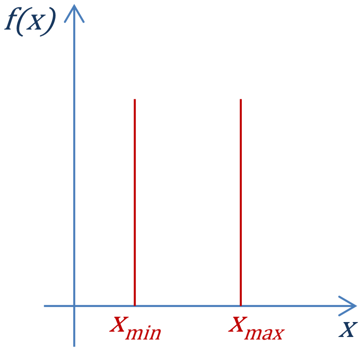
Otimização Não-Linear Restrita

Métodos Baseados em Penalidade e Barreira

Idéia Fundamental:

Seja o problema:

$$\text{Min } f(\underline{x})$$
$$\text{s.a } \underline{x} \in S$$



Definindo-se uma função:

$$\sigma(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ p/ } \underline{x} \in S \\ \infty \text{ p/ } \underline{x} \notin S \end{cases}$$

Pode-se então redefinir o P.O. Restrito no Problema Irrestrito:

$$\text{Min } [f(\underline{x}) + \sigma(\underline{x})]$$

Otimização Não-Linear Restrita

Métodos Baseados em Penalidade e Barreira

Idéia Fundamental:

Seja o Problema Irrestrito:

(I) Min $[f(\underline{x}) + \sigma(\underline{x})]$, onde $\sigma(\underline{x}) = \begin{cases} 0 \text{ p/ } \underline{x} \in S \\ \infty \text{ p/ } \underline{x} \notin S \end{cases}$

Inconveniente:

$\sigma(\underline{x}) \begin{cases} \text{não é contínuo} \\ \text{não é definido fora de } S \end{cases}$

Solução: Resolver uma sequência de problemas irrestritos não descontínuos, buscando gradativamente aproximar-se de (I), ou seja, substituir $\sigma(\underline{x})$ por uma função contínua que gradativamente se aproxime de $\sigma(\underline{x})$.

Algoritmos SUMT *(Sequential Unconstrained Minimization Technique)*

Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Penalidade:

A aproximação é feita a partir do **exterior** de S, penalizando-se de maneira mais intensa os pontos infactíveis para que gradativamente se aproximem de S.

Funções Penalidade usuais:

- Para restrições de igualdade: $P(x) = \frac{1}{2}\, g(x)^2$
- Para restrições de desigualdade: $P(x) = \frac{1}{2}\, \max\,[\,0\,;\, g(x)]^2$

Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Penalidade:

Assim, o problema:

$$\text{Min } f(\underline{x})$$

$$\text{s.a} \qquad h_i(\underline{x}) = 0 \;,\; i=1,\dots,m$$

$$g_j(\underline{x}) \geq 0 \;,\; j=1,\dots,l$$

Passa a ser o problema irrestrito:

$$Min\ \pi_\rho(\underline{x}) = f(\underline{x}) + \rho.\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}(h_i(\underline{x}))^2 + \sum_{j=1}^{l}(\max[0; g_j(\underline{x})])^2\right]$$

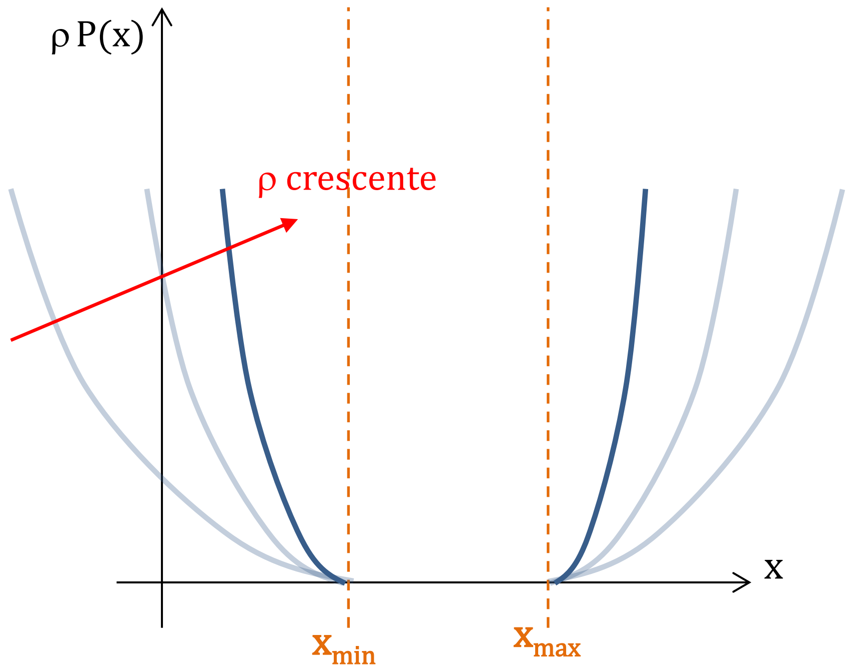
onde **ρ** é o parâmetro de penalidade que deve ser atualizado a cada passo, a fim de aproximar o problema da ideia fundamental, pelo exterior da região factível (Método de Pontos Exteriores).

Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Penalidade:

Logo, com o acréscimo contínuo do valor de ρ, o problema é resolvido a partir de uma sequencia de soluções de problemas irrestritos (SUMT):

$$Min\ \pi_\rho(\underline{x}) = f(\underline{x}) + \rho.\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{m}(h_i(\underline{x}))^2 + \sum_{j=1}^{l}(\max[0; g_j(\underline{x})])^2\right]$$

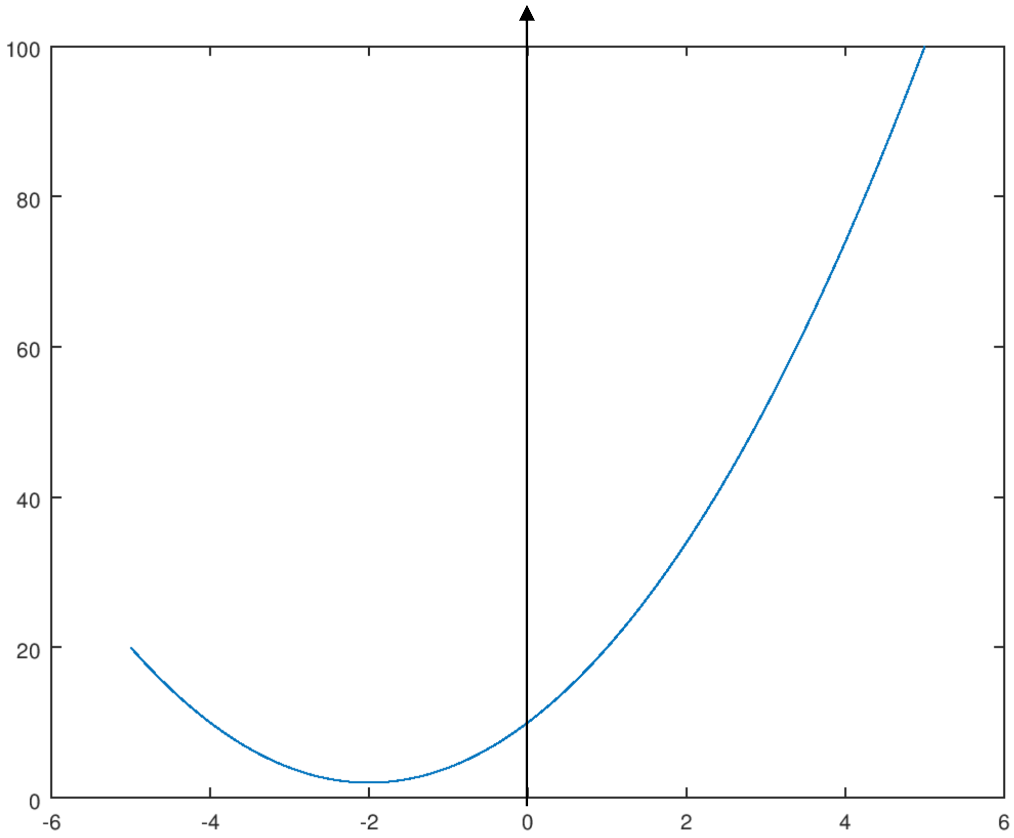


Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Penalidade - Exemplo

Min $f(x) = 2\,x^2 + 8x + 10$

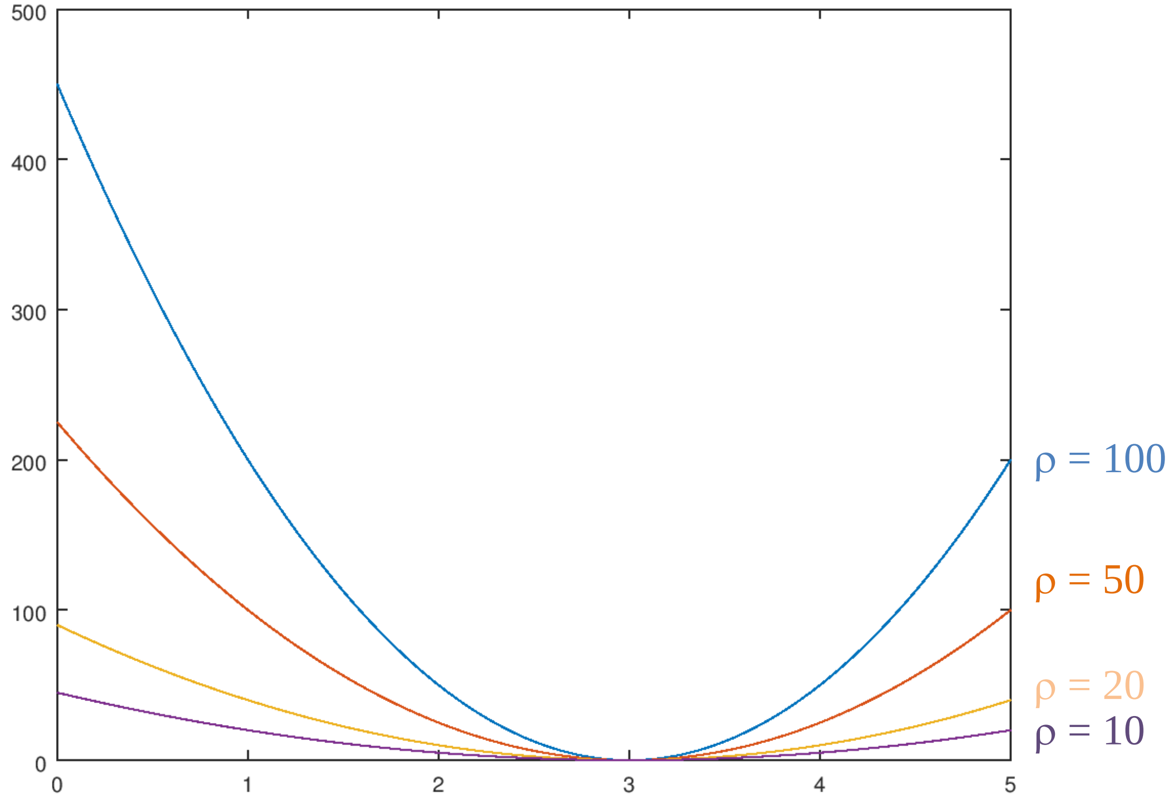
s.a. $x = 3$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Penalidade - Exemplo

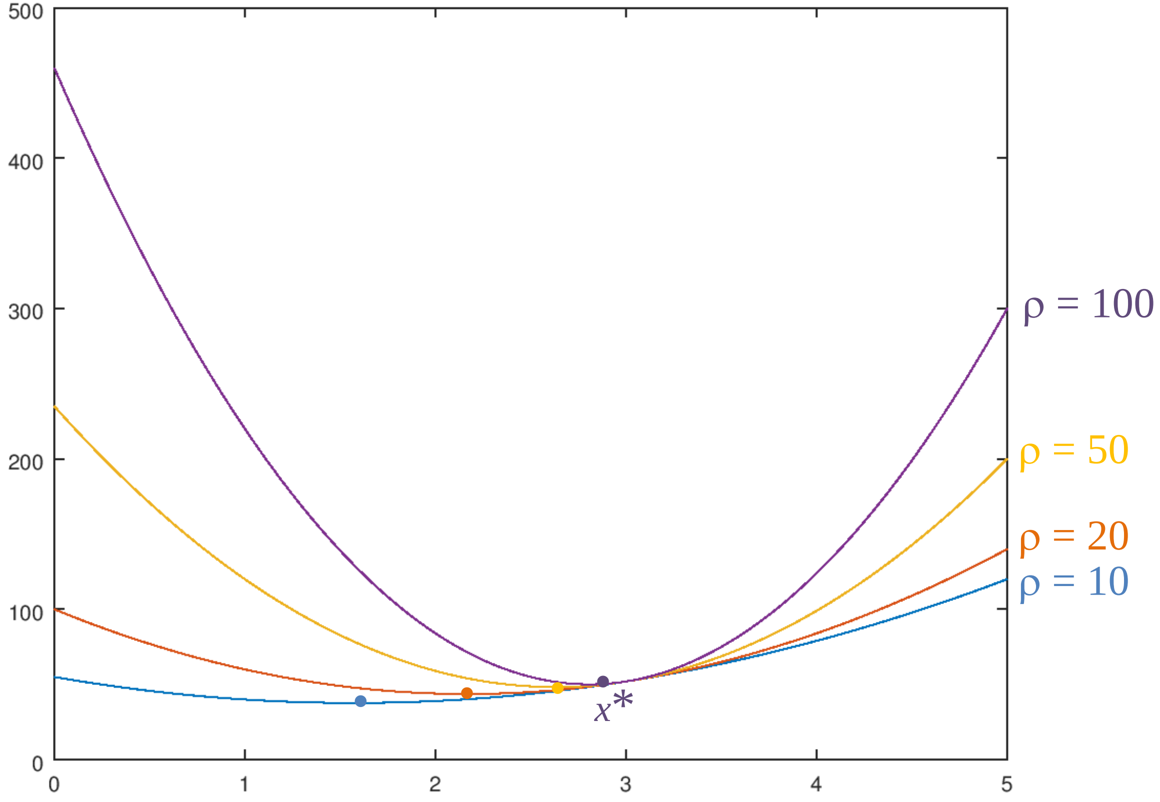
Penalidade Quadrática: $P(x) = \frac{1}{2}\rho\,(x-3)^2$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Penalidade - Exemplo

