Otimização Não-Linear Irrestrita

Busca Unidimensional (*Line Search*)

Princípio básico: Redução iterativa do intervalo de incerteza

"*Sendo f(x)* unimodal*, para se obter um sub-intervalo que contenha x*, basta avaliar f(x) em pelo menos dois pontos no interior do intervalo de incerteza*"

Otimização Não-Linear Irrestrita

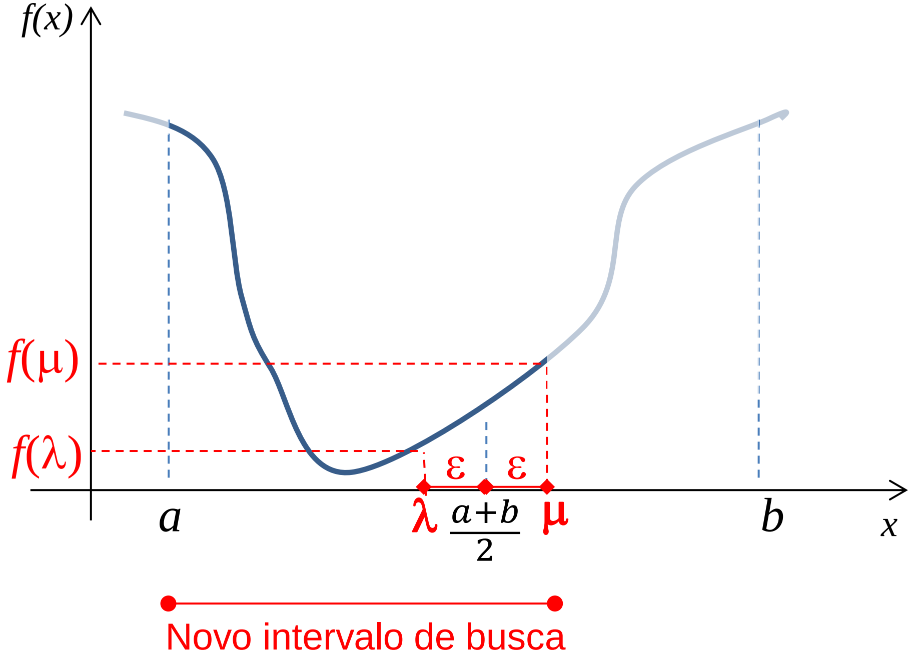
Busca Unidimensional (*Line Search*)

- Métodos que não usam derivadas:
  - Busca Dicotômica
  - Fibonacci
  - Seção Áurea

- Métodos que usam derivadas
  - Bisseção
  - Newton
  - Falsa Posição

Busca Unidimensional

a) Método da Busca Dicotômica



Busca Unidimensional

a) Método da Busca Dicotômica

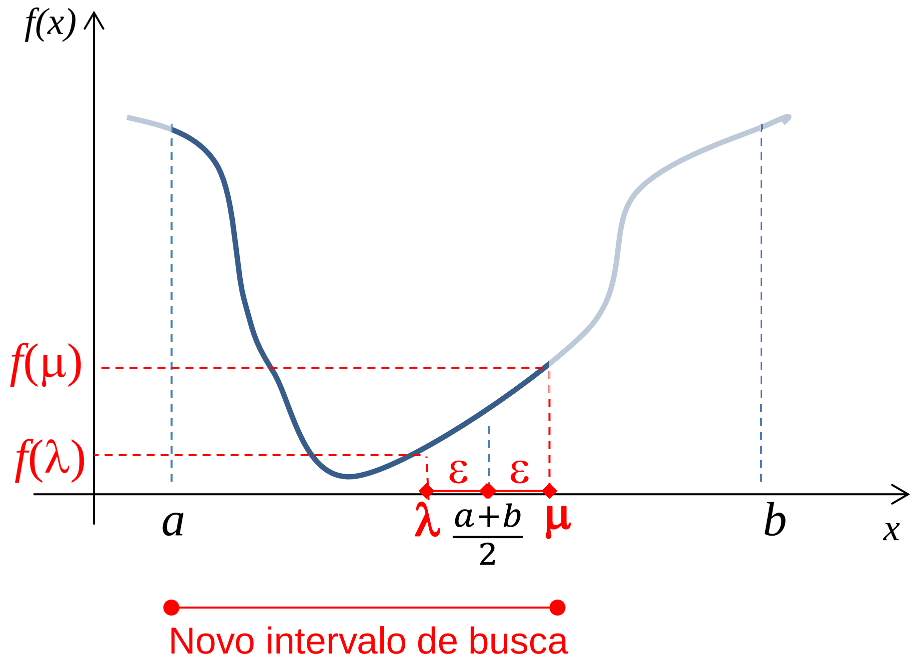
Algoritmo resumido:

