Otimização Não-Linear Irrestrita

Busca Unidimensional – Métodos que usam derivadas

a) **<u>Método da Bisseção</u>**

(i) Considerando, a cada iteração, o intervalo de busca $[a_i, b_i]$, avalia-se a derivada da função objetivo no ponto médio do intervalo, $\lambda_i = \frac{a_i + b_i}{2}$.

(ii) Então, considerando um problema de minimização, define-se o novo intervalo de busca:

Se: $f'(\lambda_i) > 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_{i+1} = a_i \\ b_{i+1} = \lambda_i \end{cases}$

$f'(\lambda_i) < 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_{i+1} = \lambda_i \\ b_{i+1} = b_i \end{cases}$

$f'(\lambda_i) = 0 \Longrightarrow x^* = \lambda_i$ (FIM)

Busca Unidimensional – Métodos que usam derivadas

a) Método da Bisseção

Exemplo: Min $f(x) = \frac{x^2}{2} - sen(x)$

Adotando o intervalo de busca inicial $[a_1 , b_1] = [0, 1]$ e sabendo que $f'(x) = x - \cos(x)$

(i1) $\lambda_1 = \frac{0+1}{2} = 0.5 \Longrightarrow f'(\lambda_1) = -0.38 \ (< 0) \Longrightarrow \begin{cases} a_2 = \lambda_1 = 0.5 \\ b_2 = b_1 = 1 \end{cases}$

(i2) $\lambda_2 = \frac{0.5+1}{2} = 0.75 \Longrightarrow f'(\lambda_2) = 0.018 \ (> 0) \Longrightarrow \begin{cases} a_3 = a_2 = 0.5 \\ b_3 = \lambda_2 = 0.75 \end{cases}$

(i3) $\lambda_3 = \frac{0.5+0.75}{2} = 0.625 \Longrightarrow f'(\lambda_3) = -0.185 \ (< 0) \Longrightarrow \begin{cases} a_4 = \lambda_3 = 0.625 \\ b_4 = b_3 = 0.75 \end{cases}$

(i4) $\lambda_4 = \frac{0.625+0.75}{2} = 0.6875 \Longrightarrow f'(\lambda_4) = -0.085 \ (< 0) \Longrightarrow \begin{cases} a_5 = \lambda_4 = 0.6875 \\ b_5 = b_4 = 0.75 \end{cases}$

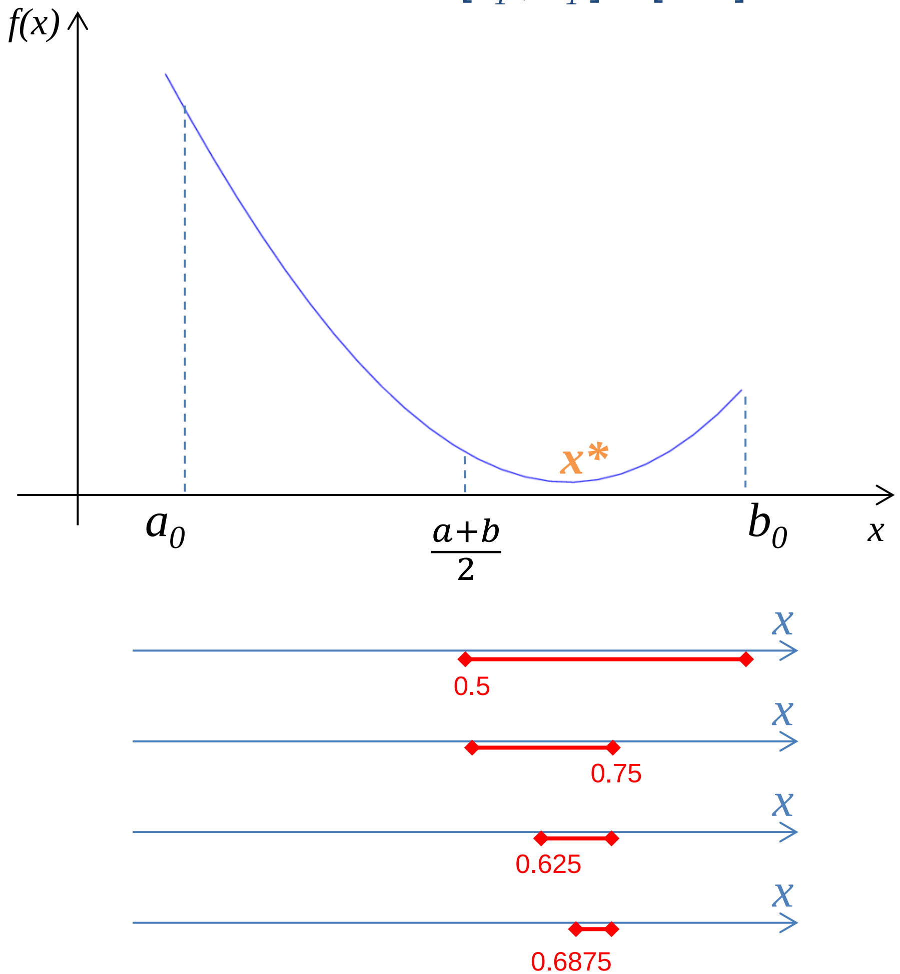
⋮

Busca Unidimensional – Métodos que usam derivadas

a) **Método da Bisseção**

Exemplo: Min $f(x) = \frac{x^2}{2} - sen(x)$

Adotando o intervalo de busca inicial $[a_1, b_1] = [0, 1]$ e sabendo que $f'(x) = x - \cos(x)$