Problema Irrestrito: Min $\pi(x) = 2\,x^2 + 8x + 10 + \frac{1}{2}\,\rho\,(x\text{-}3)^2$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Penalidade – Exemplo 2

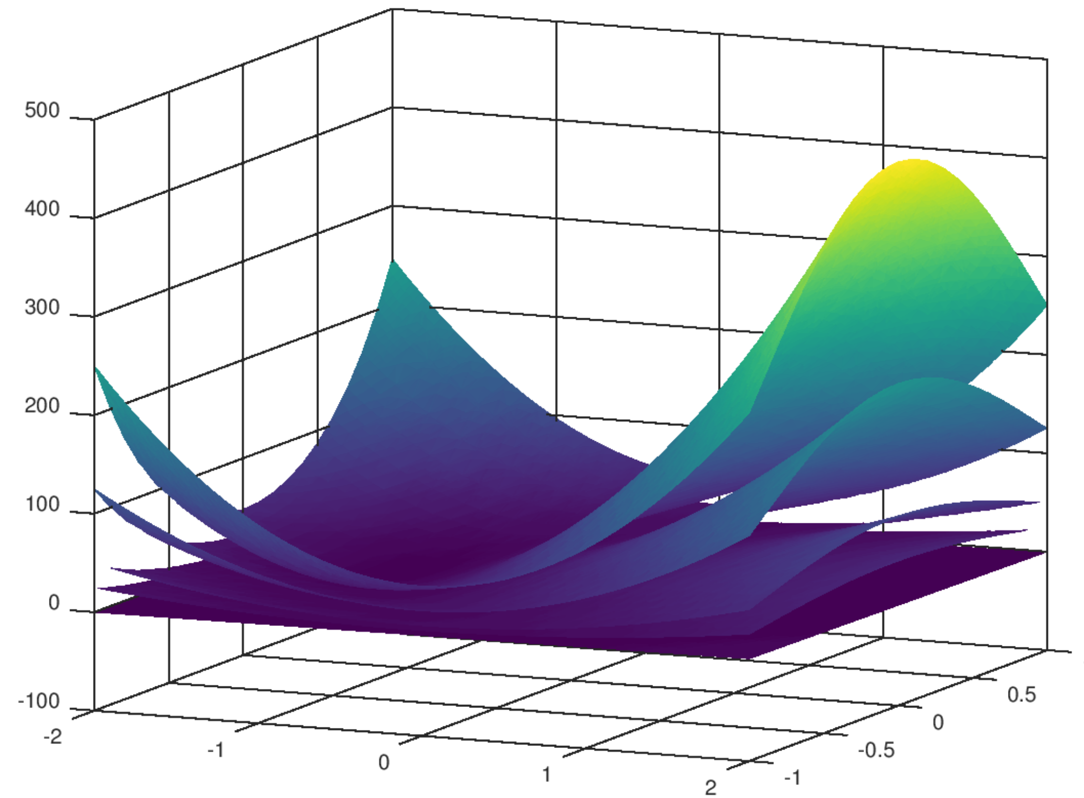
Min $f(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 1 + x_1 - x_2^2 = 0$