Para cada iteração i:

a) Se $(b_i - a_i) > precisão$, calcular:

$$\lambda_i = \frac{a_i + b_i}{2} - \varepsilon$$

$$\mu_i = \frac{a_i + b_i}{2} + \varepsilon$$



b) Definição do novo intervalo de busca

Se: $f(\lambda_i) < f(\mu_i)$

$$a_{i+1} = a_i$$
$$b_{i+1} = \mu_i$$

Senão:

$$a_{i+1} = \lambda_i$$
$$b_{i+1} = b_i$$

Busca Unidimensional

a) Método da Busca Dicotômica

Exemplo: Min $f(x) = (x-2)^2$

Adotando o intervalo de busca inicial $[a_0 , b_0] = [1, 4]$ e $\varepsilon = 0.1$

(i1) $\left\{\begin{array}{l} \lambda_0 = \dfrac{1+4}{2} - 0.1 = 2.4 \\ \mu_0 = \dfrac{1+4}{2} + 0.1 = 2.6 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(\lambda_0) = 0.16 \\ f(\mu_0) = 0.36 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_1 = 1 \\ b_1 = 2.6 \end{array}\right.$

(i2) $\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{1+2.6}{2} - 0.1 = 1.7 \\ \mu_1 = \dfrac{1+2.6}{2} + 0.1 = 1.9 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(\lambda_1) = 0.09 \\ f(\mu_1) = 0.01 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_2 = 1.7 \\ b_2 = 2.6 \end{array}\right.$

(i3) $\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 = \dfrac{1.7+2.6}{2} - 0.1 = 2.05 \\ \mu_1 = \dfrac{1.7+2.6}{2} + 0.1 = 2.25 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} f(\lambda_1) = 0.025 \\ f(\mu_1) = 0.0625 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} a_2 = 1.7 \\ b_2 = 2.25 \end{array}\right.$

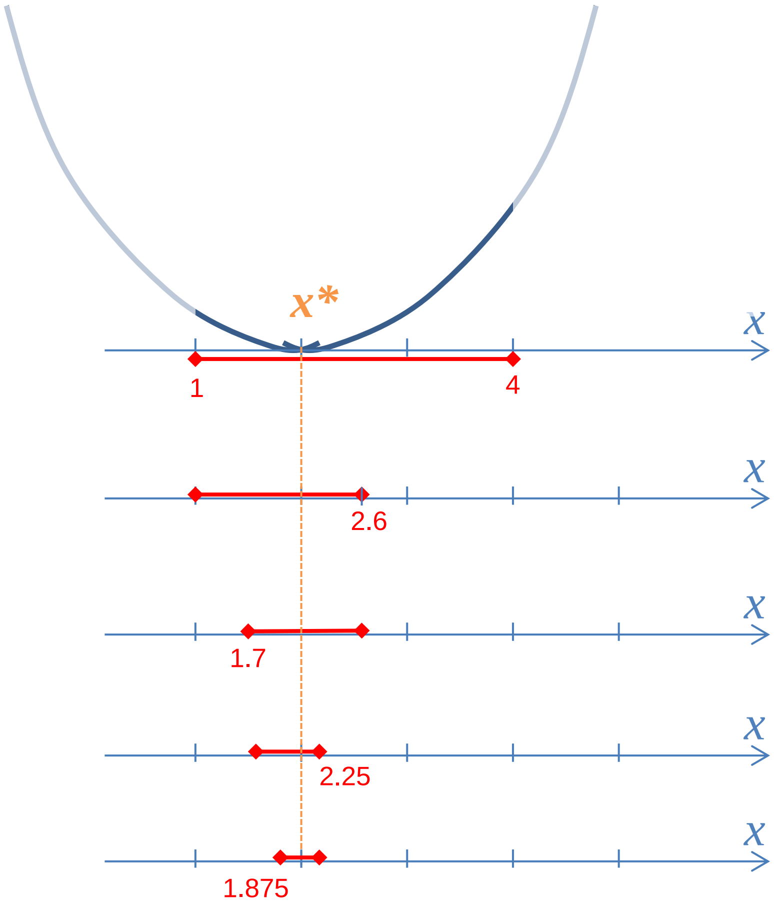
$\vdots$

Busca Unidimensional

a) Método da Busca Dicotômica

<u>Exemplo</u>: Min $f(x) = (x\text{-}2)^2$

Adotando o intervalo de busca inicial $[a_0 , b_0] = [1, 4]$ e $\varepsilon = 0.1$