Busca Unidimensional – Métodos que usam derivadas

b) **Método de Newton**

Considerando uma função $f(x)$, unimodal e diferenciável, pode-se definir uma função quadrática equivalente no ponto x_i, a partir da expansão em Série de Taylor de $f(x)$, truncada no termo quadrático:

$$\tilde{f}(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + \tfrac{1}{2} f''(x_i)(x - x_i)^2$$

Aplicando-se a condição de otimalidade para $\tilde{f}(x)$, tem-se:

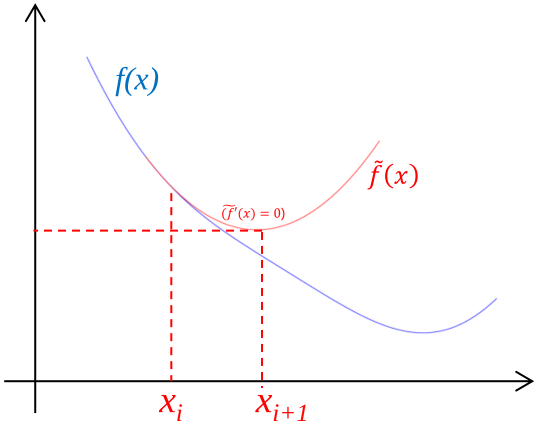
$$\tilde{f}'(x) = 0 = f'(x_i) + f''(x_i)(x - x_i)$$

Assim, cada passo do processo iterativo fica definido por:

$$\Delta x = (x - x_i) = -\frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$

Logo:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x = x_i - \frac{f'(x_i)}{f''(x_i)}$$



Busca Unidimensional – Métodos que usam derivadas

b) **Método de Newton**

Exemplo: Min $f(x) = \frac{x^2}{2} - sen(x)$

Adotando como valor inicial $x_0 = 0$ e sabendo que $f'(x) = x - \cos(x)$ e, $f''(x) = 1 + sen(x)$

(i1) $$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 0 - \frac{-1}{1} = 1.0$$

(i2) $$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 1.0 - \frac{0.4597}{1.8415} = 0.7504$$

(i3) $$x_3 = x_2 - \frac{f'(x_2)}{f''(x_2)} = 0.7504 - \frac{0.0190}{1.6819} = 0.7391$$

(i4) $$x_4 = x_3 - \frac{f'(x_3)}{f''(x_3)} = 0.7391 - \frac{0.000025}{1.412} = 0.7390$$

⋮

Busca Unidimensional – Métodos que usam derivadas

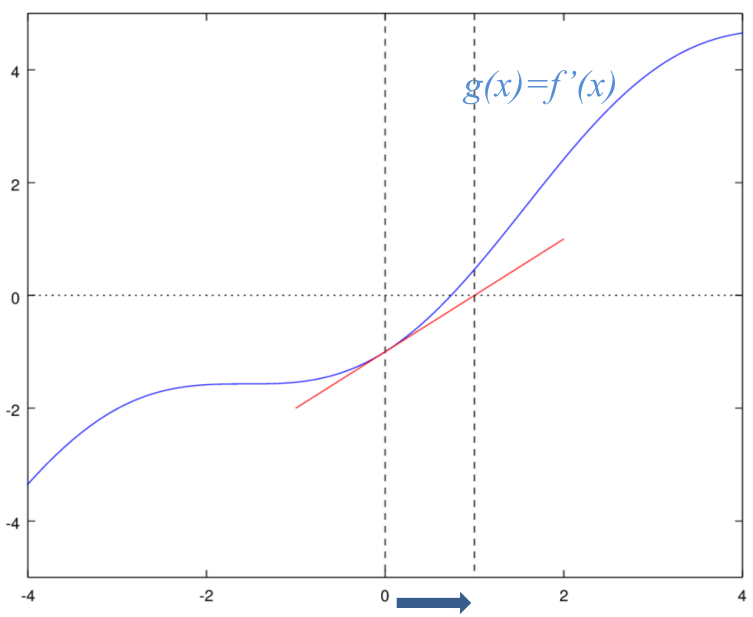
b) **Método de Newton**

Também pode ser interpretado como a obtenção da raiz de $f'(x)$, ou seja, como a solução do problema:

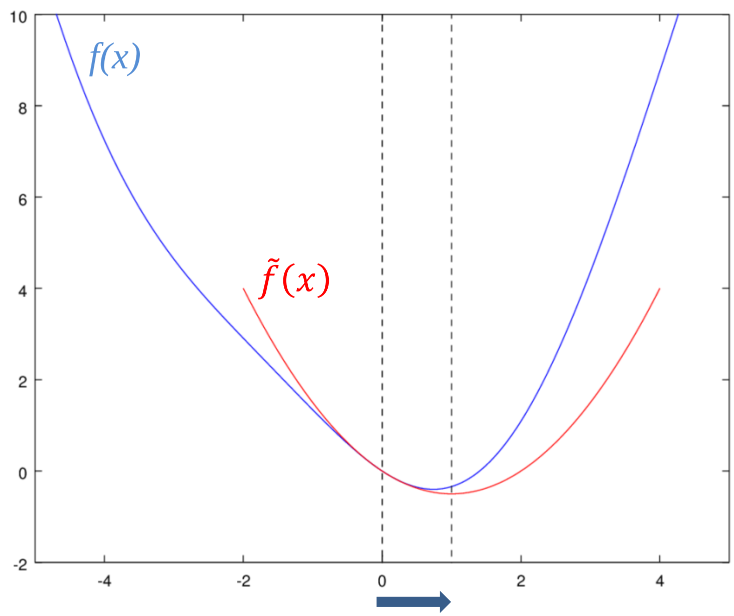
$$g(x_i) = f'(x_i) = 0$$

Assim tem-se que:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{g(x_i)}{g'(x_i)}$$



Aproximação tangente



Aproximação quadrática

Busca Unidimensional – Métodos que usam derivadas

c) **Método da Falsa Posição**

Ao contrário do Método de Newton que usa informações da derivada segunda, o Método da Falsa Posição usa apenas informações da derivada primeira, a partir da seguinte aproximação:

$$f''(x_i) \approx \frac{f'(x_i) - f'(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Assim, cada passo do processo iterativo fica definido por:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{f'(x_i) - f'(x_{i-1})} f'(x_i)$$

ou:

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1}.f'(x_i) - x_i.f'(x_{i-1})}{f'(x_i) - f'(x_{i-1})}$$

Busca Unidimensional – Métodos que usam derivadas

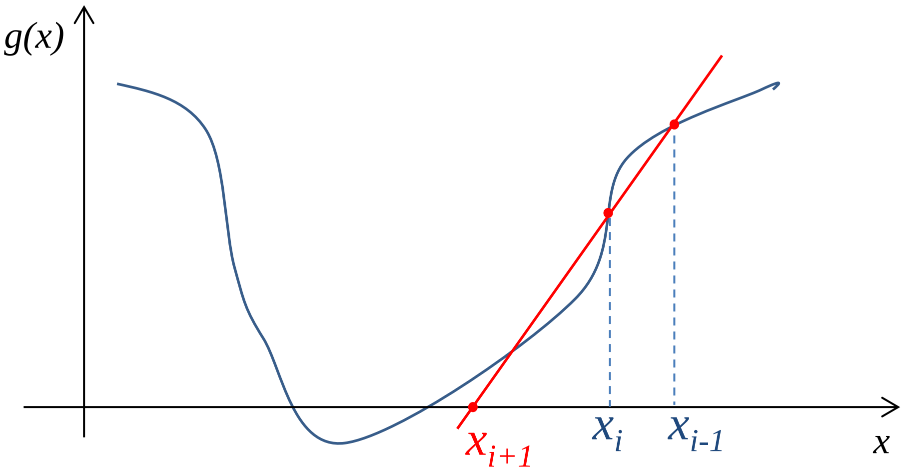
c) <u>**Método da Falsa Posição**</u>

Como no Método de Newton também pode ser interpretado como a obtenção da raiz da derivada da função objetivo ($f'(x) = g(x)$).

Assim:

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1}.\,g(x_i) - x_i.\,g(x_{i-1})}{g(x_i) - g(x_{i-1})}$$

Por isso, este método é também conhecido como Método da Secante.



Busca Unidimensional

c) Método da Falsa Posição

<u>Exemplo</u>: Min $f(x) = (x-2)^2$

Adotando os pontos iniciais $x_0 = 0.5$ *e* $x_{(-1)} = 0.4$ e sabendo que $g(x) = f'(x) = x - \cos(x)$

(i1) $$x_1 = x_0 - \frac{x_0 - x_{(-1)}}{g(x_0) - g\left(x_{(-1)}\right)} g(x_0) = 0.5 - \frac{0.5 - 0.4}{-0.377 - (-0.521)}(-0.377) = 0.763$$

(i2) $$x_2 = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{g(x_1) - g(x_0)} g(x_1) = 0.763 - \frac{0.763 - 0.5}{0.0402 - (-0.377)}(0.0402) = 0.738$$

(i3) $$x_3 = x_2 - \frac{x_2 - x_1}{g(x_2) - g(x_1)} g(x_2) = 0.738 - \frac{0.738 - 0.763}{-0.0018 - (0.0402)}(-0.0018) = 0.739$$

⋮

Busca Unidimensional

Possíveis Critérios de Parada:

i) $| f'(x) |$

ii) $| x_i - x_{i-1} |$

iii) $| f(x_i) - f(x_{i-1}) |$

iv) $\left| \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{f(x_i)} \right|$