$h_2(\underline{x}) = x_2 = 0$

(*Problema Irrestrito*):

Min $\beta(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2 + \frac{1}{2}\,\rho\,[(1 + x_1 - x_2^2)^2 + (x_2)^2]$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Penalidade – Exemplo 2

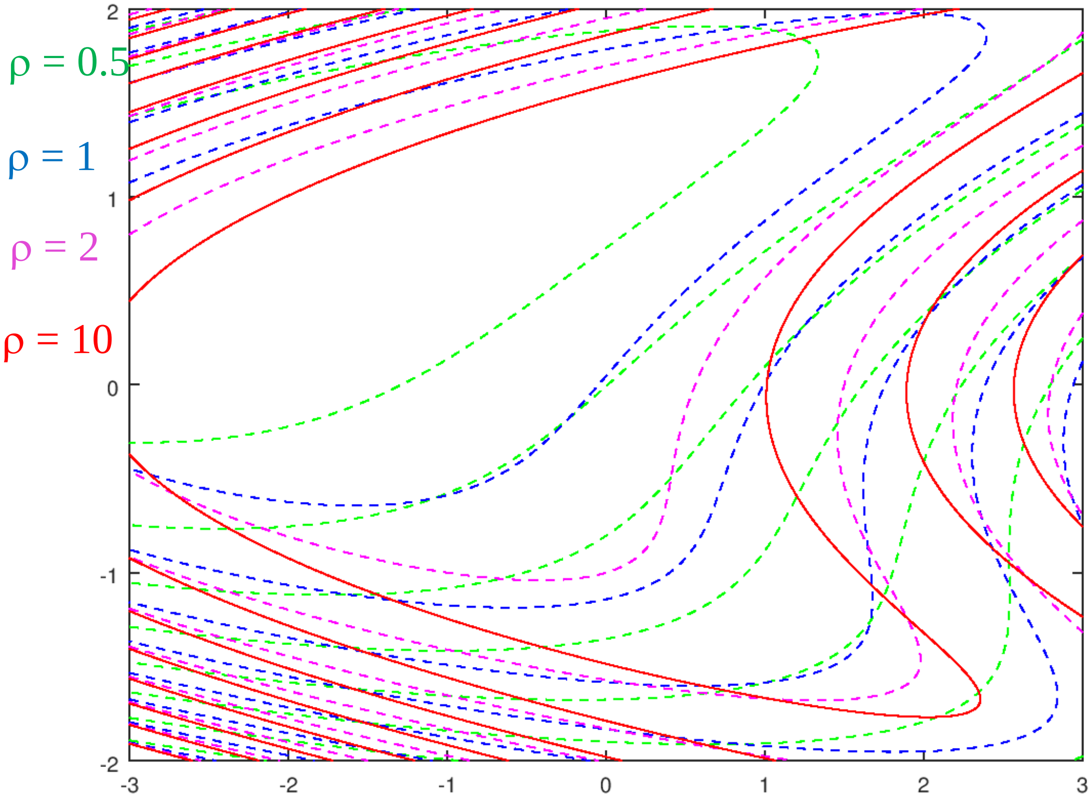
Min $f(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2$

s.a. $h_1(\underline{x}) = 1 + x_1 - x_2^2 = 0$

$h_2(\underline{x}) = x_2 = 0$

(*Problema Irrestrito*):

Min $\beta(\underline{x}) = x_1 - 2\,x_2 + ½\,\rho\,[(1 + x_1 - x_2^2)^2 + (x_2)^2]$



Otimização Não-Linear Restrita

Métodos de Penalidade $\Rightarrow$ Lagrangeano Aumentado

Como vimos, no ótimo: $\nabla\mathcal{L}\left(\underline{x},\underline{\lambda}\right) = 0$

Logo, pode-se minimizar a função irrestrita formada pela penalidade aplicada ao Lagrangeando da função objetivo, ou seja:

$$\text{Min} \;\; \mathcal{A}\left(\underline{x},\underline{\lambda},\rho\right) = \mathcal{L}\left(\underline{x},\underline{\lambda}\right) + \rho\, P(\underline{x})$$