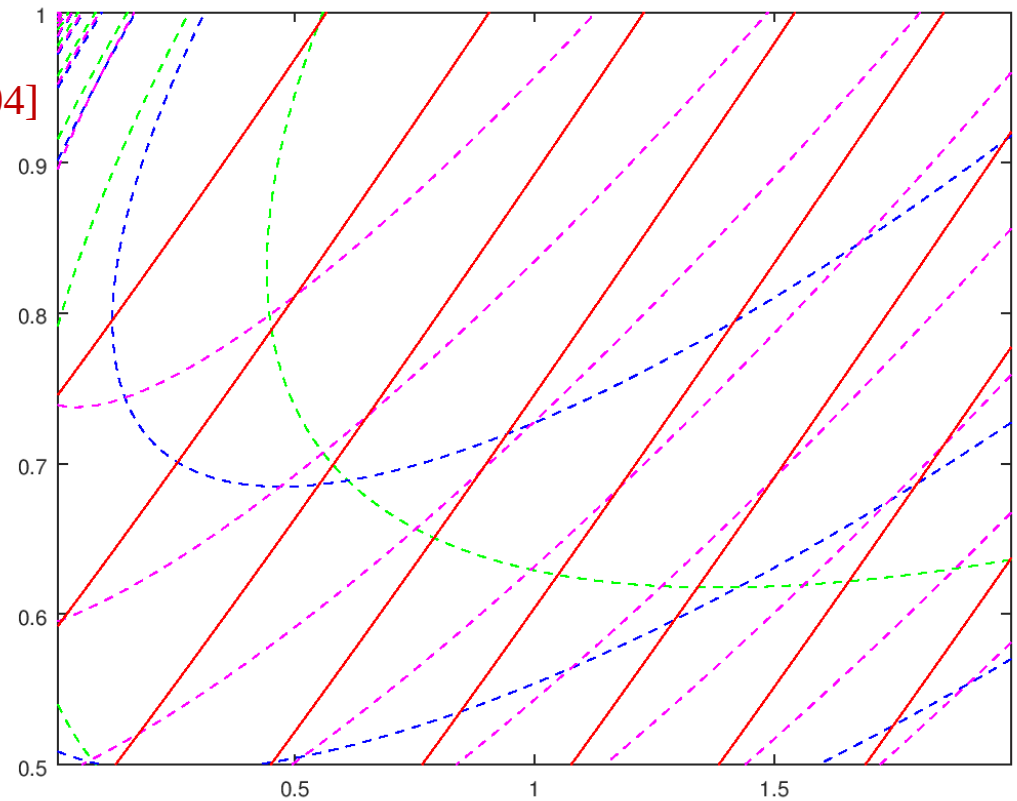
$h_2(\underline{x}) = x_2 \geq 0$

(*Problema Irrestrito*):

Min $\beta(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2 - \mu\,[\,\ln(1 + x_1 - x_2^2) + \ln(x_2)\,]$

$\mu = 0.1$

$\underline{x}^* = [0.19 \;\; 1.04]$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Barreira – Exemplo 2

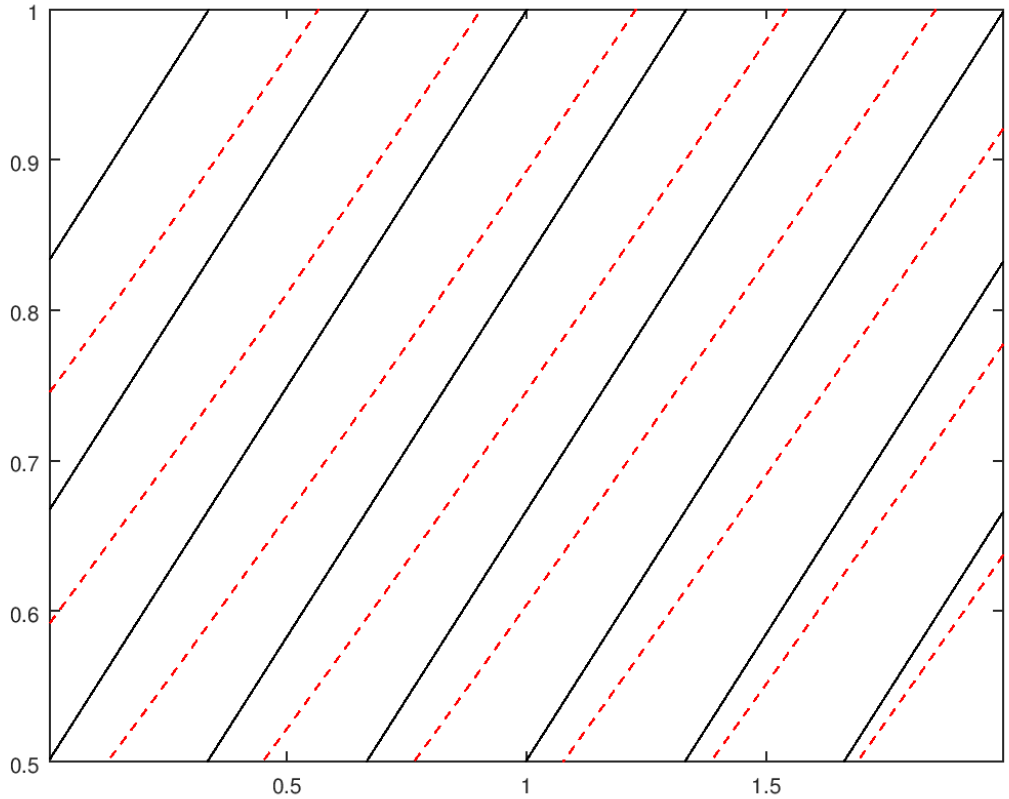
Min $f(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 1 + x_1 - x_2^2 \geq 0$

$h_2(\underline{x}) = x_2 \geq 0$

(*Problema Irrestrito*):

Min $\beta(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2 - \mu\,[\,\ln(1 + x_1 - x_2^2) + \ln(x_2)\,]$

$\mu \to 0$

$\underline{x}^* \to [0.0 \;\; 1.0]$