Busca Unidimensional

b) Método da Sequência de Fibonacci

Sequência de Fibonacci:

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad \text{p/ } n=1, 2, \ldots \end{cases} \Rightarrow \quad F = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots\}$$

Assim, o algoritmo segue a mesma lógica da Busca Dicotômica, sendo que as avaliações de f(x) passam a ser definidas por:

$$\lambda_i = a_i + \frac{F_{n-i-1}}{F_{n-i+1}}(b_i - a_i) \quad \text{e} \quad \mu_i = a_i + \frac{F_{n-i}}{F_{n-i+1}}(b_i - a_i)$$

e a definição do novo intervalo de busca:

Se: $f(\lambda_i) < f(\mu_i)$

$$a_{i+1} = a_i$$
$$b_{i+1} = \mu_i$$
$$\mu_{i+1} = \lambda_i$$
$$\lambda_{i+1} = a_{i+1} + \frac{F_{n-i-2}}{F_{n-i}}(b_{i+1} - a_{i+1})$$

Senão:

$$a_{i+1} = \lambda_i$$
$$b_{i+1} = b_i$$
$$\lambda_{i+1} = \mu_i$$
$$\mu_{i+1} = a_{i+1} + \frac{F_{n-i-1}}{F_{n-i}}(b_{i+1} - a_{i+1})$$

b) Método da Sequência de Fibonacci

Exemplo: Min $f(x) = (x-2)^2$

Adotando o intervalo de busca inicial $[a_1 , b_1] = [1, 4]$ e precisão de 0.2

❖ Determinação prévia do número de iterações $\Rightarrow F_n > \frac{b_o - a_o}{precisão} = \frac{4-1}{0.2} = 15$ $\Rightarrow$ **n=7** ($F_7 = 21 > 15$)

(i1)
$$\begin{cases} \lambda_1 = a_1 + \dfrac{F_{7-1-1}}{F_{7-1+1}}(b_1 - a_1) = 1 + \dfrac{8}{21}(3) = 2.143 \\ \mu_1 = a_1 + \dfrac{F_{7-1}}{F_{7-1+1}}(b_1 - a_1)) = 1 + \dfrac{13}{21}(3) = 2.857 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f(\lambda_1) = 0.0204 \\ \wedge \\ f(\mu_1) = 0.7344 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a_2 = 1 \\ b_2 = 2.857 \\ \mu_2 = \lambda_1 = 2.143 \end{cases}$$

(i2)
$$\lambda_2 = a_2 + \frac{F_{7-1-2}}{F_{7-1}}(b_2 - a_2) = 1 + \frac{5}{13}(1.857) = 1.714 \Rightarrow f(\lambda_2) = 0.082 \Longrightarrow \begin{cases} a_3 = 1.714 \\ b_3 = 2.857 \\ \lambda_3 = \mu_2 = 2.143 \end{cases}$$

$(> f(\mu_2 = \lambda_1)=0.0204)$

(i3)
$$\mu_3 = a_3 + \frac{F_{7-2-1}}{F_{7-2}}(b_3 - a_3) = 1.714 + \frac{5}{8}(1.143) = 2.428 \Rightarrow f(\mu_3) = 0.183 \Longrightarrow \begin{cases} a_4 = 1.714 \\ b_4 = 2.428 \\ \mu_4 = \lambda_3 = 2.143 \end{cases}$$

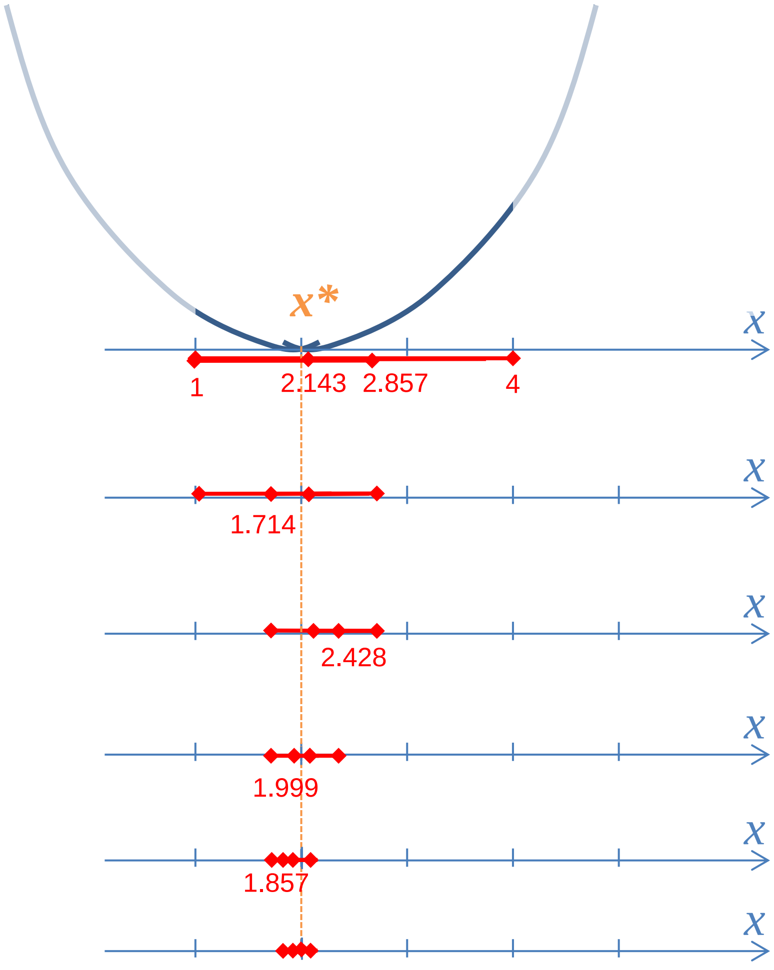
$(> f(\lambda_3 = \mu_2)=0.0204)$

⋮

b) Método da Sequência de Fibonacci

<u>Exemplo</u>: Min $f(x) = (x-2)^2$

Adotando o intervalo de busca inicial = [1, 4] e precisão = 0.2 $\Rightarrow$ n=7



Busca Unidimensional

c) Método da Seção Áurea (*Golden Section*)

Da Sequência de Fibonacci, p/ n→∞ $\Rightarrow \frac{F_{n-1}}{F_n} \rightarrow$ 0.618… *(razão áurea)*

Assim, a ***razão áurea*** pode substituir, em todas as iterações, as razões entre os fatores de Fibonatti

Dessa forma, as avaliações de f(x) passam a ser definidas por:

$$\lambda_i = a_i + (1 - \alpha)(b_i - a_i)$$

$$\mu_i = a_i + \alpha\,(b_i - a_i)$$

onde α=0.618 (= $\frac{b-\lambda}{b-a} = \frac{\mu-a}{b-a}$)

c) Método da Seção Áurea

Exemplo: Min $f(x) = (x-2)^2$

Adotando o intervalo de busca inicial $[a_1, b_1] = [1, 4]$

(i1) $\begin{cases} \lambda_1 = a_1 + (1-\alpha)(b_1 - a_1) = 1 + 0.382(3) = 2.146 \\ \mu_1 = a_1 + \alpha(b_1 - a_1)) = 1 + 0.618(3) = 2.854 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} f(\lambda_1) = 0.0213 \\ \wedge \\ f(\mu_1) = 0.7815 \end{cases}$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} a_2 = 1 \\ b_2 = 2.854 \\ \mu_2 = \lambda_1 = 2.146 \end{cases}$

(i2) $\lambda_2 = 1 + 0.382(1.854) = 1.708$ $\Longrightarrow$ $f(\lambda_2) = 0.078$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} a_3 = 1.708 \\ b_3 = 2.854 \\ \lambda_3 = \mu_2 = 2.146 \end{cases}$

(> $f(\mu_2 = \lambda_1)$=0.0213)

(i3) $\mu_3 = 1.708 + 0.618(1.146) = 2.416$ $\Longrightarrow$ $f(\mu_3) = 0.173$ $\Longrightarrow$ $\begin{cases} a_4 = 1.708 \\ b_4 = 2.416 \\ \mu_4 = \lambda_3 = 2.146 \end{cases}$

(> $f(\lambda_3 = \mu_2)$=0.0204)

⋮

Obs.: Critério de parada: Δx (|b-a| < precisão) ou Δf (|f(b)-f(a)| < precisão)